Filozofia Nauki, ISSN 1230-6894
Rok XXV, 2017, Nr 2(98), s. 5-28

ZBIGNIEW TWORAK*

LOGIKA MODALNA I TEORIA GIER

Abstract

MODAL LOGIC AND GAME THEORY

In this paper, I demonstrate the fruitfulness of looking at modal logic from the perspective of game theory. In particular, I show how games in strategic form can be transformed into Kripke's models for a multi-modal logic that combines the concepts of strategy profile, preference, and knowledge. The logic is sufficiently general to express solution concepts such as the best response, Nash Equilibrium, and Iterated Deletion of Strictly Dominated Strategies. Moreover, the logic allows us to derive the conditions on which these concepts are based.

Keywords: modal logic, epistemic logic, game theory, strategy profile, preference, the best response, Nash Equilibrium

Teoria gier pełna jest rozmaitych problemów lub łamigłówek, dla których proponuje się różne — często wzajemnie niezgodne — rozwiązania. Problemy te nie mają ani empirycznego, ani matematycznego charakteru. Dotyczą raczej znaczenia podstawowych pojęć teorii gier (takich jak rozwiązanie gry, wybór optymalny, pełna informacja) oraz poprawności formułowanych argumentów (np. że gdy konkurenci podejmują działania niezależnie od siebie, każdy z nich powinien stosować strategię zapewniającą osiągnięcie równowagi Nasha; że gracze powinni rozważać także sytuacje oceniane przez nich jako niemożliwe). Okazuje się, że zagadki teorii gier odwołują się do pewnych pojęć kojarzonych tradycyjnie z logiką, zwłaszcza zorientowaną filozoficznie, takich jak: wnioskowanie, wiedza, możliwość czy niemożliwość, racjonalność i powinność. Ponieważ podstawowym zadaniem logiki jest ustalenie warunków poprawności rozumowań (w tym tych, które z pewnych względów są problematyczne), wydaje się ona odpowiednim narzędziem teorii gier.

* Zakład Logiki i Metodologii Nauk, Instytut Filozofii, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, ul. Szamarzewskiego 89c, 60-568 Poznań, tworak@amu.edu.pl.

W artykule pokażę, w jaki sposób teorię gier daje się wykorzystać do interpretacji struktur relacyjnych odpowiednio wzbogaconej logiki modalnej. Tezy uzyskanej logiki powinny opisywać kontekst gry, czyli sytuację, w której się ona odbywa. Pokażę też wykorzystanie logiki modalnej do analizy gier. Można więc mówić o wzajemnym odziaływaniu między logiką a teorią gier[1].

Rozpocznę od przypomnienia niezbędnych pojęć, a następnie przedstawię teoriogrową interpretację logiki modalnej oraz zdefiniuję w ramach przyjętego formalizmu podstawowe pojęcia występujące w analizie gier.

1. TEORIA GIER

Teoria gier modeluje strategiczne zachowania uczestników pewnej sytuacji, których decyzje wzajemnie na siebie wpływają[2]. Wykorzystuje się ją w wielu dziedzinach nauki: ekonomii, politologii, socjologii, biologii, informatyce, kognitywistyce. W zasadzie teorię gier można scharakteryzować na dwa sposoby:

(1) jako formalny, uniwersalny język pozwalający na unifikację nauk behawioralnych, w szczególności jako narzędzie opisu i analizy interakcji między różnego rodzaju podmiotami w sytuacjach konfliktu i kooperacji;

(2) jako zestaw pojęć lub reguł — takich jak: racjonalny gracz, równowaga Nasha, indukcja wsteczna — za pomocą których wyjaśnia się myślenie strategiczne i przebieg gry (w szczególności przewiduje jej rozwiązanie).

Rodzaje gier wyróżnia się według kilku kryteriów. W artykule zajmę się tylko grami strategicznymi, niekooperacyjnymi i z pełną informacją[3].

---

[1] Warto przy tym przypomnieć, że istnieje już wiele prac podejmujących zagadnienie związków teorii gier z logiką modalną. Przegląd literatury dotyczącej tego tematu zawiera książka van Benthema (2014) oraz artykuł van der Hoeka i Pauly'ego (2006). Boudewijn de Bruin (2010) omawia natomiast epistemiczne aspekty gier strategicznych.

[2] Uznaje się, że początki teorii gier sięgają 1944 r., wtedy bowiem ukazała się monografia Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna *Theory of Games and Economic Behavior*. Analiz podobnych do tych stosowanych w teorii gier doszukuje się jednak już w pismach Arystotelesa, Thomasa Hobbesa, Barucha Spinozy, Niccola Machiavellego oraz Antoine'a A. Cournota.

[3] W skrócie: w grach niekooperacyjnych gracze nie mogą zawierać wiążących porozumień (poza formalnymi regułami gry), natomiast w grach z pełną informacją gracze, podejmując decyzje, znają preferencje oraz możliwe strategie wszystkich uczestników gry.

Przypomnijmy, że przez skończoną *grę strategiczną* (lub *grę w postaci normalnej*) rozumie się sytuację decyzyjną z co najmniej dwoma uczestnikami (graczami). Ma ona charakter procesu jednokrokowego, w którym wszyscy gracze jednocześnie i niezależnie od siebie wybierają swoje strategie (akcje), w wyniku których uzyskują określone rezultaty (wypłaty). Zakłada się, że gracze są racjonalni, tj. dążą do maksymalizacji wypłaty (a przynajmniej minimalizacji straty). Grę strategiczną można więc opisać jako strukturę postaci:

$$\Gamma = \langle N, \{A_i: i \in N\}, \{\leq_i: i \in N\}\rangle,$$

gdzie $N = \{1, ..., n\}$ jest niepustym i skończonym zbiorem graczy, A_i jest niepustym i skończonym zbiorem możliwych akcji (tzw. *strategii czystych*) i-tego gracza, natomiast $\leq_i$ jest relacją subiektywnej preferencji gracza i określoną na zbiorze $S = \prod_{i \in N} A_i$ profili strategii, o której zakładamy, że jest quasi-porządkiem lub zupełnym quasi-porządkiem[4]. Dla danego zbioru graczy N profil strategii $s = \langle a_1, ..., a_n\rangle$ jest więc sytuacją w grze, w której wszyscy gracze wybrali jedną ze strategii. Zwyczajowo i-ty element profilu s oznaczamy przez s_i. Zapis „$s \leq_i t$" oznacza, że i uważa strategię t za nie gorszą od s. Dowolny niepusty podzbiór G zbioru N nazywamy *grupą* lub *koalicją*. Dla dowolnej grupy G $S_G = \prod_{i \in G} A_i$ oznacza zbiór, którego elementami są podprofile strategii s_G, t_G, ... złożone z akcji wybranych przez członków grupy G. Zbiór N jest największą grupą (zwaną też *wielką koalicją*), S_N jest więc zbiorem wszystkich profili strategii, czyli $S_N = S$. Gdy $G = \{i\}$, wówczas $S_G = A_i$. Jeżeli natomiast $G = N - \{i\}$, to $S_G = S_{-i}$ jest zbiorem i-zredukowanych profili strategii, a element $s_{-i} \in S_{-i}$ jest podprofilem profilu s opisującym strategie wszystkich graczy poza i, tj. $s_{-i} = \langle a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n\rangle$[5]. Każdy profil strategii $s \in S$ możemy więc przedstawić jako parę postaci $\langle s_i, s_{-i}\rangle$.

PRZYKŁAD 1 („Walka płci"). Rozważmy grę, w której para Ewa (gracz 1) i Adam (gracz 2) zamierza wspólnie spędzić wieczór. Ona woli obejrzeć walkę bokserską (akcja b), a on nie chce przepuścić premiery w operze (akcja o). Zarówno spektakl operowy, jak i mecz zaczynają się o ósmej. Ten konflikt interesów przedstawia następująca macierz wypłat (zakładamy, że obaj gracze znają tę macierz, co oznacza, że jest to gra z pełną informacją):

---

[4] Zapis $\prod_{i \in N} A_i$ oznacza produkt kartezjański rodziny zbiorów $\{A_i: i \in N\}$. Przypomnijmy, że *quasi-porządkiem* (lub *preporządkiem*) nazywamy relację, która jest zarazem zwrotna i przechodnia w danym zbiorze. Relację, która jest dodatkowo spójna, nazywamy *zupełnym quasi-porządkiem*. Relacje bycia tak samo preferowanym $=_i$ i ostrej preferencji $<_i$ definiuje się w zwykły sposób: $x =_i y \equiv x \leq_i y \wedge y \leq_i x$, $x <_i y \equiv x \leq_i y \wedge \neg (y \leq_i x)$.

[5] Graczy ze zbioru $N - \{i\}$ nazywa się często *przeciwnikami* lub *konkurentami* gracza i.

		GRACZ 2	
		b	e
GRACZ 1	b	3, 2	0, 0
	o	0, 0	2, 3

Wiersze macierzy odpowiadają strategiom gracza 1, natomiast kolumny odpowiadają strategiom gracza 2. Profile strategii są wyrażane przez poszczególne komórki macierzy:

$$S = \{b, o\} \times \{b, o\} = \{\langle b, b\rangle, \langle b, o\rangle, \langle o, b\rangle, \langle o, o\rangle\}.$$

Każda komórka zawiera wypłatę gracza przy określonej strategii drugiego gracza (liczba pierwsza oznacza wypłatę gracza 1, a liczba druga — wypłatę gracza 2). Relacje preferencji obu graczy przedstawiają się więc następująco:

$$\langle b, o\rangle =_1 \langle o, b\rangle <_1 \langle o, o\rangle <_1 \langle b, b\rangle,$$

$$\langle b, o\rangle =_2 \langle o, b\rangle <_2 \langle b, b\rangle <_2 \langle o, o\rangle.$$

A zatem obu stronom najmniej opłaca się sytuacja, w której spędzają wieczór osobno. Zarazem jeśli skoordynują swoje strategie, to oboje osiągną wyższe wypłaty.

2. LOGIKA MODALNA

Wprawdzie korzenie logiki modalnej sięgają starożytności, ale jej postać sformalizowana powstała stosunkowo niedawno. Natomiast dobrze sprawdza się w analizach wielu problemów z różnych dziedzin. Dlatego współcześnie ma wiele odmian i modyfikacji[6]. Jej język powstaje przez rozszerzenie języka klasycznego rachunku zdań o parę sprzężonych funktorów modalnych $\Box$ i $\Diamond$. Znak $\Box$ oznacza jednoargumentowy funktor konieczności, a $\Diamond$ — jednoargumentowy funktor możliwości. Sposób ich odczytania zależy od kontekstu (lub celu). W tzw. logikach multimodalnych rozważa się indeksowane funktory konieczności i możliwości $\Box_a$ i $\Diamond_a$, gdzie a jest elementem pewnego niepustego i na ogół przeliczalnego zbioru τ. Na przykład w interpretacji epistemicznej $\Box_a$ odczytujemy „podmiot a wie, że”, natomiast $\Diamond_a$ jako „podmiot a dopuszcza możliwość, że” lub „podmiot a nie wyklucza, że”[7]. Definiując język logiki mo-

[6] Dobrą prezentację logiki modalnej zawierają np. prace: Blackburn, de Rijke, Venema (2001) oraz Blackburn, van Benthem (2006).

[7] Standardowo dla funktora wiedzy używa się litery K, w razie potrzeby z indeksem oznaczającym podmiot. Oczywiście, różne odczytania funktorów modalnych wskazują na

dalnej, najpierw ustalamy pewien zbiór zmiennych zdaniowych At, którego elementy będziemy oznaczać literami p, q, r (w razie potrzeby opatrzymy je odpowiednimi indeksami). Zbiór formuł języka $L_{\mathrm{MOD}(\tau)}$, $For(L_{\mathrm{MOD}(\tau)})$ definiujemy, używając notacji Backusa-Naura ($\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$):

$$\alpha, \beta \coloneqq p\ (\in At)\ |\ \neg\alpha\ |\ \alpha \otimes \beta\ |\ \Box_a\alpha\ (a \in \tau).$$

Funktor $\Diamond_a$ rozumiemy jako skrót definicyjny: $\Diamond_a\alpha \coloneqq \neg\Box_a\neg\alpha$. Semantyczną charakterystykę opisanego języka otrzymujemy, definiując pojęcia struktury relacyjnej i modelu. Z czysto formalnego punktu widzenia struktura relacyjna jest pewnym zbiorem z rodziną określonych na nim relacji. Do interpretacji języka $L_{\mathrm{MOD}(\tau)}$ używa się struktury relacyjnej (zwanej też *strukturą Kripkego*) postaci $F = \langle W, \{R_a \colon a \in \tau\}\rangle$, gdzie $W \neq \varnothing$ jest zbiorem światów możliwych, a $R_a \subseteq W \times W$ jest binarną relacją na W zwaną *relacją osiągalności* (lub *alternatywności*). Zbiór $R_a(w) = \{x \in W \colon wR_ax\}$ to zbiór wszystkich alternatyw dostępnych ze świata w. Struktury dla logik monomodalnych zawierają tylko jedną relację osiągalności (pomija się więc parametr). *Modelem* na strukturze F nazywamy parę $M = \langle F, V\rangle$, gdzie $V \colon At \rightarrow 2^W$ jest funkcją wartościowania wskazującą, w których światach struktury F „spełnione” są poszczególne zmienne. Relację spełniania formuły α w świecie w modelu M (symbolicznie $(M, w) \vDash \alpha$) określają następujące warunki:

$(M, w) \vDash \alpha$ wtw $w \in V(\alpha)$ dla dowolnej $\alpha \in At$,

$(M, w) \vDash \neg\alpha$ wtw $(M, w) \nvDash \alpha$,

$(M, w) \vDash \alpha \wedge \beta$ wtw $(M, w) \vDash \alpha$ i $(M, w) \vDash \beta$.

Podobnie dla pozostałych spójników ze zbioru $\otimes$:

$(M, w) \vDash \Box_a\alpha$ wtw $(M, x) \in \alpha$ dla dowolnego $x \vDash R_a(w)$.

Stałe $\top$ (*verum*) i $\bot$ (*falsum*) definiujemy w zwykły sposób: $\top \coloneqq p \rightarrow p$, $\bot \coloneqq \neg\top$. Ich warunki spełniania mają postać:

$(M, w) \vDash \bot$ nigdy,

$(M, w) \vDash \top$ zawsze.

Zbiór światów modelu M oznaczamy przez W_M (lub W, gdy model jest ustalony). Formuła α jest *spełnialna w modelu M* wtw $\|a\|_M \neq \varnothing$, gdzie $\|a\|_M = \{w \in W_M \colon (M, w) \vDash \alpha\}$[8]. Formuła α jest *spełnialna* wtw istnieje model, w któ-

istnienie wielu logik modalnych, w których funktorom tym przypisuje się różne własności. Tak będzie w omawianym wypadku.

[8] Światy tworzące zbiór $\|\alpha\|_M$ nazywamy α-światami.

rym jest ona spełnialna. Formuła α jest *prawdziwa w modelu M* (symbolicznie $M \vDash \alpha$) wtw $\|\alpha\|_M = W$. Formuła α jest *prawdziwa w strukturze F* (symbolicznie $F \vDash \alpha$) wtw jest prawdziwa w każdym modelu zbudowanym na strukturze F (tj. wtw jest prawdziwa przy dowolnym wartościowaniu V). Strukturom relacyjnym można w naturalny sposób przypisywać pewne własności: struktura ma daną własność, jeśli jej relacja dostępności ma ową własność. Zależnie od tego, jakie własności przypisuje się strukturom, otrzymujemy semantyki dla różnych systemów logiki modalnej. Formuła α jest *prawdziwa w klasie struktur* $\mathcal{K}$ (symbolicznie $\mathcal{K} \vDash \alpha$ lub $\vDash_{\mathcal{K}} \alpha$) wtw jest prawdziwa w każdej strukturze $F \in \mathcal{K}$. Na przykład logika **S5** jest wyznaczana przez klasę struktur z relacją osiągalności będącą równoważnością (zwrotną, symetryczną i przechodnią), natomiast logika **S4** przez klasę struktur z relacją osiągalności będącą quasi-porządkiem (zwrotną i przechodnią).

3. TEORIOGROWA INTERPRETACJA LOGIKI MODALNEJ

Przedstawioną wyżej strukturę Γ można łatwo przekształcić w model dla pewnej logiki multimodalnej[9].

DEFINICJA 1. *Strukturą Kripkego dla gry Γ* nazywamy wielopodmiotową strukturę postaci:

$$F_\Gamma = \langle W, N, R, \{\sigma_G : \varnothing \neq G \subseteq N\}, \{\sim_i : i \in N\}, \{\leq_i : i \in N\}\rangle,$$

w której:

— W jest zbiorem możliwych światów (lub stanów świata),
— N jest zbiorem graczy,
— $R \subseteq W \times W$ jest relacją równoważności (można też przyjąć, że jest relacją totalną),
— $\sigma_G : W \to S_G$ jest funkcją strategii grupy G przypisującą każdemu światu pewną unikalną sytuację w grze reprezentowaną przez podprofil złożony z akcji wybranych przez członków grupy G, spełniającą następujące dwa warunki[10]:
(W1) $\sigma_G(w) = s_G$ wtw $\sigma_i(w) = s_i$ dla każdego $i \in G$,

[9] Przedstawiona tu semantyka inspirowana jest ujęciem zaproponowanym np. przez van Benthema 2014: 276-278; por. van Benthem, Liu 2007, Lorini, Schwarzentruber, Herzig 2009.

[10] Aby uprościć symbolikę, piszemy $\sigma_i(w)$ zamiast $\sigma_{\{i\}}(w)$ oraz $\sigma(w)$ zamiast $\sigma_N(w)$. Oczywiście, $\sigma_i(w) \in A_i$. $[w]_R = \{x: wRx\}$ oznacza klasę abstrakcji relacji R wyznaczoną przez element w.

(W2) jeżeli dla każdego $i \in N$ istnieje $x \in [w]_R$ taki, że $\sigma_i(x) = s_i$, to istnieje też $y \in [w]_R$ taki, że $\sigma(y) = s$,

— $\sim_i \subseteq W \times W$ jest relacją równoważności reprezentującą niewiedzę (niepewność) podmiotu i dotyczącą aktualnego stanu świata, spełniającą następujące dwa warunki:
(W3) dla dowolnych $x, y \in W$, jeżeli $x \sim_i y$, to $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$,
(W4) $\sim_i \subseteq R$;

— $\leq_i \subseteq W \times W$ jest quasi-porządkiem (zwanym relacją preferencji) takim, że:
(W5) $\leq_i \subseteq R$
(W6) dla dowolnych $w, x, y \in W$, jeżeli wRx i wRy, to $x \leq_i y$ lub $y \leq_i x$.

Struktura F_Γ powstaje ze struktury Kripkego dla logik modalnych przez dodanie funkcji σ_G, które z każdym światem $w \in W$ kojarzą pewien podprofil strategii $\sigma_G(w) \in S_G$, złożony z akcji wybranych przez członków grupy G w świecie w. Z jednej strony światy tworzące zbiór W reprezentują możliwe sytuacje w grze, z drugiej zaś opisują specyficzne informacje mające wpływ na podejmowane przez graczy decyzje (mogą one być różne w poszczególnych światach). Elementy zbioru W są więc „bogatsze" niż elementy zbioru S możliwych profili strategii danej gry. Relację R nazywamy *relacją alternatywności*. Jeżeli wRv, to z w i v skojarzone są alternatywne profile strategii jednej gry. Tak więc klasie $[w]_R$ dla pewnego w odpowiada pewna gra. Na mocy warunku (W1) grupa G w świecie w gra s_G wtw każdy członek $i \in G$ wybiera w w akcję s_i. Nawiązując do gry z Przykładu 1, niech $G = N = \{1, 2\}$ oraz $\sigma_G(w_2) = \langle b, o\rangle$. Mamy wtedy: G w świecie w_2 gra $\langle b, o\rangle$, jeśli w świecie tym 1 wybiera b, natomiast 2 wybiera o. Jeżeli istnieje $x \in [w]_R$ taki, że $\sigma_G(x) = s_G$ (czyli G gra s_G w x), to mówimy, że s_G jest możliwy z perspektywy świata w. Zgodnie z warunkiem (W2), jeżeli z perspektywy jakiegoś świata w wszystkie indywidualne strategie składające się na dany profil strategii są możliwe do zrealizowania, to z tej samej perspektywy ich wspólne wystąpienie też jest możliwe.

Podział wyznaczony przez relację $\sim_i$ reprezentuje *twardą informację*: $w \sim_i v$ wtw podmiot i wie to samo w światach w i v. Dla danego $w \in W$ zbiór $[w]_i = \{x: x \sim_i w\}$ nazywamy *stanem informacyjnym* gracza i. Jeżeli $\sigma_G(w) = \sigma_G(v)$, to światy w i v są nieodróżnialne z uwagi na decyzje (wybory akcji) graczy tworzących grupę G, chociaż poszczególni jej członkowie mogą mieć w nich różne informacje. Warunek (W3) stanowi, że jeżeli jakieś dwa światy są elementami tego samego stanu informacyjnego gracza i, to nie różnią się one zagrywanymi przez i akcjami. Z uwagi na to gracze są nieomylni co do wybranych przez siebie akcji, tzn. jeżeli gracz i wybiera akcję a_i w danym świecie, to wie on, że tak zrobił (nie zna natomiast wyborów akcji pozostałych graczy)[11]. Jest to standardowe założenie w epistemicznej analizie gier. Warunek (W4) stanowi natomiast, że jeżeli jakaś sytuacja w grze jest epistemicznie możliwa (gracz jej nie wyklucza), to może ona zajść. Z uwagi na ten warunek rozważane gry są grami z pełną informacją. Uchylając ten warunek, dopuszczamy możliwość analizy gier z niepełną informacją, w których gracze nie dysponują wiedzą o wszystkich aspektach gry (np. nie znają strategii, które mogą podjąć przeciwnicy, nie znają preferencji przeciwników).

Relacja preferencji porządkuje możliwe światy, a tym samym porządkuje możliwe sytuacje w grze. Na mocy warunku (W5) światy połączone relacją preferencji są możliwe, tj. korespondują z alternatywnymi profilami strategii danej gry. Z kolei na mocy warunku (W6) relacja preferencji każdego gracza jest zupełna w zbiorze światów tworzących klasę abstrakcji relacji R (światy porównuje się ze względu na korespondujące z nimi profile strategii).

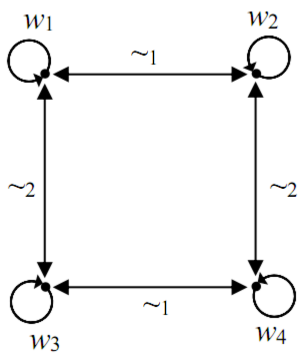
DYGRESJA 1. Strukturę F_Γ odpowiadającą grom z pełną informacją można uprościć, jeżeli przyjmie się, że R jest relacją totalną, i ją opuści. Zakładając, że R jest równoważnością, chcemy, aby przedstawiona struktura była „otwarta" na gry z niepełną informacją. Pewien matematyczny opis gier z niepełną informacją zaproponował Harsanyi (1967-1968), wprowadzając pojęcie *typu gracza*. Weźmy pod uwagę następujący wariant gry z Przykładu 1: podczas gdy żona (gracz 1) zna preferencje męża (gracz 2), mąż nie wie, czy żona chce z nim spędzić czas (nie zna jej preferencji, co sprawia, że jest to gra z niepełną informacją). Opisując tę sytuację, można powiedzieć, że gracz 2 występuje tylko w jednym typie, który jest znany obu graczom, natomiast gracz 1 może występować w jednym z dwóch typów, powiedzmy *love* lub *hate*, i tylko gracz 1 wie, który z nich jest aktualny. Oznacza to, że gracz 2 może rozważać dwie alternatywne gry różniące się relacją preferencji gracza 1 (preferencje gracza 1 zależą bowiem od typu, w jakim występuje). Przenosząc to na przyjęty formalizm, trzeba zrezygnować z wymagania, by struktura F_Γ odpowiadała tylko jednej grze strategicznej.

PRZYKŁAD 1 cd. Niech $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ będzie klasą abstrakcji relacji R reprezentującą grę z Przykładu 1 taką, że tworzące ją światy korespondują z alternatywnymi profilami strategii: $\sigma(w_1) = \langle b, b\rangle$, $\sigma(w_2) = \langle b, o\rangle$, $\sigma(w_3) = \langle o, b\rangle$, $\sigma(w_4)$

[11] W literaturze poświęconej teorii gier rozróżnia się trzy etapy procesów decyzyjnych ze względu na posiadane przez graczy informacje o decyzjach własnych i pozostałych graczy: *ex ante*, *ex interim* i *ex post*. *Ex ante* to etap, w którym nie została jeszcze podjęta żadna decyzja. *Ex post* to etap, w którym ujawnione (znane) są decyzje wszystkich graczy. *Ex interim* to etap pośredni, w którym gracze znają tylko własne wybory. Z uwagi na warunek (W3) przedstawiona struktura modeluje grę na etapie *ex interim*.

= ⟨o, o⟩. Łatwo zauważyć, że: $\sigma_1(w_1) = \sigma_1(w_2) = b$, $\sigma_1(w_3) = \sigma_1(w_4) = o$, $\sigma_2(w_1) = \sigma_2(w_3) = b$, $\sigma_2(w_2) = \sigma_4(w_4) = o$.

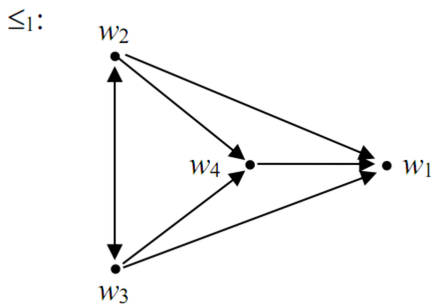
Relacje $\sim_1$ i $\sim_2$ przedstawia następujący diagram (światom odpowiadają węzły):

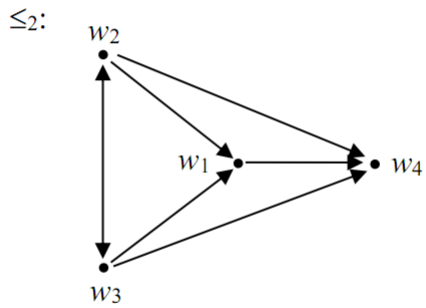


$[w_1]_1 = [w_2]_1 = \{w_1, w_2\}$, $[w_3]_1 = [w_4]_1 = \{w_3, w_4\}$

$[w_1]_2 = [w_3]_2 = \{w_1, w_3\}$, $[w_2]_2 = [w_4]_2 = \{w_2, w_4\}$.

Ponieważ $w_2 \in [w_1]_1$, więc $\sigma_1(w_2) = \sigma_1(w_1)$. Podobnie, skoro $w_3 \in [w_1]_2$, to $\sigma_2(w_3) = \sigma_2(w_1)$. Relacje $\leq_1$ i $\leq_2$ przedstawiają następujące diagramy (pominięte w nich zostały pętelki na każdym punkcie; jeżeli $x \leq_i y$, to $x \to y$):





Strukturę F_Γ wiążemy z językiem logiki modalnej, określając funkcję wartościowania i relację spełniania.

DEFINICJA 2. Modelem na strukturze F_Γ jest para $M = \langle F_\Gamma, V\rangle$, gdzie V: $At \to 2^W$ jest funkcją wartościowania wskazującą, w których światach struktury F_Γ „spełnione” są poszczególne formuły atomowe.

Przed podaniem definicji spełniania musimy dokładniej opisać język dla struktury F_Γ; oznaczamy go przez L_Γ. Budujemy go z języka klasycznego rachunku zdań, dodając funktory modalne. Niech At będzie zbiorem formuł atomowych, A_i będzie zbiorem nazw strategii (akcji) podmiotu i oraz $A_G = \prod_{i \in G} A_i$[12]. Zbiór formuł języka L_Γ, $For(L_\Gamma)$, definiujemy następująco ($\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$):

$$\alpha, \beta \coloneqq p\ (\in At) \mid \neg\alpha \mid \alpha \otimes \beta \mid \Box\alpha \mid K_i\alpha\ (i \in N) \mid C_G\alpha\ (\varnothing \neq G \subseteq N) \mid [pref]_i\alpha\ (i \in N) \mid [s_G]\alpha\ (s_G \in S_G)$$[13].

Funktor $\Box$ jest funktorem konieczności aletycznej. Wyrażenie $\Box\alpha$ odczytujemy: „jest konieczne, że α". Dualny do niego funktor możliwości aletycznej $\Diamond$ definiujemy w zwykły sposób: $\Diamond\alpha \coloneqq \neg\Box\neg\alpha$.

Funktory K_i i C_G są interpretowane epistemicznie. Funktor K_i dotyczy wiedzy indywidualnej podmiotu i. Wyrażenie $K_i\alpha$ odczytujemy: „podmiot i wie, że zachodzi stan opisany przez α". Funktorem dualnym do K_i jest M_i, który rozumiemy jako skrót definicyjny: $M_i\alpha \coloneqq \neg K_i \neg\alpha$. Wyrażenie $M_i\, \alpha$ możemy odczytywać: „w świetle tego, co wie podmiot i, nie jest wykluczone, że α". Niech $E_G\alpha \coloneqq \wedge_{i \in G} K_i\alpha$. Funktor E_G dotyczy wiedzy grupowej i odpowiada wyrażeniu „każdy z osobna w grupie G wie, że". Wiedzy grupowej dotyczy również funktor C_G, który odpowiada wyrażeniu „jest wspólną wiedzą grupy G" lub „wszyscy razem w grupie G wiedzą, że". Intuicyjnie, α jest wspólną wiedzą grupy, gdy:

— każdy członek grupy wie, że α,
— każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy wie, że α,
— każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy wie, że każdy członek grupy wie, że α,
i tak ad infinitum.

Funktor C_G możemy zdefiniować, korzystając z funktora E_G : $C\alpha \coloneqq \alpha \wedge E_G\alpha \wedge E_GE_G\alpha \wedge E_GE_GE_G\alpha \wedge \ldots$ [14]. Gdy $G = N$ (wszystkie podmioty tworzą grupę), będziemy wówczas pisać $C\alpha$ zamiast $C_N\alpha$.

Wyrażenie $[pref]_i\alpha$ będziemy odczytywać: „stan opisany przez α zachodzi we wszystkich światach, które według podmiotu i są co najmniej tak dobre jak świat aktualny (ze względu na rozgrywane w nich profile strategii)". Funktorem dualnym do $[pref]_i$ jest $\langle pref\rangle_i$, który rozumiemy jako skrót definicyjny: $\langle pref\rangle_i\alpha \coloneqq \neg[pref]_i \neg\alpha$. Wyrażenie $\langle pref\rangle_i\alpha$ odczytujemy: „stan opisany przez α

[12] Aby nie komplikować symboliki, strategie i ich nazwy oznaczamy tymi samymi symbolami. Kontekst będzie rozstrzygał, czy dany symbol reprezentuje strategię czy jej nazwę.

[13] W szczególnym wypadku mamy $[a_i]\alpha$, gdzie a_i jest nazwą określonej strategii (akcji) podmiotu i.

[14] Definicja ta wymaga jednak jakieś logiki infinitarnej, tj. dopuszczającej formuły o nieskończonej długości. W logice finitarnej funktor C_G trzeba scharakteryzować aksjomatycznie jako operator punktu stałego.

zachodzi w przynajmniej jednym świecie, który według podmiotu i jest co najmniej tak dobry jak świat aktualny (ze względu na rozgrywany w nim profil strategii)".

I wreszcie wyrażenie $[s_G]\alpha$ będziemy odczytywać: „wybór s_G dokonany przez grupę G prowadzi do tego, że α (jeżeli grupa G gra s_G, to zachodzi stan opisany przez α)". Funktorem dualnym do $[s_G]$ jest $\langle s_G\rangle$ definiowany jako $\langle s_G\rangle\alpha \coloneqq \neg[s_G]\neg\alpha$. Wyrażenie $\langle s_G\rangle\alpha$ odczytujemy: „grupa G gra s_G i zarazem zachodzi stan opisany przez α". W szczególności wyrażenie $\langle s_G\rangle\top$ oznacza, że grupa G gra s_G, natomiast wyrażenie $[s_G]\bot$ oznacza, że grupa G nie gra s_G. Wyrażenie $\Diamond\langle s_G\rangle\top$ interpretujemy jako zdanie stwierdzające, że grupa G może zagrać s_G. W szczególności $\Diamond\langle a_i\rangle\top$ oznacza, że gracz i może wybrać akcję a_i, natomiast $\Diamond\langle s\rangle\top$ oznacza, że s jest jednym z profili strategii aktualnej gry (tzn. takim, który może być zagrany).

Warunki określające relację spełniania dla formuł niemodalnych są standardowe. Natomiast dla formuł modalnych przyjmują one następującą postać:

1. $(M, w) \vDash \Box\alpha$ wtw $(M, x) \vDash \alpha$, dla dowolnego x takiego, że wRx (czyli $[w]_R \subseteq \|\alpha\|_M$),
2. $(M, w) \vDash K_i\alpha$ wtw $(M, x) \vDash \alpha$, dla dowolnego x takiego, że $w \sim_i x$ (czyli $[w]_i \subseteq \|\alpha\|_M$),
3. $(M, w) \vDash E_G\alpha$ wtw $(M, x) \vDash \alpha$, dla dowolnego x takiego, że $w \sim^+_G x$, gdzie $\sim^+_G = \bigcup\{\sim_i : i \in G\}$, (czyli $\{x \in W: w \sim^+_G x\} \subseteq \|\alpha\|_M$),
4. $(M, w) \vDash C_G\alpha$ wtw $(M, x) \vDash \alpha$ dla dowolnego x takiego, że $w \sim^*_G x$, gdzie $\sim^*_G$ jest przechodnim i zwrotnym domknięciem relacji $\sim^+_G$ (czyli $\{x \in W: w \sim^*_G x\} \subseteq \|\alpha\|_M$)[15],
5. $(M, w) \vDash [pref]_i\,\alpha$ wtw $(M, x) \vDash \alpha$ dla dowolnego x takiego, że $w \leq_i x$ (czyli $\{x \in W: w \leq_i x\} \subseteq \|\alpha\|_M$),
6. $(M, w) \vDash [s_G]\alpha$ wtw jeżeli $\sigma_G(w) = s_G$, to $(M, w) \vDash \alpha$[16].

Pojęcia spełnialności oraz prawdziwości definiuje się w zwykły sposób.

[15] Inaczej mówiąc, $\sim^*_G$ wiąże świat x z danym światem w (symbolicznie $w \sim^*_G x$), gdy świat x daje się połączyć ze światem w za pomocą skończonej ścieżki złożonej z par światów należących do $\sim_i$ dla dowolnego $i \in G$. Oznacza to, że wiedza wspólna jest własnością grupy definiowalną na podstawie wiedzy jej poszczególnych członków.

[16] Van Benthem (2014: 277) używa jeszcze modalności dla swobody wyboru (*action freedom*): $[free_i]\alpha$. Odpowiada ona relacji $\approx_i$, określonej warunkiem: $s \approx_i t$ wtw $s_{-i} = t_{-i}$.

PRZYKŁAD 1 cd. Łatwo sprawdzić, że w w_1 zachodzą m.in. następujące fakty:

$(M, w_1) \models K_1\langle b_1\rangle\top$, ponieważ dla każdego $x \in [w_1]_1$, $\sigma_1(x) = b_1$.

$(M, w_1) \models K_1[o_1]\bot$, ponieważ dla każdego $x \in [w_1]_1$, $\sigma_1(x) \neq o_1$.

$(M, w_1) \models \neg K_1\langle b_2\rangle\top$, ponieważ istnieje $x \in [w_1]_1$ taki, że $\sigma_2(x) \neq b_2$ (a mianowicie w_2).

$(M, w_1) \models K_1\Diamond\langle b_2\rangle\top$, ponieważ dla każdego $x \in [w_1]_1$ istnieje $y \in [x]_R$ taki, że $\sigma_2(x) = b_2$ (a mianowicie w_1 i w_3).

$(M, w_1) \models K_1\neg K_2\langle b_1\rangle\top$, ponieważ dla każdego $x \in [w_1]_1$ istnieje $y \in [x]_2$ taki, że $\sigma_1(x) \neq b_1$ ($[w_1]_1 = \{w_1, w_2\}$; gdy $x = w_1$, to $y = w_3$, a gdy $x = w_2$, to $y = w_4$).

$(M, w_1) \models \langle pref\rangle_2\langle\langle o_1, o_2\rangle\rangle\top$, ponieważ istnieje x taki, że $w_1 \leq_2 x$ oraz $\sigma(x) = \langle o_1, o_2\rangle$ (a mianowicie w_4).

$(M, w_1) \models K_1\langle pref\rangle_2\langle\langle o_1, o_2\rangle\rangle\top$, ponieważ dla każdego $x \in [w_1]_1$ istnieje y taki, że $x \leq_2 y$ oraz $\sigma(y) = \langle o_1, o_2\rangle$ (a mianowicie w_4).

Ponieważ relacje R i $\sim_i$ są równoważnościami, więc zasadami charakteryzującymi funktory $\Box$ i K_j są prawa systemu **S5**. Funktor C_G jest charakteryzowany przez:

K.	$C_G(\alpha \to \beta) \to (C_G\alpha \to C_G\beta)$	
T.	$C_G\alpha \to \alpha$	
FP.	$C_G\alpha \to E_G(\alpha \wedge C_G\alpha)$	(aksjomat punktu stałego)
C-Ind.	$C_G(\alpha \to E_G\alpha) \to (\alpha \to C_G\alpha)$	(zasada indukcji)
RN.	Jeżeli $\vdash \alpha$, to $\vdash C_G\alpha$.	

Funktor $[pref]_i$ charakteryzują natomiast prawa systemu **S4**.

Przyjęta charakterystyka struktury F_Γ gwarantuje, że prawdziwe w niej są między innymi następujące twierdzenia, opisujące w sposób formalny sytuacje strategiczne:

T1. $[s_G]\alpha \equiv (\langle s_G\rangle\top \to \alpha)$

Na mocy tego twierdzenia wyrażenie $[a_G]\alpha$ oznacza, że jeżeli grupa G gra s_G, to α zachodzi[17]. Żeby tego dowieść, wystarczy zauważyć, że dla dowolnego

[17] Zaproponowany sposób odczytania wyrażeń postaci $[a_G]\alpha$ może sugerować zachodzenie relacji sprawczości: stan rzeczy opisywany przez α jest rezultatem tego, że członkowie grupy G wybrali akcje tworzące s_G. Sugestia ta jest nietrafna, ponieważ implikacja materialna występująca po prawej stronie T1 nie niesie takiej treści. Fakt niewybrania s_G nie uchyla prawdziwości $[s_G]\alpha$.

świata w $(M, w) \vDash \langle s_G \rangle \top$ wtw $\sigma_G(w) = s_G$. Podstawiając za α stałą $\bot$, otrzymujemy $[s_G]\bot \equiv \neg\langle s_G \rangle \top$.

T2. $\bigvee_{s_G \in S_G} \langle s_G \rangle \top$ (dopełnianie)

T3. $\langle s_G \rangle \top \to [t_G]\bot$, jeśli $s_G \neq t_G$ (wykluczanie)

Twierdzenia 2 i 3 łącznie głoszą, że grupa zawsze gra tylko jeden podprofil[18]. Żeby tego dowieść, wystarczy zauważyć, że funkcja strategii σ_G przyporządkowuje każdemu światu dokładnie jeden podprofil s_G, oraz skorzystać z odpowiednich warunków opisujących relację spełniania.

T4. $\langle s_G \rangle \top \equiv \bigwedge_{i \in G} \langle s_i \rangle \top$ na mocy warunku (W1)

T5. $(\bigwedge_{i \in N} \Diamond\langle s_i \rangle \top) \to \Diamond\langle s \rangle \top$ na mocy warunku (W2)

T6. $\langle a_i \rangle \top \to K_i\langle s_i \rangle \top$ dla dowolnego $i \in N$ na mocy warunku (W3)

T7. $[a_i]\bot \to K_i[a_i]\bot$ dla dowolnego $i \in N$ na mocy warunku (W3)

Twierdzenia 6 i 7 stanowią, że gracze są nieomylni w kwestii własnych wyborów. Jest to standardowe założenie w epistemicznej analizie gier. Z uwagi na aksjomat niezawodności wiedzy implikacje te można wzmocnić do równoważności.

T8. $\Box\alpha \to K_i\alpha$ dla dowolnego $i \in N$ na mocy warunku (W4)

Korzystając z tego twierdzenia, aksjomatu **5** dla funktora $\Box$ oraz definicji funktora $\Diamond$, otrzymujemy:

T9. $\Diamond\langle a_j \rangle \top \to K_i\Diamond\langle a_j \rangle \top$ dla dowolnych $i, j \in N$ (niekoniecznie różnych)

Oznacza to, że każdy gracz zna możliwe strategie wszystkich uczestników gry, co charakteryzuje gry z pełną informacją.

T10. $\Box\alpha \to [pref]_i\alpha$ dla dowolnego $i \in N$ na mocy warunku (W5)

T11. $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \to \Diamond(\langle pref \rangle_i\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\langle pref \rangle_i\beta \wedge \alpha)$ na mocy warunku (W6)

Jednoargumentowy funktor preferencji jest mało intuicyjny. Zdania preferencyjne mają zwykle charakter porównawczy: i przedkłada α nad β. Zdefiniujmy więc jeszcze dwuargumentowy funktor preferencji $\precsim_i$, który zostanie następnie użyty w definicjach najlepszej odpowiedzi i równowagi Nasha. Wyrażenie $\alpha \precsim_i \beta$ możemy odczytywać: „stan opisywany przez α jest według i co najmniej tak dobry jak stan opisywany przez β”.

---

[18] W szczególnym przypadku mamy, że podmiot (gracz) zawsze wybiera tylko jedną akcję.

DEFINICJA 3. $\alpha \precsim_i \beta := \Box(\alpha \to \langle pref \rangle_i\, \beta)$.

$\alpha \prec_i \beta := \alpha \precsim_i \beta \land \neg(\beta \precsim_i \alpha)$.

Warunek spełniania formuły $\alpha \precsim_i \beta$ w świecie w danego modelu przyjmuje następującą postać:

$(M, w) \vDash \alpha \precsim_i \beta$

wtw dla każdego $x \in [w]_R$, jeżeli $(M, x) \vDash \alpha$, to istnieje y taki, że $x \leq_i y$ i $(M, y) \vDash \beta$,

wtw dla każdego $x \in [w]_R$ istnieje y taki, że jeżeli $(M, x) \vDash \alpha$, to $x \leq_i y$ i $(M, y) \vDash \beta$.

Oznacza to, że α jest według i co najmniej tak dobry jak β wtw dla każdego świata x alternatywnego do świata aktualnego w i potwierdzającego α istnieje świat y potwierdzający β, który jest według i co najmniej tak dobry jak x (przypomnijmy, że światy alternatywne korespondują z określonymi profilami strategii jednej gry)[19]. Relacja preferencji opisywana przez operator $\precsim_i$ jest zupełnym quasi-porządkiem (zwrotna, przechodnia i spójna). Dla dowolnych profili strategii s i t wyrażenie $s \precsim_i t$ rozumiemy jako skrót definicyjny:

DEFINICJA 4. $s \precsim_i t := \langle s \rangle \top \precsim_i \langle t \rangle \top$.

$s \prec_i t := s \precsim_i t \land \neg(t \precsim_i s)$.

Korzystając z definicji funktora $\precsim_i$, aksjomatu **4** dla funktora $\Box$ oraz twierdzenia T8, uzyskujemy:

T12. $s \precsim_j t \to K_j(s \precsim_j t)$ dla dowolnych $i, j \in N$ (niekoniecznie różnych).

Oznacza to, że każdy gracz zna preferencje wszystkich uczestników gry, co jest właściwe grze z pełną informacją. Ze względu na niezawodność wiedzy implikację tę można wzmocnić do równoważności.

4. RÓWNOWAGA NASHA

W teorii gier decydująca rola przypada pojęciu *równowagi Nasha*. Przypomnijmy, że równowaga Nasha to taki profil strategii, w którym każda stra-

[19] Jednym z pierwszych, którzy zajęli się problematyką logiki zdań preferencyjnych, był Georg von Wright (1963). Dwuargumentowy funktor preferencji określony w ten sposób klasyfikowany jest jako funktor typu $\forall\exists$ (van Benthem, Girard, Roy 2009, van Benthem 2014: 53-56).

tegia gracza jest *najlepszą odpowiedzią* na strategie zastosowane przez pozostałych graczy. Strategia s_i gracza i jest najlepszą odpowiedzią na wybór strategii innych graczy s_{-i} w sytuacji s, jeśli jest ona przynajmniej tak dobra jak jakakolwiek inna dostępna mu strategia zagrana przeciwko układowi s_{-i}, czyli i nie może poprawić swego wyniku przez jednostronną zmianę wybranej strategii (dla danego układu s_{-i} najlepszych odpowiedzi może być więcej niż jedna)[20]. W grze z Przykładu 1 występowały dwie równowagi Nasha. Były to pary strategii: $\langle b, b\rangle$ i $\langle o, o\rangle$. Gdy gracz 2 wybierze b, to najlepszą odpowiedzią gracza 1 będzie b, natomiast gdy gracz 2 wybierze o, to najlepszą odpowiedzią gracza 1 będzie o. Podobnie dla gracza 2. Niektóre gry mają tylko jedną równowagę Nasha, np. słynny „dylemat więźnia" (*Prisoner*'s *Dilemma*), inne nie mają żadnej równowagi Nasha, np. gra „orzeł i reszka" (*Matching Pennies*), w której gracze, mając sprzeczne interesy, mogą tylko wygrać lub przegrać[21].

Pojęcia najlepszej odpowiedzi i równowagi Nasha możemy wyrazić za pomocą przyjętych już symboli. Niech wyrażenie $Best(a_i, s_{-i})$ oznacza, że akcja a_i gracza i jest najlepszą odpowiedzią na wybór pozostałych graczy s_{-i}, natomiast $Nash(s)$ — że profil strategii s jest równowagą Nasha.

DEFINICJA 5. $Best(a_i, s_{-i}) \coloneqq \bigwedge_{b_i \in A_i}(\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle)$[22].

$$Nash(s) \coloneqq \bigwedge_{i \in N} Best(s_i, s_{-i}).$$

Na mocy podanych definicji otrzymujemy:

$(M, w) \vDash Best(a_i, s_{-i})$

wtw $(M, w) \vDash \langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle$ dla dowolnego $b_i \in A_i$,

wtw dla każdego $x \in [w]_R$ istnieje y taki, że jeżeli $\sigma(x) = \langle b_i, s_{-i}\rangle$, to $x \leq_i y$ i $\sigma(y) = \langle a_i, s_{-i}\rangle$,

$(M, w) \vDash Nash(s)$ wtw $(M, w) \vDash Best(s_i, s_{-i})$ dla dowolnego $i \in N$.

[20] Przytoczmy formalne definicje tych pojęć w klasycznej teorii gier. Profil strategii s^* nazywamy *równowagą Nasha* wtw dla każdego gracza $i \in G$ zachodzi następująca zależność: $\langle a_i, s^*_{-i}\rangle \leq_i \langle s^*_i, s^*_{-i}\rangle$ dla dowolnego $a_i \in A_i$. Niech $B_i(s_{-i})$ oznacza zbiór najlepszych odpowiedzi gracza i na podprofil s_{-i}. Wtedy $B_i(s_{-i}) = \{a_i \in A_i\colon \langle a'_i, s_{-i}\rangle \leq_i \langle a_i, s_{-i}\rangle$ dla dowolnego $a'_i \in A_i\}$. Tak więc równowaga Nasha jest profilem strategii s^* takim, że dla wszystkich $i \in G$ zachodzi $s^*_i \in B_i(s^*_{-i})$ (Osborne, Rubinstein 1994: 14-15).

[21] Jeśli rozszerzymy pojęcia najlepszej odpowiedzi i równowagi Nasha na strategie mieszane, to otrzymamy twierdzenie, zgodnie z którym każda gra skończona (ze skończonym zbiorem graczy i skończonymi zbiorami strategii) ma co najmniej jedną równowagę Nasha (w strategiach czystych lub mieszanych).

[22] Pojęcie to odpowiada pojęciu *relatywnej najlepszej odpowiedzi* van Benthema (2014: 284). Wprowadzone jednak zostało za pośrednictwem definicji, a nie jako stała zdaniowa (por. Lorini, Schwarzentruber, Herzig 2009).

W teorii gier standardowo zakłada się racjonalność graczy. Racjonalność badana w teorii gier jest racjonalnością *praktyczną* (dotyczy działań) i *instrumentalną* (skupia się na realizacji obranego celu). Uważa się, że gracz jest racjonalny, jeśli na podstawie formułowanych przez siebie przypuszczeń dotyczących zachowań innych graczy wybiera strategię maksymalizującą oczekiwaną wypłatę. Możemy to doprecyzować następująco: gracz jest racjonalny w świecie w, jeśli wybiera akcję $\sigma_i(w)$ stanowiącą najlepszą odpowiedź ze względu na układ akcji innych graczy s_{-i} rozważany przez niego jako możliwy ($s_{-i} = \sigma_{-i}(x)$ dla pewnego $x \in [w]_i$). W przeciwnym wypadku jest on irracjonalny. Niech Rat_i będzie skrótem definicyjnym zdania, że podmiot (gracz) i jest racjonalny, natomiast Rat_G skrótem zdania, że wszyscy gracze w grupie G są racjonalni.

DEFINICJA 6. $Rat_i := \bigwedge_{a_i, b_i \in A_i}[\langle a_i\rangle\top \rightarrow \bigvee_{s \in S} (M_i\langle s_{-i}\rangle\top \wedge K_i(\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle))]$[23].

$Rat_G := \bigwedge_{i \in G} Rat_i$.

Oczywiście, $(M, w) \models Rat_G$ wtw $(M, w) \models Rat_i$ dla każdego $i \in G$. Gdy $G = N$, piszemy Rat zamiast Rat_N. Kolejne twierdzenie głosi, że jeżeli wszyscy gracze są racjonalni oraz znają wybory przeciwników, to zagrywanym profilem strategii jest profil będący równowagą Nasha (por. Stalnaker 1994/1997: Twierdzenie 2, Aumann, Brandenburger 1995: Twierdzenie 6.1, Osborne, Rubinstein 1994: 77).

T13. $\models Rat \rightarrow (\bigwedge_{i \in N} K_i\langle s_{-i}\rangle\top \rightarrow Nash(s))$ dla każdego profilu strategii $s \in A$.

Dowód. Stosujemy standardową procedurę. Rozważmy więc dowolny model M ufundowany na strukturze F_Γ oraz dowolny świat w modelu M takie, że:

(i) $(M, w) \models Rat_i$ dla każdego $i \in N$,

(ii) $(M, w) \models K_i\langle s_{-i}\rangle\top$ dla każdego $i \in N$.

Musimy pokazać, że:

(iii) $(M, w) \models Nash(s)$, czyli $(M, w) \models Best(s_i, s_{-i})$ dla wszystkich $i \in N$.

Niech $i \in N$ będzie dowolnym, ale ustalonym graczem. W świetle Definicji 5 musimy więc pokazać, że:

(iv) $(M, w) \models \bigwedge_{b_i \in A_i}(\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle s_i, s_{-i}\rangle)$.

[23] Ponieważ formuły $s \precsim_i t$ oraz $K_i(s \precsim_i t)$ są równoważne, definicję racjonalności gracza i można uprościć: $Rat_i : \bigwedge_{a_i, b_i \in A_i} [\langle a_i\rangle\top \rightarrow \bigvee_{s \in S}(M_i \langle s_{-i}\rangle\top \wedge (\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle))]$ (por. Lorini, Schwarzentruber, Herzig 2009).

Rozważmy $j \neq i$. Na mocy założenia (ii) $(M, w) \vDash K_j\langle s_{-j}\rangle\top$, natomiast ze względu na niezawodność wiedzy $(M, w) \vDash \langle s_i\rangle\top$[24]. Z założenia (i) oraz Definicji 6 otrzymujemy wniosek, że dla dowolnego $b_i \in A_i$ istnieje profil $t \in S$ taki, że:

$$(M, w) \vDash M_i\langle t_{-i}\rangle\top \wedge \langle b_i, t_{-i}\rangle \precsim_i \langle s_i, t_{-i}\rangle.$$

Ponieważ $K_i\langle s_{-i}\rangle\top$, więc $t_{-i} = s_{-i}$. W rezultacie dostajemy (iv). ■

Metodą znajdowania rozwiązania w grach strategicznych jest procedura zwana *iterowaną eliminacją strategii ściśle zdominowanych* (por. Osborne, Rubinstein 1994: 58-62, Watson 2011: 81-84). W procedurze tej można doprowadzić do jednoelementowych zbiorów strategii, eliminując strategie ściśle zdominowane — gry takie mają jeden punkt równowagi, który można znaleźć efektywnie. Można też wskazać argumentację skłaniającą graczy do przyjęcia tworzących go strategii[25]. Niech Γ będzie grą strategiczną. Definiujemy indukcyjnie ciąg eliminacyjny $\langle \Gamma^0, \Gamma^1, \ldots\rangle$ złożony z podgier gry Γ w ten sposób, że wychodząc od gry $\Gamma^0 = \Gamma$, kolejne gry uzyskujemy przez sukcesywną eliminację strategii ściśle zdominowanych:

$\Gamma^0 = \Gamma$:

$A_i^0 = A_i$,

$D_i^0 \subseteq A_i^0$ jest zbiorem strategii gracza i ściśle zdominowanych w Γ^0;

Γ^n, dla $n > 0$, jest podgrą otrzymaną przez usunięcie wszystkich strategii wszystkich graczy, które są ściśle zdominowane w Γ^{n-1}:

$A_i^n = A_i^{n-1} - D_i^{n-1}$,

$D_i^n \subseteq A_i^n$ jest zbiorem strategii gracza i ściśle zdominowanych w Γ^n.

$\Gamma^\omega = \bigcap_{0 \leq n \leq \omega} \Gamma^n$ jest podgrą otrzymaną przez powtarzanie opisanej przed chwilą procedury usuwania strategii, czyli podgrą otrzymaną w wyniku usunięcia wszystkich strategii wszystkich graczy, które są ściśle zdominowane. Wobec skończoności zbioru profili strategii istnieje liczba k taka, że ciąg eliminacyjny

[24] Zauważmy, że dla dowolnego $j \in N$, $(M, w) \vDash K_j\langle s_{-j}\rangle\top$ wtw $(M, w) \vDash K_j\langle s_i\rangle\top$ dla dowolnego $i \in N - \{j\}$.

[25] Przypomnijmy, że strategia a_i jest *ściśle zdominowana* w zbiorze $X \subseteq S_{-i}$ wtw istnieje $b_i \in A_i$ taka, że dla wszystkich $s_{-i} \in X$ zachodzi nierówność: $\langle a_i, s_{-i}\rangle <_i \langle b_i, s_{-i}\rangle$, czyli według i a_i jest gorsza od pewnej b_i niezależnie od tego, co zrobią inni gracze. Jeżeli dana strategia jest najlepszą odpowiedzią na jakiś wybór strategii innych graczy, to nie może być ściśle zdominowana. Argumentacja na rzecz strategii tworzących równowagę Nasha przyjmuje następującą postać: nie wybiorę strategii zdominowanych, gdyż to nieopłacalne; przeciwnik wie, że jestem racjonalny, wie zatem, że nie wybiorę strategii zdominowanych.

$\langle \Gamma^0, \Gamma^1, \ldots \rangle$ będzie skończony, tj. $\Gamma^\omega = \Gamma^k$. Strategie, które przetrwały proces iterowanej eliminacji strategii ściśle zdominowanych, nazywa się *strategiami racjonalizowalnymi*[26]. Każda równowaga Nasha składa się ze strategii racjonalizowalnych (i dlatego poszukiwanie równowag można ograniczyć do strategii racjonalizowalnych). Przyjmuje się, że gra Γ jest rozwiązywalna za pomocą procedury iterowanej eliminacji strategii ściśle zdominowanych wtw A_i^ω jest singletonem dla każdego gracza *i*.

PRZYKŁAD 2. Żeby to zilustrować, rozważmy grę opisaną następującą macierzą:

GRACZ 2

		d	*e*	*f*
GRACZ 1	*a*	4, 3	5, 1	6, 2
	b	2, 1	8, 4	3, 6
	c	3, 0	9, 6	2, 8

Kolejne macierze opisują podgry gry wyjściowej uzyskane w wyniku eliminacji strategii ściśle zdominowanych:

GRACZ 2

		d	*e*	*f*
GRACZ 1	*a*	4, 3	5, 1	6, 2
	b	2, 1	8, 4	3, 6
	c	3, 0	9, 6	2, 8

GRACZ 2

		d	*f*
GRACZ 1	*a*	4, 3	6, 2
	b	2, 1	3, 6
	c	3, 0	2, 8

GRACZ 2

		d	*f*
GRACZ 1	*a*	4, 3	6, 2

GRACZ 2

		d
GRACZ 1	*a*	4, 3

[26] Nieformalnie, dana strategia jest racjonalizowalna, jeśli racjonalny gracz potrafi uzasadnić jej wybór w odpowiedzi na wybory dokonane przez racjonalnych przeciwników.

$A_1^0 = \{a, b, c\}$, $D_1^0 = \varnothing$

$A_2^0 = \{d, e, f\}$, $D_2^0 = \{e\}$ (akcja e jest ściśle zdominowana przez f)

$A_1^1 = \{a, b, c\}$, $D_1^1 = \{b, c\}$ (obie akcje są ściśle zdominowane przez a)

$A_2^1 = \{d, f\}$, $D_2^1 = \varnothing$

$A_1^2 = \{a\}$, $D_1^2 = \varnothing$

$A_2^2 = \{d, f\}$, $D_2^2 = \{f\}$ (akcja f jest ściśle zdominowana przez d) ■

Niech $Survive^n(a_i)$ będzie zdaniem głoszącym, że strategia a_i przetrwała po n rundach sukcesywną eliminację strategii ściśle zdominowanych, czyli nie jest ona ściśle zdominowana w żadnej podgrze Γ^m, gdzie $m \leq n$. Traktujemy je jako skrót definicyjny:

Definicja 7. Dla $n = 0$

$Survive^0(a_i) \coloneqq \Diamond\langle a_i\rangle\top \wedge \bigwedge_{b_i \in A_i}[(\Diamond\langle b_i\rangle\top \rightarrow \bigvee_{s \in S}(\Diamond\langle s_{-i}\rangle\top \wedge (\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle))]$;

dla $n > 0$,

$Survive^n(a_i) \coloneqq Survive^{n-1}(a_i) \wedge \bigwedge_{b_i \in A_i} \bigvee_{s \in S}[Survive^{n-1}(s_{-i}) \wedge (\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_i \langle a_i, s_{-i}\rangle)]$,

gdzie $Survive^{n-1}(s_G) \coloneqq \bigwedge_{i \in G} Survive^{n-1}(s_{-i})$.

Warunek wyjściowy stanowi, że strategia a_i przetrwała sukcesywną eliminację strategii ściśle zdominowanych w grze wyjściowej wtw a_i może być zagrana (wybrana przez gracza i) oraz dla każdej strategii alternatywnej gracza i, jeżeli może być ona zagrana, to istnieje podprofil s_{-i} złożony ze strategii przeciwników taki, że może on być zagrany oraz i uważa profil $\langle a_i, s_{-i}\rangle$ za nie gorszy od profilu $\langle b_i, s_{-i}\rangle$. Natomiast warunek indukcyjny głosi, że strategia a_i przetrwała po n rundach sukcesywną eliminację strategii ściśle zdominowanych wtw a_i przetrwała ją po $(n - 1)$ rundach oraz dla każdej strategii alternatywnej b_i istnieje podprofil s_{-i} złożony ze strategii przeciwników, który przetrwał po $(n - 1)$ rundach sukcesywną eliminację strategii zdominowanych, a zarazem i uważa profil $\langle a_i, s_{-i}\rangle$ za nie gorszy od profilu $\langle b_i, s_{-i}\rangle$. Kolejne twierdzenie głosi, że jeżeli gracze zagrali profil strategii s oraz dysponują wspólną wiedzą o swej racjonalności, to s jest profilem, który po n rundach (dla pewnego n) przetrwał sukcesywną eliminację strategii ściśle zdominowanych (por. Stalnaker 1994/1997: Twierdzenie 1).

T14. $\vDash \langle s\rangle\top \rightarrow (CRat \rightarrow Survive^n(s))$ dla dowolnego $s \in S$ i dowolnego $n \in \omega$

SZKIC DOWODU. Stosujemy indukcję po n. Rozważmy dowolny model M ufundowany na strukturze F_Γ oraz dowolny świat w modelu M takie, że:

(i) $(M, w) \vDash \langle s \rangle \top$, czyli $(M, w) \vDash \langle s_i \rangle \top$ dla dowolnego $i \in N$ (s jest dowolnym, ale ustalonym profilem strategii),

(ii) $(M, w) \vDash CRat_i$ dla dowolnego $i \in N$.

Z uwagi na niezawodność wiedzy:

(#) $(M, w) \vDash Rat_i$ dla dowolnego $i \in N$.

Najpierw pokazujemy, że dowodzone twierdzenie zachodzi dla $n = 0$. Czynimy to nie wprost. Załóżmy więc, że

(iii) $(M, w) \nvDash Survive^0(s)$, czyli $(M, w) \nvDash Survive^0(s_i)$ dla pewnego $i \in N$.

Niech podmiotem tym będzie r. Założenie (iii) oznacza, że jeżeli $(M, w) \vDash \Diamond\langle s_r \rangle \top$, to istnieje $b_r \in A_r$ taka, że $[(M, w) \vDash \Diamond\langle b_r \rangle \top$ i dla każdego $s \in S$, jeżeli $(M, w) \vDash \Diamond\langle s_{-r} \rangle \top$, to $(M, w) \vDash \neg(\langle b_r, s_{-r} \rangle \precsim_r \langle s_r, s_{-r} \rangle)]$. Poprzednik zachodzi na podstawie założenia (i). Natomiast następnik jest niezgodny z tym, że $(M, w) \vDash Rat_r$ (korzystamy z warunku: jeżeli $(M, w) \vDash M_i\alpha$, to $(M, w) \vDash \Diamond\alpha$).

Załóżmy teraz, że dowodzone twierdzenie zachodzi dla dowolnego $m < k$, gdzie $0 < k \leq n$. W kroku indukcyjnym pokazujemy, że zachodzi ono również dla k. Czynimy to również nie wprost. Zakładamy więc, że:

(iv) $(M, w) \nvDash Survive^k(s)$, czyli $(M, w) \nvDash Survive^k(s_i)$ dla pewnego $i \in N$.

Niech podmiotem tym będzie r. Oznacza to, że jeżeli $(M, w) \vDash Survive^{k-1}(s_r)$, to istnieje $b_r \in A_r$ oraz dla każdego $s \in S$, jeżeli $(M, w) \vDash Survive^{k-1}(s_r)$, to $(M, w) \vDash \neg(\langle b_r, a_{-r} \rangle \precsim_r \langle s_r, s_{-r} \rangle)$. Sprzeczność dostajemy na podstawie (i) i (#) oraz założenia indukcyjnego[27]. ■

DYGRESJA 2. W wielu wypadkach równowagi Nasha mają pewne niepożądane własności — uzyskany wynik jest niekorzystny dla graczy. Klasycznym, często cytowanym, przykładem ilustrującym tę sytuację jest „dylemat więźnia". Dwaj gracze (w najprostszym wypadku) mają do wyboru jedną z dwóch strategii: współpracę jako działanie kooperacyjne na rzecz wspólnego dobra (c) lub zdradę jako działanie egoistyczne w wyłącznie własnym interesie (d). Każdy z nich może zyskać, wybierając d, ale jeśli obaj wybiorą d, to obaj stracą. Oto przykładowa macierz wypłat dla tej gry:

[27] Na mocy założenia indukcyjnego oraz (i) dostajemy: $(M, w) \vDash Survive^{k-1}(s_r)$ oraz $(M, w) \vDash Survive^{k-1}(s_{-r})$.

		GRACZ 2	
		c	*d*
GRACZ 1	*c*	-1, -1	0, -6
	d	-6, 0	-4, -4

Obopólna zdrada, czyli para $\langle d, d\rangle$, jest równowagą Nasha. Z punktu widzenia osobistych interesów obu graczy jest jedynym „racjonalnym" wynikiem. Gra ta ilustruje konflikt między interesami indywidualnymi (prowadzącymi do równowagi Nasha) a interesami grupowymi (prowadzącymi do profilu $\langle c, c\rangle$). Gracze zdają sobie sprawę z tego, że gdyby wybrali współpracę (c), to uzyskaliby wynik jednoznacznie korzystniejszy. Jednak każdy ma własny powód, aby wybrać zdradę (d)[28]. Dlatego gracze racjonalnie zabiegający o jak największą własną korzyść (unikający strategii zdominowanych) w rezultacie ją zmniejszają. „Dylemat więźnia" pokazuje więc, że w pewnych sytuacjach najlepszym sposobem osiągnięcia osobistych korzyści jest działanie dla dobra grupy. Mówi się, że profil $\langle d, d\rangle$ jest *nieoptymalny* (*nieefektywny*) *w sensie Pareto*. Profil strategii s jest nieoptymalny w sensie Pareto, jeśli istnieje inny profil, który jest lepszy niż s dla co najmniej jednego gracza i nie gorszy dla żadnego innego gracza; w przeciwnym wypadku jest on optymalny w sensie Pareto. Oznacza to, że profil strategii optymalny w sensie Pareto to taki profil, od którego żaden gracz nie może jednostronnie odstąpić (wybierając inną akcję) bez spowodowania strat po stronie któregoś z pozostałych graczy. W „dylemacie więźnia" strategią optymalną w sensie Pareto jest para $\langle c, c\rangle$. Gdy równowaga Nasha i optimum Pareto pokrywają się, gra uzyskuje rozwiązanie najkorzystniejsze dla wszystkich graczy. Zgodnie z kryterium Pareto tylko strategię optymalną w sensie Pareto może uznać za rozwiązanie gry. Korzystając z wprowadzonych narzędzi, można następująco zdefiniować to pojęcie[29]. Niech wyrażenie $Best^P(a_i, s_{-i})$ oznacza, że akcja a_i gracza i jest najlepszą w sensie Pareto odpowiedzią na określony zestaw strategii pozostałych graczy s_{-i}, natomiast $Pareto(s)$ — że profil strategii s jest optymalny w sensie Pareto.

DEFINICJA 8. $Best^P(a_i, s_{-i}) \coloneqq \bigwedge_{b_i \in A_i} \bigwedge_{j \in N} (\langle b_i, s_{-i}\rangle \precsim_j \langle a_i, s_{-i}\rangle)$[30].

$$Pareto(s) \coloneqq \bigwedge_{i \in N} Best^P(s_i, s_{-i}).$$

[28] Gracze wybierają swoje strategie jednocześnie i niezależnie od siebie, co powoduje, że indywidualne względy zwyciężają.

[29] Dziękuję anonimowemu recenzentowi za tę sugestię.

[30] Słowo „najlepsza" znaczy w tym wypadku „przyjazna".

W kolejnym kroku można wprowadzić konkurencyjne pojęcie racjonalności graczy (na kształt *racjonalności kolektywnej*), które zalecałoby graczom współpracę jako działanie bardziej opłacalne: gracze chcą maksymalizować swoje zyski, lecz nie kosztem przeciwników, nie mają skłonności do zdrady i preferują osiąganie wspólnych korzyści. Ścisłe zdefiniowanie tego pojęcia nastręcza trudności. Dlatego omówienie go oraz sformułowanie definicji odkładam na później. Pomocne może być tu pojęcie *nadracjonalności* wprowadzone przez Douglasa Hofstadtera w artykule *Dilemmas for Superrational Thinkers* (1983). Gracz nadracjonalny (prawdziwie racjonalny) powinien przewidywać również przypuszczalne zachowanie swojego przeciwnika i zakładać, że przeciwnik postąpi tak samo. W takiej sytuacji bardziej opłacalna jest właśnie współpraca.

ZAKOŃCZENIE

Motywacje prowadzące do tworzenia i rozwijania nowych systemów logicznych bywają różnorodne. Oprócz zainteresowania czysto technicznymi aspektami nowych systemów logicy często kierują się ich ewentualną przydatnością praktyczną. Prowadzi to do rozróżnienia *logiki* (lub *semantyki*) *czystej* i *stosowanej* (Plantinga 1974). Nieco upraszczając, semantyka czysta dostarcza pewnej struktury formalnej (konstruktu teoriomnogościowego), która stanowi model dla danego rachunku logicznego i służy do zdefiniowania pojęcia tautologiczności oraz udowodnienia twierdzeń o niesprzeczności i pełności. Natomiast semantyka stosowana nadaje składnikom danej struktury formalnej intuicyjną interpretację motywowaną praktycznymi zastosowaniami rozważanego systemu logicznego. Można zaryzykować stwierdzenie, że semantyka o przekonującym nieformalnym odczytaniu stanowi pewnego rodzaju łącznik między rachunkiem logicznym a określonymi układami empirycznymi.

Teoria gier zajmuje się problemami związanymi z podejmowaniem decyzji w sytuacjach interaktywnych. Odpowiednio zmodyfikowane struktury gier można wykorzystać w celu określenia struktur, które determinują pewne logiki multimodalne. Z drugiej strony takie teoriogrowo zorientowane logiki pozwalają spojrzeć na gry z ogólniejszego i bardziej abstrakcyjnego (algebraicznego) punktu widzenia. Mogą też wzbogacić teorię gier o nowe pojęcia i procedury inspirowane występującymi w nich konstrukcjami. Oczywiście, analiza pewnych problemów teorii gier na gruncie logiki zależy od siły wyrazu logiki.

Podstawowe pojęcia teoriogrowe dają się scharakteryzować za pomocą aksjomatów logicznych, dzięki czemu można je analizować w sposób ogólniejszy i systematyczniejszy niż w teorii gier.

Wspomniane logiki dostarczają bogatszych modeli podejmowanych przez graczy decyzji i przeprowadzanych przez nich wnioskowań niż zwykłe macierze von Neumanna i Morgensterna. Łączą one mianowicie pojęcia profilu strategii, subiektywnej preferencji oraz kwalitatywnie rozumianej wiedzy (indywidualnej i wspólnej dla danej grupy podmiotów), a przez to nadają pojęciom opisującym rozwiązanie gier wymiar epistemiczny. Umożliwia to na przykład doprecyzowanie koncepcji racjonalnego zachowania oraz wnikliwszą analizę procedury znajdowania rozwiązania gry. W szczególności fakt, że w grach z pełną informacją założenie o wspólnej wiedzy graczy dotyczącej ich racjonalności implikuje wynik iterowanej eliminacji strategii ściśle zdominowanych, można traktować jako twierdzenie logiki stosowanej.

Rekonstruując pojęcia teorii gier jako formuły logiczne, można na niektóre problemy spojrzeć z perspektywy obliczeniowej. Na przykład pewne kwestie można efektywnie rozstrzygnąć, wykorzystując technikę weryfikacji modelowej (*model checking*). Mówiąc swobodnie, stosując technikę weryfikacji modelowej, można odpowiedzieć na pytanie, czy informacja zawarta w danej formule jest (*implicite*) reprezentowana w modelu, oraz wyróżnić te światy, w których informacja ta się pojawia. Określając następnie złożoność obliczeniową weryfikacji modelowej, możemy odkryć złożoność pewnych własności danej gry lub klasy gier. Ma to znaczenie dla zastosowań teorii gier w sztucznej inteligencji i informatyce.

Przedstawione rozważania mieszczą się w ramach programu *interaktywnej epistemologii* — dziedziny badań zapoczątkowanej w latach siedemdziesiątych XX wieku przez Roberta Aumanna, w której przedstawiciele różnych dyscyplin wspólnie dążą do lepszego zrozumienia strategicznych zachowań ludzi.

BIBLIOGRAFIA

Aumann R. J., Brandenburger A. (1995), *Epistemic Conditions for Nash Equilibrium*, „Econometrica" 63(5), 1161-1180.

Blackburn P., de Rijke M., Venema Y. (2001), *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

Blackburn P., van Benthem J. (2006), *Modal Logic. A Semantic Perspective* [w:] *Handbook of Modal Logic*, P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter (eds.), Amsterdam: Elsevier, 1-84.

de Bruin B. (2010), *Explaining Games. The Epistemic Programme in Game Theory*, Synthese Library Series vol. 346, Dordrecht: Springer.

Harsanyi J. (1967-1968), *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players*, „Management Science" 14, 159-182, 320-334, 486-502.

Hofstadter D. (1983), *Dilemmas for Superrational Thinkers. Leading Up to a Luring Lottery*, „Scientific American" 248(6); przedruk: D. Hofstadter, *Metamagical Themas. Questing for the Essence of Mind and Pattern*, New York: Basic Books 1985, 739-755.

Lorini E., Schwarzentruber F., Herzig A. (2009), *Epistemic Games in Modal Logic. Joint Actions, Knowledge and Preferences All Together* [w:] *Logic, Rationality, and Interaction*, X. He, J. Horty, E. Pacuit (eds.), Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 212-226.

Osborne M. J., Rubinstein A. (1994), *A Course in Game Theory*, Cambridge, MA: The MIT Press.

Plantinga A. (1974), *The Nature of Necessity*, Oxford: Oxford University Press.

Stalnaker R. (1994), *On the Evaluation of Solution Concepts*, „Theory and Decision" 37(1), 49-73; wersja poprawiona: M. O. L. Bacharach, L.-A. Gérard-Varet, P. Mongin, H. S. Shin (eds.), *Epistemic Logic and The Theory of Games and Decisions*, Boston: Kluwer Academic Publishers 1997, 345-364.

van Benthem J. (2014), *Logic in Games*, Cambridge, MA: The MIT Press.

van Benthem J., Girard P., Roy O. (2009), *Everything Else Being Equal. A Modal Logic for Ceteris Paribus Preferences*, „Journal of Philosophical Logic" 38(1), 83-125.

van Benthem J., Liu F. (2007), *Dynamic Logic of Preference Upgrade*, „Journal of Applied Non-Classical Logics" 17(2), 157-182.

van der Hoek W., Pauly M. (2006), *Modal Logic for Games and Information* [w:] *Handbook of Modal Logic*, P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter (eds.), Amsterdam: Elsevier, 1077-1148.

von Neumann J., Morgenstern O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.

von Wright G. H. (1963), *The Logic of Preference*, Edinburgh: Edinburgh University Press.

Watson J. (2011), *Strategia. Wprowadzenie do teorii gier*, Warszawa: Wolters Kluwer Polska.