Filozofia Nauki
Rok XXIII, 2015, Nr 4(92)

ARCHIWALIA

Kazimierz Ajdukiewicz

Antynomie teorii mnogości

Maszynopis pracy Kazimierza Ajdukiewicza „Antynomie teorii mnogości” przekazał mi Jan Woleński jeszcze w 2012 roku. Tekst ten otrzymał od Lecha Kalinowskiego, profesora historii sztuki Uniwersytetu Jagiellońskiego, który z kolei odziedziczył go po swoim bracie Jerzym. Okoliczności, w których Jerzy Kalinowski wszedł w posiadanie maszynopisu, nie są jednak znane.

Praca „Antynomie teoryi mnogości” przedstawiona „do oceny JWmu Prof. Sierpińskiemu” została przyjęta przez Komisję Egzaminacyjną dla kandydatów zawodu nauczycielskiego w dniu 5 października 1913 roku. Jeszcze w tym samym roku zdał wówczas dwudziestotrzyletni Ajdukiewicz przed wspomnianą komisją egzamin państwowy na nauczyciela w szkole średniej, „ale tylko z matematyki; w zakresie filozofii odczuwał potrzebę uzupełnienia studiów”[1].

Warto przedstawić w zarysie wymagania stawiane w owym czasie nauczycielom szkół średnich w Galicji. Otóż od 1856 roku kandydaci byli zobowiązani do odbycia czterech lat studiów uniwersyteckich, przy czym pięć semestrów musieli studiować bezwzględnie na wydziale filozoficznym, a trzy — na wydziale filozoficznym lub innym związanym z wybranym kierunkiem kształcenia[2]. *Ukończenie uniwersytetu nie było jednak warunkiem wystarczającym ubiegania się o posadę nauczyciela w gimnazjum. Absolwent, który chciał wykonywać pracę nauczyciela, zobowiązany był zdać wieloetapowy, bardzo trudny, żmudny i drobiazgowy egzamin państwowy przed specjalną komisją — C.K. Naukową Komisją Egzaminacyjną dla Kandydatów na Nauczycieli Szkół Średnich*[3]. *Od 1884 roku działały w Galicji dwie takie komisje: we Lwowie*

[1] A. Jedynak, *Ajdukiewicz*, Wiedza Powszechna, Warszawa 2003, s. 5.

[2] H. Kramarz, *Nauczyciele gimnazjalni Galicji 1867-1914. Studium historyczno-socjologiczne*, Wydawnictwo Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Kraków 1987, s. 53.

[3] Por. tamże, s. 56. Początkowo istniały dwa typy komisji: komisje egzaminacyjne dla kandy-

i w Krakowie. Mimo że w ich skład wchodzili profesorowie Uniwersytetów Lwowskiego i Jagiellońskiego, komisje te nie były związane z uniwersytetami organizacyjnie: „członkowie komisji egzaminacyjnych byli mianowani i powoływani przez Ministra Wyznań i Oświecenia w tak dobranym składzie, by reprezentowali oni dyscypliny naukowe odpowiadające wszystkim przedmiotom nauczania w szkole średniej"[4].

Do egzaminu przed komisją egzaminacyjną mogli być dopuszczeni tylko ci absolwenci uniwersytetu, którzy spełnili wszelkie wymogi regulaminowe. Komisja nie tylko dopuszczała kandydatów do egzaminu, lecz także „wyznaczała tematy prac domowych z głównego oraz pobocznego przedmiotu nauczania. Oprócz tego należało przygotować pisemną rozprawę o charakterze ogólnofilozoficznym, pedagogicznym lub z zakresu dydaktyki szczegółowej"[5]*. Praca „Antynomie teorii mnogości" jest właśnie taką ogólnofilozoficzną pracą, za pomocą której kandydat na nauczyciela miał za zadanie „udowodnić nabyte wykształcenie filozoficzne, a z drugiej strony okazać, że dobrze pojął związek swoich przedmiotów z zadaniem ogólnego wykształcenia i że zastanawiał się skutecznie nad ich traktowaniem w nauce szkolnej"*[6].

Trudno powiedzieć dokładnie, kto po raz pierwszy w Polsce wypowiadał się na temat antynomii logicznych[7]*. Jako pierwszą publikację, w której poruszono problem paradoksów, Woleński wskazuje „Co począć z pojęciem nieskończoności?" Jana Łukasiewicza*[8]*. Jest to sprawozdanie z odczytu wygłoszonego przez Łukasiewicza na posiedzeniu naukowym Polskiego Towarzystwa Filozoficznego 14 listopada 1906 roku. W pracy tej autor rozważa zagadnienie, czy część mnogości wszystkich liczb (np. mnogość liczb parzystych) może być równa mnogości wszystkich liczb i wspomina o paradoksie Burali-Fortiego. Pisze:*

> Dodać należy, że w najnowszych czasach spotkała się teoria Cantora w dalszym swym rozwoju z innymi trudnościami i sprzecznościami, które nie zostały dotąd usunięte (np. antynomia Burali-Forti). Sprzeczności te, pozorne czy rzeczywiste, zdają się mieć niemałe znaczenie i dla teorii logicznych. W sprawach tych wre obecnie na szpaltach „Revue de Métaphysique et de Morale" (roczn. 1906) żywa polemika, w której biorą udział filozofowie-matematycy Couturat, Poincaré i B. Russell[9].

Warto zauważyć, że Łukasiewicz nie wspomina wprost o Russellowskiej antynomii klasy klas sobie niepodporządkowanych, mimo że doskonale zdaje sobie sprawę z ist-

---

datów na nauczycieli szkół średnich (od 1850 r.) i komisje egzaminacyjne dla kandydatów na nauczycieli szkół realnych (od 1853 r.). W 1884 r. utworzono łączone komisje egzaminacyjne dla kandydatów na nauczycieli szkół obu rodzajów; por. tamże, s. 56-57.

[4] Tamże, s. 58-59.

[5] Tamże, s. 59.

[6] Tamże, s. 59-60.

[7] J. Woleński, *Paradoxes logiques et logique en Pologne* [w:] *La philosophie en Pologne 1918-1939*, red. R. Pouivet, M. Rebuschi, Vrin, Paris 2006, s. 119-120.

[8] J. Łukasiewicz, *Co począć z pojęciem nieskończoności*, „Przegląd Filozoficzny" X (1907), z. 1, s. 135-137.

[9] Tamże, s. 137.

nienia tego problemu. Świadczą o tym jego własne słowa z „Pamiętnika" przytaczane przez Woleńskiego w wymienionej wyżej publikacji[10]. *Łukasiewicz czytał „The Principles of Mathematics" Russella w 1905 roku*[11]. *W „Pamiętniku" wyjaśnia także, jak to się stało, że zainteresował się tą pracą:*

> Mój kolega Borowski zwrócił się raz do mnie z prośbą, bym przeczytał i wyjaśnił mu artykuł, którym zainteresował się, a który pojawił się w angielskim czasopiśmie filozoficznym „Mind". Artykuł nosił tytuł „O porządku" i napisany był przez Bertranda Russella. Artykuł ten zrobił na mnie wielkie wrażenie. Ujrzałem, że ktoś na serio poucza mnie w ścisły, matematyczny sposób, co należy rozumieć przez zbiór uporządkowany, zamiast zaprzątać mi głowę bzdurami filozoficznymi. Ponieważ byłem w tym czasie praktykantem w bibliotece uniwersyteckiej, przeto poprosiłem dyrektora biblioteki, [...] by sprowadził dla mnie dzieło Russella „The Principles of Mathematics". Jest to chyba najlepsza książka Russella i studiowałem ją całymi miesiącami. To była droga moja do logiki matematycznej[12].

W 1910 roku ukazała się drukiem praca Łukasiewicza „O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa", która została w 1909 roku przedstawiona w Polskiej Akademii Umiejętności[13]. *W rozprawie tej Łukasiewicz pisze, przedstawiwszy paradoks Burali-Fortiego*:

> nie mogę pominąć sprzeczności innej, którą odkrył Bertrand Russell, a która tkwi w logicznych podstawach matematyki, a więc tyczy się wspólnego pnia, z którego wyrastają wszystkie inne nauki konstrukcyjne, czyli aprioryczne. Sprzeczność ta jest jednym z najciekawszych i najdziwniejszych odkryć logicznych, jakich kiedykolwiek dokonano[14].

Następnie Łukasiewicz przedstawia szczegółowo antynomię klas Russella[15], *aby wykazać, że „sprzeczność rodzi się tutaj z niewinnego na pozór i całkiem prawidłowo utworzonego pojęcia przy pomocy jak najściślejszego rozumowania. Nie jest to więc wykręt sofistyczny lub sztuczka dialektyczna"*[16]; *„sprzeczność ta nie jest tylko zabawką logiczną, lecz pozostaje w ścisłym związku z podstawami matematyki i logiki. Frege przyznaje, że jego wieloletnia dwutomowa praca o podstawach arytmetyki została przez tę sprzeczność zachwiana"*[17]. *Sam Łukasiewicz nie próbuje jednak sprzeczności tych usunąć.*

„O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa" można uznać z dużym prawdopodobieństwem za pierwszą w Polsce pracę, w której o antynomii Russella w ogóle wspomniano i co więcej — dokładnie ją omówiono. Jak wskazuje Woleński, książka ta wy-

[10] J. Woleński, *Paradoxes*, s. 119.

[11] J. Łukasiewicz, *Pamiętnik*, rękopis, s. 60 (cyt. za Woleński, *Paradoxes*).

[12] J. Łukasiewicz, *Pamiętnik* (fragmenty), „Rocznik Historii Filozofii Polskiej" 2-3 (2009/2010), s. 360 (rękopisu s. 59).

[13] J. Łukasiewicz, *Pamiętnik*, s. 341 (rękopisu s. 2).

[14] J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne*, Fundusz Wydawniczy im. W. Osławskiego, Kraków 1910, s. 128-129.

[15] Tamże, s. 129-131.

[16] Tamże, s. 131.

[17] Tamże, s. 132.

warła ogromny wpływ na Stanisława Leśniewskiego[18]*. W pracy „O podstawach matematyki", publikowanej w czterech kolejnych rocznikach „Przeglądu Filozoficznego", począwszy od tomu trzydziestego z 1927 roku, Leśniewski wspominał:*

> W roku 1911 (za moich lat studenckich) wpadła mi w ręce książka p. Jana Łukasiewicza o zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Z książki tej, która wywarła w swoim czasie znaczny wpływ na rozwój intelektualny szeregu polskich „filozofów" i „filozofujących" uczonych mojego pokolenia, a dla mnie stanowiła rewelację pod niejednym względem, dowiedziałem się po raz pierwszy o istnieniu w świecie „logiki symbolicznej" p. Bertranda Russella oraz jego „antynomii", dotyczącej „klasy klas, nie będących własnymi elementami"[19].

O własnych zainteresowaniach antynomiami pisał:

> Wydając kolejne prace, […] zajmowałem się jednocześnie gorliwie „antynomiami". Od czasu, gdy w roku 1911 rozpocząłem zapoznawanie się z nimi od poznania „antynomii" p. Russella, dotyczącej „klasy klas, nie będących własnymi elementami", zagadnienia, związane z „antynomiami", stały się na lat jedenaście przeszło najbardziej natrętnym tematem moich rozmyślań[20].

O ogromnym zainteresowaniu Leśniewskiego książką Łukasiewicza w roku 1912 mowa jest m.in. w „Pamiętniku" tego ostatniego:

> Leśniewskiego poznałem we Lwowie w roku 1912. Mieszkałem wówczas […] przy ulicy Chmielowskiego 10. Pewnego popołudnia ktoś zadzwonił do drzwi wejściowych. Otworzyłem drzwi i ujrzałem młodego człowieka […]. Młody człowiek skłonił się i zapytał uprzejmie: „Czy tu mieszka pan profesor Łukasiewicz?". Odpowiedziałem, że tak. „Czy może szanowny pan jest profesorem Łukasiewiczem?" zapytał nieznajomy. Odpowiedziałem, że tak. „Jestem Leśniewski i przychodzę pokazać panu artykuł w korekcie, który napisałem przeciw panu". […] Okazało się, że Leśniewski drukuje w „Przeglądzie Filozoficznym" artykuł zawierający krytykę moich poglądów, wypowiedzianych w mojej książce „Zasada sprzeczności u Arystotelesa". Krytyka ta była napisana z taką ścisłością naukową, że nie było do niczego się przyczepić[21],

a także — jak wskazuje Woleński — w artykule Tadeusza Kotarbińskiego „Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim"[22]*:*

> Rzucił się tedy […] Leśniewski w rozszumiały wir i rozgwar wzbudzonej do wspaniałego rozkwitu logiki matematycznej. A właśnie zabłysł był o tym czasie mniej więcej, na firmamencie myśli dociekliwej efektowny paradoks Bertranda Russella. Jak wybrnąć z antynomii zawartej w pojęciu klasy klas nie będących własnymi elementami. […] I oto zdarzyło się, że Leśniewski (a było to bodaj tuż niemal przed pierwszą wojną światową) podjął się odczytu o antynomii Russella w cyklu odczytów publicznych organizowanych w Warszawie w siedzibie Towarzystwa Psychologicznego [mieszczącego się przy ul. Pięknej 44 — A.H.][23].

---

[18] J. Woleński, *Paradoxes*, s. 120.

[19] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" XXX (1927), z. 2-3, s. 169.

[20] Tamże, s. 183.

[21] J. Łukasiewicz, *Pamiętnik*, s. 315 (rękopisu s. 2).

[22] T. Kotarbiński, *Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim*, „Ruch Filozoficzny" XXIV (1965-66), nr 3-4, s. 155-163.

[23] Tamże, s. 158.

Praca Leśniewskiego „Czy klasa klas niepodporządkowanych sobie jest podporządkowana sobie” ukazała się w 1914 roku[24]*, a zatem już po tym, jak Ajdukiewicz napisał „Antynomie teorii mnogości”. Powstaje pytanie, skąd Ajdukiewicz czerpał inspirację do napisania pracy właśnie na ten temat. Przypuszczam, że zainspirował go do tego Wacław Sierpiński, którego wykładów Ajdukiewicz jako student matematyki słuchał na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. W wydanym w 1912 roku „Zarysie teorii mnogości”*[25] *Sierpińskiego, będącym też obowiązującym podręcznikiem do jego wykładów właśnie z tego przedmiotu, wzmianki o antynomiach w teorii mnogości pojawiają się już w pierwszym paragrafie pracy*[26]*. Sierpiński pisze:*

> Zarówno też z filozoficznego punktu widzenia, analizując pojęcie „nieskończoności”, teoria mnogości przedstawia niemały interes, a różne jej paradoksy i tak zwane antynomie sporo wśród logików i logistyków narobiły wrzawy[27].

Zagadnienie antynomii Sierpiński przedstawia jako szczególnie godne zainteresowania filozofa. We wspomnianym podręczniku omawia dokładnie antynomię Richarda[28] *i podaje w przypisie wskazówki bibliograficzne dla zainteresowanych zgłębieniem tematu*[29]*. Warto wspomnieć, że „Zarys teorii mnogości” był w zamierzeniu autora przeznaczony także dla filozofów. W przedmowie czytamy:*

> Celem niniejszej książki jest zaznajomienie czytelnika w sposób możliwie przystępny z ważniejszymi zagadnieniami i wynikami teorii mnogości. Nauka ta, będąc dzisiaj nieodzowną dla matematyków, może jednak — ze względu na swą treść i metody — interesować też i osoby, nie oddające się specjalnie studiom matematycznym, zwłaszcza filozofów[30].

Sądzę, że Ajdukiewicz nie mógł nie znać antynomii logicznych, poznawszy podstawy teorii mnogości pod kierunkiem Sierpińskiego. Przypuszczalnie uznał problem antynomii — podobnie jak jego nauczyciel — za szczególnie interesujący dla filozofa i matematyka[31]*. W wykładach i seminariach Sierpińskiego uczestniczyli także, jak*

---

[24] S. Leśniewski, *Czy klasa klas niepodporządkowanych sobie jest podporządkowana sobie*, „Przegląd Filozoficzny” XVII (1914), s. 115-128.

[25] W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, Księgarnia E. Wendego i s-ki, Warszawa 1912.

[26] W skrypcie do wykładu (W. Sierpiński, *Teorya mnogości. Część druga*, Kółko matematyczno-fizyczne, Lwów 1913) autor pisze: „Jako część pierwszą niniejszego kursu uważać należy mój „Zarys teorii mnogości” (Biblioteka matematyczno-fizyczna, seria III, tom IX, Warszawa (E. Wende) 1912 […])”. Zauważmy, że widniejąca na książce data wydania 1913 nie jest jednak pewna. Otóż w samym skrypcie na s. 97 mowa jest o podręczniku Felixa Hausdorffa *Grundzüge der Mengenlehre* wydanym w Lipsku w roku 1914.

[27] Tamże, s. 1-2.

[28] Tamże, s. 11-12.

[29] M.in. również do tych prac odwołuje się Ajdukiewicz w *Antynomiach teorii mnogości*.

[30] W. Sierpiński, *Zarys*, s. VII.

[31] Źródłem inspiracji Ajdukiewiczowskiej pracy o antynomiach z całą pewnością nie było seminarium Reinacha w Getyndze, jak zdaje się sądzić Roman Ingarden; por. J. Woleński, *Paradoxes*, s. 120. Ajdukiewicz przebywał na stypendium w Getyndze w roku akademickim 1913/14. Praca o antynomiach została złożona Komisji Egzaminacyjnej 5 października 1913 r. Tymczasem zagadnienia ruchu,

podaje Woleński, inni uczniowie Kazimierza Twardowskiego, m.in. Tadeusz Czeżowski. Wolno sądzić, że zagadnienie antynomii różnych rodzajów było przedstawiane na wykładach i omawiane na seminariach nie tylko Sierpińskiego, lecz także Twardowskiego. Zachował się list Władysława Witwickiego do Twardowskiego, w którym nadawca, nawiązując do tematu seminarium, analizuje antynomie wyrazów auto- i heterosemantycznych. Warto wspomnieć, że o antynomiach piszą jeszcze przed I wojną światową: Leon Chwistek (niezwiązany ze szkołą lwowsko-warszawską) w pracy „Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella"[32] *oraz Franciszek Smolka (przedstawiciel szkoły) w artykule „O niektórych znanych paradoksach"*[33].

Warto wspomnieć, że pracę Ajdukiewicza „Antynomie teorii mnogości" poprzedza wykaz literatury świadczący o dużym oczytaniu autora. Ajdukiewicz wymienia kolejno publikacje Gerharda Hessenberga, Kurta Grellinga i Leonarda Nelsona, trzy prace Bertranda Russella, w tym najwcześniejszą „The Principles of Mathematics" (1903), w której przedstawiona została antynomia klas, oraz jedną pisaną przez Russella wraz z Alfredem Northem Whiteheadem, cztery prace Henri Poincarégo, publikacje

---

w tym paradoksy Zenona z Elei, były przedmiotem badań na seminarium Reinacha jesienią 1913 r., a zatem najwcześniej w październiku. W tym czasie praca Ajdukiewicza musiała być już gotowa. Przytoczmy wspomnienie Ingardena o seminarium Reinacha, na które uczęszczał Ajdukiewicz (R. Ingarden, *Einführung in die Phänomenologie Edmund Husserls. Osloer Vorlesungen 1967*, Max Niemeyer, Tübingen 1992, s. 223-224, przyp. 25, w naszym tłumaczeniu; w polskim wydaniu zamieszczono jedynie wymianę zdań między Ajdukiewiczem a Reinachem, zob. *Wstęp do fenomenologii Husserla*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974, s. 175): „Jesienią 1913 roku Reinach postawił na swym seminarium problem ruchu. Rozważał go w kontekście paradoksów Zenona, mianowicie problemu Achillesa i żółwia itd. Chciał jakoś przezwyciężyć trudności leżące u podstaw paradoksów. Rozwinął paradoksy o wiele bardziej, niż to uczynił Zenon, i powiedział, że paradoksy Achillesa są rzeczywiście nie do przezwyciężenia, przewaga zwierzęcia jest nieusuwalna (*nicht annulierbar*). Tak, to samo w zasadzie mówi także matematyka. Oczywiście ciąg: 1, ½, ¼, … itd. nie zawiera zera. Przewaga jest nieusuwalna — to dałoby się tak wyrazić matematycznie, że w ciągu byłoby jedno zero, ale tego zera nie ma. Jaka była w tym czasie nauka Reinacha? Postawił tezę: jest fałszem, że ciało w ruchu w danej chwili — i to w danej fizycznie chwili — jest w danym punkcie. To jest fałsz. Trzeba przyjąć, że poruszające się ciało w danym momencie przebywa mały przedział, mały odcinek. Reinach bronił tej tezy przez wiele miesięcy, potem się z niej wycofał. Ale pierwszą reakcją mojego przyjaciela i kolegi — profesora Ajdukiewicza, który wtedy był młodym doktorem i to zaawansowanym w matematyce, fizyce itd. — było: »Panie Doktorze, jak Pan może utrzymywać coś takiego. Przecież to stoi w sprzeczności z aksjomatyką teorii mnogości — w rażącej sprzeczności. Nie zna Pan teorii mnogości?«. Reinach odpowiedział: »Tak, jest mi bardzo przykro, Panie Doktorze, ale to jest matematyka, a ja jestem filozofem. Nie wolno mi zakładać aksjomatyki teorii mnogości. Może jest bardzo mądra, ale w moich analizach nie może zostać przyjęta«".

[32] L. Chwistek, *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella*, „Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział Historyczno-Filozoficzny", t. 30, Polska Akademia Umiejętności, Kraków 1912, s. 270-334 (Chwistek omawia paradoksy Epimenidesa, Nelsona i Grellinga oraz Russella, a także próby ich przezwyciężenia).

[33] F. Smolka, *O niektórych znanych paradoksach*, „Ruch Filozoficzny" III (1913), nr 10, 282b-283a.

Julesa Richarda, Juliusa Königa, Ernsta Zermela, Gottloba Fregego i Felixa Bernsteina. W pracy Ajdukiewicz odwołuje się także do artykułu Cesarego Burali-Fortiego oraz książki Leona Chwistka — jako jedynej polskiej publikacji; nazwiska tych dwóch ostatnich autorów nie pojawiają się jednak w wykazie literatury.

Przygotowując pracę Ajdukiewicza do wydania, uwzględniłam reformy ortograficzne i interpunkcyjne języka polskiego, które miały miejsce, począwszy od 1936 roku. Uzupełniłam także przypisy i dodałam cudzysłowy jako wyznaczniki supozycji materialnej. Addenda w tekście głównym oznaczam nawiasami kwadratowymi[34].

Aleksandra Horecka

Kazimierz Ajdukiewicz

Antynomie teorii mnogości

Do oceny JWmu Prof. Sierpińskiemu, 5/10 1913[35]

I

1. W następujących paragrafach pragnę zebrać i usystemizować paradoksy teorii mnogości oraz próby ich rozwiązania.

2. Na samym wstępie pojawia się trudność dotycząca wybrania *generis proximi* paradoksów. Chodzi mianowicie o to, że trudno rozstrzygnąć, co nazwać paradoksem: czy pojęcie, czy sąd, czy rozumowanie. Wymienię dla ilustracji pewną parafrazę paradoksu o kłamcy:

> W pewnym kraju, w którym ogłoszone na pewnym miejscu za pomocą afiszów prawo nabiera aż do walnego odwołania mocy obowiązującej, pojawia się afisz na tym właśnie miejscu o treści następującej: „Od tej chwili — wliczając w to moment wydania tej właśnie ustawy — posiadają moc obowiązującą wszystkie i tylko te rozporządzenia, które są opatrzone własnoręcznym podpisem władcy". Afisz ten jednak nie został podpisany. Czy posiada to rozporządzenie moc obowiązującą? Nie, bo gdyby ją posiadało, to afisz ten jako niepodpisany, nie byłby ważny. Tak, bo jeżeli nie jest ważny, to w takim razie nie nastąpiło ważne odwołanie prawomocności ustaw ogłoszonych afiszami także i bez podpisów.

Na pytanie, czy paradoksem nazwiemy pojęcie tego rozporządzenia, czy rozumowanie całe, czy też sąd definiujący wymienioną ustawę, niełatwo odpowiedzieć.

---

[34] Przypisy z adnotacją „przyp. red." i niektóre emendacje pochodzą od redaktorów „Filozofii Nauki".

[35] Odręczny dopisek tej treści (oraz podpis autora) widnieje w maszynopisie pod tytułem (przyp. A.H.).

Najodpowiedniej wydaje się nam przyjąć, że paradoksem jest całe to rozumowanie. Odpowiada to zwrotom takim jak: „Paradoks Russella brzmi" i tu wymieniamy całe rozumowanie wiodące do dwóch sądów sprzecznych. Nigdy zaś nie mówimy: „Paradoks Russella jest pojęciem klasy wszystkich klas sobie niepodporządkowanych" ani też nie powiemy, że para sądów sprzecznych „Klasa wszystkich klas sobie niepodporządkowanych jest sobie podporządkowana i nie jest sobie podporządkowania" jest paradoksem. Paradoksem nazwiemy tedy rozumowanie, które prowadzi nas do przyjęcia czegoś, co wykracza przeciw zasadom logiki. Sformułowanie to wydaje się jednak za obszerne. Albowiem nie każde rozumowanie wiodące do rezultatów antylogicznych jest paradoksem. I tak np. rozumowanie, które z założenia „*a* nie jest *b* i *a* nie nie jest *b*" wywiedzie na podstawie prawa podwójnego przeczenia „*a* jest *b* i *a* nie jest *b*", nie zasługuje na nazwę paradoksu. Paradoks bowiem charakteryzuje się tym, że z założeń na pozór zupełnie dopuszczalnych i prawdziwych prowadzi do wyników antylogicznych.

Paradoks może powstać tylko tam, gdzie albo w aksjomatach samych mieści się sprzeczność, albo gdzie aksjomatów nie ma, czyli w naukach dedukcyjnych jeszcze nieścisłych, znajdujących się *in statu nascendi.* W razie przeciwnym paradoks powstać nie może. Jako rozumowanie wywodzące — w sposób z aksjomatami i prawami logiki zgodny — sprzeczność, może paradoks powstać na podstawie sprzecznych aksjomatów. Jeśli zaś aksjomatów nie ma, wówczas to, czy pojęcie dane jest dopuszczalne, czy nie, jest kwestią intuicji, która może błądzić. Kryterium pozytywnym błędu intuicji jest paradoks, a jako taki jest cenną wskazówką dla tego, kto pragnie intuicję sprecyzować w aksjomatach[36].

Wobec uwag powyższych paradoksem nazwiemy rozumowanie, które wychodząc z założeń z punktu widzenia danej nauki logicznie dopuszczalnych i za prawdziwe uznanych, dochodzi do konsekwencji antylogicznych, tj. z zasadami logiki się wykluczających. Sądy antylogiczne, do których paradoks prowadzi, nazywają się zwykle sądami paradoksalnymi, zaś pojęcie, o którego przedmiocie orzeczone są sądy paradoksalne — pojęciem paradoksalnym. Wyrażeń „paradoks" i „antynomia" będziemy używali dla oznaczenia tego samego przedmiotu.

Nie każdy paradoks jest paradoksem teorii mnogości. Tak np. sławny paradoks Epimenidesa oparty na zdaniu „Kłamię" nie jest paradoksem teorii mnogości, lecz paradoksem logiki[37]. Paradoksami lub antynomiami teorii mnogości nazywamy te

[36] Por. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, „Mathematische Annalen" 65(2), 1907, s. 261-281.

[37] Ściśle formułuje się ów paradoks w sposób następujący: Epimenides wypowiada w czasie T_1-T_2 sąd P_i i tylko ten sąd. Sąd P_i zaś brzmi: „Istnieje taka wartość argumentu funkcji propozycjonalnej »Epimenides wypowiada w czasie T_1-T_2 P i P jest fałszywe«, która tę funkcję sprawdza [tzn. spełnia]". Jeżeli przyjmiemy, że P_i jest prawdą, to nie istnieje taka wartość argumentu P, która by funkcję ujętą w cudzysłów sprawdzała. Funkcja ta bowiem jest iloczynem logicznym, będzie zatem sprawdzona jedynie, jeżeli każdy z jego składników będzie sprawdzony. Ale jedyną wartością, która sprawdza składnik pierwszy („Epimenides wypowiada w czasie T_1-T_2 P"), jest — według założenia

antynomie, w których pojęciem paradoksalnym jest pojęcie należące do teorii mnogości lub też uzasadnienie jest oparte na zasadach teorii mnogości.

II

3. Wszystkie paradoksy teorii mnogości możemy podzielić na dwie grupy, zaliczając do drugiej paradoksy Richarda, Königa, Berry'ego i w ogóle te, w których sądy paradoksalne są typu: *X* daje się pewnymi środkami zdefiniować i nie daje się zdefiniować. W pierwszej grupie dadzą się wyróżnić dwie części, do jednej należeć będą antynomie nie mające do czynienia z typami porządkowymi, do drugiej — pozostałe.

4. W pierwszej części pierwszej grupy paradoksów zawiera się paradoks Russella i pochodne. Paradoks Russella ma postać następującą:

> Niech *w* będzie klasą wszystkich tych klas, które nie są własnymi elementami. Wobec tego czymkolwiek byłaby klasa *x*, sąd „*x* jest elementem *w*" jest równoważny „*x* nie jest elementem *x*". Stąd — kładąc za *x* wartość *w* — zdanie „*w* jest elementem *w*" jest równoważne zdaniu „*w* nie jest elementem *w*".

W tej zwięzłej formie przedstawia Russell swój paradoks w *Principiach*. Zazwyczaj formułuje się go inaczej, mianowicie, przyjąwszy definicję *w*, zauważa się, że według zasady wyłączonego środka jeden z dwóch sądów sprzecznych:

(I) *w* jest elementem *w* (*w* jest klasą sobie niepodporządkowaną),

(II) *w* nie jest elementem *w* (*w* nie jest klasą sobie niepodporządkowaną),

musi być prawdziwy[38]. Atoli przyjąwszy, że prawdziwy jest sąd (I), z definicji *w* wywodzi się, że *w* nie jest elementem *w*. Podobnież przyjęcie sądu (II) prowadzi do jego zaprzeczenia. Skoro bowiem *w* nie jest klasą sobie niepodporządkowaną, to będąc w ogóle klasą, musi *w* — wobec zupełnej dysjunkcji na klasy sobie podporządkowa-

— P_i. Przyjmijmy jednak, że P_i jest prawdziwe, zatem drugi składnik nie jest przez P_i sprawdzony. Skoro zaś jedyna wartość sprawdzająca składnik pierwszy nie sprawdza składnika drugiego, przeto żadna w ogóle wartość nie sprawdza obu czynników. Nie ma zatem wartości, która by funkcję zawartą w cudzysłowie sprawdzała, wbrew temu, co orzeka P_i. Jeżeli tedy P_i jest prawdą, to nie jest prawdą. Nie byłoby to żadnym paradoksem, ale dowodem na to, że P_i jest mylne, gdyby nie to, że przypuszczenie, iż P_i jest mylne, wiedzie również do zaprzeczenia. Jeżeli bowiem P_i jest mylne, to znaczy to, że nie istnieje wartość sprawdzająca funkcji ujętej w cudzysłów. Atoli wobec mylności P_i jest właśnie P_i taką wartością sprawdzającą tę funkcję. Skoro zaś taka wartość sprawdzająca istnieje, to P_i — sąd orzekający jej istnienie — jest prawdą wbrew założeniu, że P_i jest mylne. Zarazem przeto jest P_i mylne i prawdziwe, i nie jest ani mylne, ani prawdziwe. Jest to sformułowanie Russella.

[38] Zdania w nawiasie nie są parafrazami zdań poprzedzających, lecz ich konsekwencjami na mocy definicji *w*. Niemniej przy formułowaniu paradoksu Ajdukiewicz wychodzi w wypadku sądu (I) od zdania „*w* jest elementem *w*", natomiast w wypadku sądu (II) od zdania „*w* nie jest klasą sobie niepodporządkowaną" zamiast od zdania *explicite* sprzecznego z „*w* jest elementem *w*". Stąd wrażenie nadmiarowości wywodu w wypadku (II) (przyp. red.).

ne i niepodporządkowane — być klasą sobie podporządkowaną. Ale wtedy musi posiadać cechę, która konstytuuje klasę *w*, tj. musi być sobie niepodporządkowana, jest zatem sobie niepodporządkowana. Przyjęcie zatem sądu (II) prowadzi również do jego zaprzeczenia. Oba sądy sprzeczne ((I) i (II)) muszą tedy, wbrew zasadzie wyłączonego środka, być mylne.

Ostatnia forma tego paradoksu jest równoważna formie pierwszej, mianowicie dlatego, że powiedzieć, iż zdanie (I) „*w* jest elementem *w*" jest równoważne zdaniu (II) „*w* nie jest elementem *w*", znaczy stwierdzić, iż ze zdania (I) wynika zdanie (II) i na odwrót. Forma pierwsza stwierdza zatem na podstawie definicji klasy *w*, że przyjęcie, iż *w* jest klasą sobie niepodporządkowaną, prowadzi do sądu „*w* nie jest klasą sobie niepodporządkowaną" i na odwrót. To samo zaś czyni forma druga[39].

Na wzór tego paradoksu daje się utworzyć cały szereg innych paradoksów, które jednak nie mogą być zaliczone do teorii mnogości, ponieważ nie występuje w nich ani żadne jej właściwe pojęcie, ani żadna z argumentacji nie jest oparta na teorii mnogości. Do tych należy paradoks o „orzekalnych" i „nieorzekalnych" orzeczeniach[40], tj. takich, które mogą być ze słusznością same sobie przypisane, i pozostałych. Zupełnie analogiczna antynomia logiczna jak przy pojęciu klasy klas sobie niepodporządkowanych powstaje przy orzeczeniu „nieorzekalny". Przypuszczenie, że jest ono orzekalne, prowadzi do wniosku, że nie jest orzekalne. Przypuszczenie, że nie jest orzekalne — do wniosku, że jest orzekalne, a przecież jedno z tych dwóch przypuszczeń musi być spełnione.

To samo powstaje ze względu na wyrażenie „heterologiczny". Możemy bowiem przymiotniki podzielić na dwie klasy, nazywając „homologicznymi" i zaliczając do klasy pierwszej przymiotniki oznaczające cechy, które im samym przysługują, do klasy drugiej zaś pozostałe przymiotniki, rezerwując dla nich nazwę „heterologiczny". Wyraz „heterologiczny" jest przymiotnikiem, ale nie może należeć do żadnej z wymienionych klas, bo prowadzi to do analogicznej z powyższą sprzeczności, podczas gdy z drugiej strony, według zasady wyłączonego środka, do jednej z nich należeć musi[41].

Jako konsekwencję paradoksu Russella otrzymamy paradoks mnogości wszystkich mnogości. Oznaczmy mnogość wszystkich mnogości przez M, jej elementy przez μ, przez $\mathfrak{M}$ zbiór wszystkich części[42] mnogości M, jego elementy przez m. Możemy z jednej strony ustalić odpowiedniość $\varphi(m) = \mu$, kładąc $\varphi(m) = m$. Z drugiej strony, takiej odpowiedniości nie można ustalić. Jeżeli bowiem zbiór M podzielimy na klasę X i Y, zaliczając do klasy X te μ, które spełniając $\varphi(m) = \mu$, spełniają też $\mu \in m$ (μ jest elementem m, symbolika Peana)[43], zaś do klasy Y — pozostałe, wówczas

[39] B. Russell, *The Principles of Mathematics*, University Press, Cambridge 1903; B. Russell, A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, t. 1, University Press, Cambridge 1910, s. 63.

[40] B. Russell, *The Principles*, § 78.

[41] K. Grelling, L. Nelson, *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, „Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge" 2(3), 1907, s. 301-334.

[42] Część mnogości to tyle co podzbiór ($\mathfrak{M}$ to zbiór potęgowy zbioru M) (przyp. red.).

[43] Ajdukiewicz używa litery epsilon w kształcie oryginalnym (ε) (przyp. red.).

klasa Y jest zbiorem tych elementów klasy M, czyli zbiorem tych mnogości, które nie są własnymi elementami, a więc klasą w z paradoksu Russella. Mnogość ta jest częścią mnogości M, a jako taka jest elementem $\mathfrak{M}$. Ale nie może być elementem mnogości M, albowiem gdyby tak było, musiałoby $w = Y = \varphi(Y)$ być elementem X albo Y, a więc być klasą sobie niepodporządkowaną albo nie być klasą sobie niepodporządkowaną. Atoli według paradoksu Russella nie może być $w = \varphi(Y)$ ani klasą sobie podporządkowaną, ani klasą sobie niepodporządkowaną, a więc $\varphi(Y)$ nie jest elementem mnogości M. Klasa $\varphi(Y)$ zarazem jest klasą i nie jest klasą.

Zupełnie analogiczny paradoks otrzymamy, kładąc zamiast zbioru wszystkich mnogości M zbiór wszystkich przedmiotów D. Sąd paradoksalny będzie brzmiał: „$\varphi(Y) = Y$ (zdefiniowany jako zbiór tych elementów, które bądź nie są klasami, bądź są klasami sobie niepodporządkowanymi) jest przedmiotem i nie jest przedmiotem".

5. W części drugiej grupy pierwszej paradoksów zawiera się jedynie paradoks Burali-Fortiego[44].

Każda mnogość liczb porządkowych O posiada liczbę porządkową v[45], która po niej bezpośrednio następuje (tzn. jest pierwszą spośród późniejszych od któregokolwiek z elementów mnogości O) i w niej się nie zawiera[46]. Liczba ta jest typem porządkowym zbioru liczb porządkowych $A(O)$, który [to zbiór] zawiera elementy będące same elementami O albo wcześniejsze od jednego choćby z elementów O.

Mnogość W wszystkich liczb porządkowych jest dobrze uporządkowana, musi więc też taką liczbę posiadać. Oznaczmy ją przez ξ — będzie ona typem porządkowym zbioru $A(W)$, który [to zbiór] jest oczywiście identyczny z W. Liczba ξ jest tedy typem porządkowym W i nie zawiera się w W. Z drugiej strony musi się ξ w W zawierać ze względu na definicję W. Powstaje więc sprzeczność.

Paradoks ten sformułujemy dla pewnych względów w sposób następujący. Uważajmy mnogość W i mnogość M' wszystkich mnogości częściowych[47] W, wliczając w to O i W. Dla każdego m[48] spełniającego $m \in M'$ położymy $\varphi(m) = \tau$, gdzie τ jest typem porządkowym [zbioru] $A(m)$. Zbiór W podzielimy na klasy, zaliczając do klasy X to τ, które spełniając $\varphi(m) = \tau$, spełnia też $\tau \in m$, przy którymkolwiek m (uwaga ta jest niezbędna ze względu na to, że dane τ może spełniać kilka $\varphi(m) = \tau$). Zaś do klasy Y [zaliczymy] to τ, które spełniając $\varphi(m) = \tau$, nie spełnia $\tau \in m$. Innych elementów klasy W, jak spełniające jakieś $\varphi(m) = \tau$, nie ma, albowiem każde τ jest typem jakiegoś $A(m)$, gdzie m jest jedną z mnogości liczb porządkowych. Uważajmy teraz $\varphi(Y) = \tilde{\tau}$. $\varphi(Y)$ albo należy do zbioru X i wtedy należy do zbioru Y, albo należy do zbioru Y i wtedy nie należy do zbioru Y. $\tilde{\tau}$ nie należy zatem ani do X, ani do Y.

---

[44] C. Burali-Forti**,** *Una questione sui numeri transfiniti*, „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo" 11(1), 1897, s. 154-164 (cyt. za A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia*, t. 1, s. 63).

[45] Dla czytelności zamieniono tu oryginalne oznaczenia (M, μ) na O, v (przyp. red.).

[46] Tzn. nie jest elementem O (przyp. red.).

[47] Mnogość częściowa to tyle co podzbiór; por. niżej, paragraf 16 (przyp. red.).

[48] Tu i dalej zamieniono M na m (przyp. red.).

Łatwo zauważyć, że $\tilde{\tau}$ jest identyczne z ξ, zaś Y z W. Aby to okazać, wystarczy zauważyć, że X nie może zawierać żadnego elementu. To zaś zachodzi, ponieważ żadne $\tau = \varphi(m)$, będące typem porządkowym $A(m)$, nie zawiera się w m[49]. Wobec tego ostatnia forma jest tylko innym sformułowaniem paradoksu Burali-Fortiego (formę tę nadał temu paradoksowi Goesch, o czym donoszą Grelling i Nelson[50], dodałem tylko pewien wariant w podziale klasy W na X i Y, który się w ciągu dalszym wyjaśni).

6. Ogólna forma paradoksów grupy pierwszej wobec ostatnich sformułowań narzuca się sama. Mamy tu właściwie z dwoma paradoksami do czynienia — paradoksem Russella i Burali-Fortiego. Formę tę zbudowali Grelling i Nelson[51]. Brzmi ona:

(P) Niech M oznacza mnogość wszystkich mnogości, M' — którąś z [mnogości] jej częściowych mnogości[52], zaś Φ — jakąś mnogość będącą równej mocy z M'. Oznaczmy przyporządkowanie elementów Φ elementom M' przez φ[53]. Ponieważ elementy M' są same mnogościami, przeto mogą zachodzić następujące wypadki. Jeżeli m jest elementem M', to albo $\varphi(m)$ jest elementem m i wtedy zaliczymy $\varphi(m)$ do części X zbioru Φ, albo $\varphi(m)$ nie jest elementem m i wtedy zaliczymy $\varphi(m)$ do mnogości Y dopełniającej X do Φ. Jeżeli Y jest samo elementem M', to istnieje w Φ element $\varphi(Y)$. Przyjąwszy, że $\varphi(Y)$ należy do Y, otrzymujemy, że $\varphi(Y)$ byłoby elementem X według definicji X, co stoi w sprzeczności z założeniem. Z przyjęcia jednak, że $\varphi(Y)$ nie jest elementem Y, wynika, że jest elementem Y (według definicji Y), a to znowu zaprzecza założeniu.

Że wymienione paradoksy są szczegółowymi postaciami formy powyższej, o tym łatwo się przekonać. Paradoks Russella otrzymamy z formy (P), kładąc $\Phi = M$ (mnogość wszystkich mnogości), zaś M' jako mnogość wszystkich częściowych mnogości Φ; wtedy, położywszy stosunek φ jako identyczność, otrzymujemy paradoks Russella. Paradoks Burali-Fortiego powstaje z formy (P) przez założenia: $\Phi = W$, M' = mnogość częściowych mnogości W, wliczając w to W; wreszcie φ tak, jak zostało ono zdefiniowane w formie Goescha.

Należy jednak stwierdzić pewien nadmiar w założeniach formy (P). Oba omawiane paradoksy powstaną także z takiej formy (P'), którą otrzymamy z formy (P), nie przyjmując wcale $M' \sim \Phi$. I tak w paradoksie Burali-Fortiego wystarczy dla powstania jego założenie relacji φ o własnościach następujących: $\varphi(m) = \tau$, jeśli $A(m)$ jest mnogością typu τ; relacja ta zaś bynajmniej nie może być podstawą równoważ-

---

[49] G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, „Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge" 1(4), 1906, twierdzenie XXXIII.

[50] K. Grelling, L. Nelson, *Bemerkungen*, s. 306.

[51] Tamże.

[52] Tzn. M' jest pewną rodziną podzbiorów M (przyp. red.).

[53] Tzn. Φ jest przeciwdziedziną przyporządkowania φ (przyp. red.).

ności wiązanych nią mnogości: nie ustala przyporządkowań jedno-jednoznacznych. W paradoksie znowu Russella ustalamy między częściowymi mnogościami mnogości M odpowiedniość, według której każdemu m odpowiada pewne μ, ale niekoniecznie na odwrót, nie musimy bowiem elementów zbioru Φ uważać za jego częściowe mnogości.

Musi tedy każdemu m odpowiadać jedno i tylko jedno $\varphi(m)$, mogą się jednak znaleźć takie elementy zbioru Φ, które żadnemu m według prawa φ nie odpowiadają (paradoks mnogości wszystkich mnogości) lub też taki element zbioru Φ, który odpowiada dwóm lub więcej m (paradoks Burali-Fortiego).

W razie gdy $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = \kappa$, tj. gdy jeden element zbioru Φ odpowiada dwóm elementom zbioru M', podział Φ na klasę Y i X nie jest przez definicję zawartą w formie (P) należycie zdefiniowany. Jeżeli bowiem dane κ spełnia $\varphi(m_1) = \kappa$ i $\varphi(m_2) = \kappa$, wówczas nie wiadomo, czy κ zaliczyć do X, jeżeli spełnia jedną tylko z relacji $\kappa \in m_1$, $\kappa \in m_2$, czy też dopiero wtedy, jeżeli spełnia obie.

Dalej zaś istnienie takich κ, które spełniając $\varphi(m_1) = \kappa$, $\varphi(m_2) = \kappa$, spełniają jeden przynajmniej ze związków $\kappa \in m$, zaś pozostałych nie spełniają, zagraża powstaniu paradoksu. Przypuśćmy bowiem, że takie κ zaliczymy do X; wówczas Y składa się z tych $\varphi(m)$, które nie spełniają żadnego ze związków $\varphi(m) \in m$, i z tych elementów zbioru Φ, które żadnego $\varphi(m)$ nie spełniają. $\varphi(Y)$ jest albo elementem X, albo elementem Y. Jeżeli jest elementem X, to albo spełnia $\varphi(Y) \in Y$, albo może $\varphi(Y) \in Y$ nie spełniać, jeżeli $\varphi(Y) = \kappa$, które też daje się przedstawić jako $\varphi(Y) = \varphi(m) = \kappa$ [dla pewnego $m \neq Y$][54], tj. jeżeli $\varphi(Y)$ jest wielu elementom zbioru M' przyporządkowane[55], [oraz jeżeli $\kappa \in m$]. Natomiast przypuszczenie, że $\varphi(Y) \in Y$, prowadzi do sprzeczności. Stąd wniosek, że $\varphi(Y)$ jest elementem X i nie zachodzi $\varphi(Y) \in Y$. Paradoksu więc nie ma. Podobnież, gdybyśmy owo κ zaliczyli do Y, to przypuszczenie, że $\varphi(Y) \in X$, prowadzi do sprzeczności, ale $\varphi(Y) \in Y$ jest zupełnie możliwe. Istnienie więc takich elementów Φ, które do niektórych przyporządkowanych im elementów zbioru M' należą, do innych zaś nie, uniemożliwia powstanie paradoksu. Natomiast sama równość $\varphi(m) = \varphi(m')$ paradoksowi nie przeszkadza, byleby wobec powyższego $\varphi(m) \in m$ pociągało za sobą $\varphi(m') \in m'$ i odwrotnie.

Z powyższych wywodów wynika, że związek φ musi posiadać następujące właściwości:

I°. Dla każdego m, $\varphi(m)$ musi posiadać sens.

II°. Przy danym m nie mogą istnieć $\alpha \neq \beta$ oba spełniające $\alpha = \varphi(m)$, $\beta = \varphi(m)$.

III°. Jeżeli $\varphi(m) = \varphi(m')$ i $\varphi(m) \in m$, to i $\varphi(m') \in m'$.

---

[54] W maszynopisie: „które też daje się przedstawić jako $\varphi(Y) = m$” („$\varphi(Y) = m$” dopisane jest ręcznie, tak jak w wypadku większości innych symboli) (przyp. red.).

[55] Tzn. jeśli Y nie jest jedynym argumentem, dla którego φ przyjmuje wartość κ (przyp. red.).

Są to cechy, które wystarczają i są niezbędne dla zbudowania paradoksu. Należy się przekonać, czy nasze paradoksy czynią zadość tym warunkom.

W paradoksie Russella φ jest stosunkiem identyczności, który oczywiście spełnia przy jakimkolwiek m warunek I°. Gdyby $\alpha = \varphi(m)$, $\beta = \varphi(m)$, tj. $\alpha = m$, $\beta = m$, to nie mogłoby $\alpha \neq \beta$. Warunek II° jest [więc] też spełniony. Wreszcie i III°, albowiem jeżeli danemu m przyporządkowano właśnie to samo m, czyli $\varphi(m) = m$, to nie może się zdarzyć $m \neq m'$, zaś $\varphi(m) = \varphi(m')$.

Paradoks Burali-Fortiego definiuje $\varphi(m)$ jako typ porządkowy zbioru $A(m)$. I°. Według twierdzenia XXXIII u Hessenberga[56] dla każdego m (mnogość liczb porządkowych) istnieje tak zdefiniowane $\varphi(m)$, czyli $\varphi(m)$ zawsze ma sens. II°. Przy danym m jest możliwe tylko jedyne $\varphi(m)$, albowiem gdyby ich było więcej, musiałyby istnieć dwie różne liczby bezpośrednio po m następujące, czyli najmniejsze spośród większych od którejkolwiek z liczb zbioru m. Przypuśćmy, że byłyby to liczby α i β; gdyby $\alpha \neq \beta$, moglibyśmy założyć, że $\alpha > \beta$. Ale α nie może być wtedy najmniejszą w zbiorze, do którego należy także β, wbrew definicji. Warunek II° jest więc też spełniony. Wreszcie jest też spełniony warunek III°, ponieważ jeśli $\varphi(m) = \varphi(m')$ i $\varphi(m) \in m$, to $\varphi(m') \in m'$. Ponieważ — według praw logiki — sąd fałszywy jest racją dla każdego sądu, przeto z sądu $\varphi(m) \in m$ wynika wszystko, a więc i $\varphi(m') \in m'$. Że zaś i $\varphi(m) \in m$ jest sądem fałszywym, to wynika stąd, że $\varphi(m)$ jest zdefiniowany jako liczba porządkowa zbioru $A(m)$, która nie może być w m nigdy zawarta.

Istnieje jeszcze inne ogólne sformułowanie paradoksów grupy pierwszej, podane przez B. Russella[57]:

> Przypuśćmy, że mamy pewną własność ϕ i funkcję f taką, że jeżeli ϕ przysługuje wszystkim elementom zbioru u, to $f(u)$ istnieje, posiada własność ϕ i nie jest elementem u; wówczas przypuszczenie, że istnieje takie w, które jest zbiorem wszystkich przedmiotów posiadających cechę ϕ, prowadzi do wniosku, że $f(w)$ zarazem posiada i nie posiada cechy ϕ[58].

Wywiedziemy z tej formy paradoks Russella i Burali-Fortiego.

[Paradoks Russella.] Niech u oznacza jakikolwiek zbiór klas sobie niepodporządkowanych, niech dalej $f(u) = u$, zaś ϕ niech oznacza cechę charakteryzującą klasy niepodporządkowane. Przy tych założeniach $f(u)$ posiada wszystkie w ogólnej formie Russella żądane właściwości. Więc:

I°. $f(u)$ istnieje zawsze, jeżeli istnieje u. Jest to oczywiste wobec $f(u) = u$.

II°. $f(u)$ nie jest elementem u, a to dlatego, że wtedy u [$= f(u)$] musiałoby być jednym ze swoich elementów. Ale wszystkie elementy u są klasami sobie niepodporządkowanymi. Byłoby wtedy i u jakąś klasą sobie

---

[56] G. Hessenberg, *Grundbegriffe*.

[57] B. Russell, *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, „Proceeding of the London Mathematical Society” 4(14), 1906, s. 29-53 (cyt. za B. Russell, *Les paradoxes de la logique*, „Revue de Métaphysique et de Morale” 14(5), 1906, s. 634).

[58] Russell sam zastosowania formuły nie podaje.

niepodporządkowaną i nie mogłoby być identyczne z żadnym ze swoich elementów. Przypuszczenie zatem, że u jest jednym ze swoich elementów prowadzi do własnego zaprzeczenia, jest zatem mylne. Stąd też i przypuszczenie, że $f(u)$ jest jednym z elementów u, jako rację fałszywej konsekwencji, musimy odrzucić.

III°. $f(u)$ posiada ϕ, gdyby go bowiem nie posiadało, to musiałoby być jednym z elementów u[59], ale wtedy — *ex definitione* tych elementów — musiałoby ϕ posiadać.

Niech w oznacza zbiór wszystkich klas sobie niepodporządkowanych, czyli wszystkich przedmiotów o cesze ϕ. Wówczas $f(w)$ posiada ϕ, cośmy dla wszelkiego u udowodnili, zarazem jednak nie należy do w (wobec własności II°), czyli nie posiada ϕ. Znaczy to, że klasa wszystkich klas sobie niepodporządkowanych jest klasą sobie niepodporządkowaną i nie jest żadną klasą sobie niepodporządkowaną.

Paradoks Burali-Fortiego otrzymamy, kładąc: u — klasa liczb porządkowych, $f(u)$ — liczba porządkowa bezpośrednio po u następująca. Posiadać ϕ — być jakąkolwiek liczbą porządkową. I°. $f(u)$ istnieje jeżeli istnieje u[60]. II°. $f(u)$ nie jest elementem u[61]. III°. $f(u)$ posiada ϕ (*ex def.*). Jeżeli w — zbiór wszystkich liczb porządkowych, wówczas $f(w)$ według I° istnieje, według II° nie jest elementem w, zatem nie posiada ϕ. Zatem $f(w)$ zarazem jest i nie jest liczbą porządkową.

Forma Russella da się wyprowadzić z formy Grellinga i Nelsona (przy oznaczeniach formy Nelsona). Połóżmy mianowicie $M' = U + V$, gdzie m należy do V, jeżeli $\varphi(m)$ jest elementem m, zaś do U, jeżeli $\varphi(m)$ nie jest elementem m. Zbiór Φ składa się ze wszystkich $\varphi(v)$ i $\varphi(u)$, gdzie v jest jakimkolwiek elementem V, zaś u — elementem U. Według formy (P) jest bowiem — na podstawie stosunku φ — $M' \sim \Phi$, przeto suma $\Sigma\varphi(v) + \Sigma\varphi(u)$ (suma logiczna) wyczerpuje Φ.

Jest rzeczą oczywistą, że zbiór $\Sigma\varphi(v)$, zbiór wszystkich $\varphi(v)$ (Σ jest znakiem sumy logicznej w interpretacji klasowej), jest identyczny ze zbiorem X w formie (P). Zbiór zaś $Y = \Sigma\varphi(u)$. Wobec powyższych założeń, „być zbiorem u" w formie Russella znaczy „być elementem U". „Posiadać cechę ϕ" w formie Russella znaczy w formie Grellinga „być elementem Y". „Być $f(u)$" znaczy „być $\varphi(u)$" (według formy (P.)). Rzeczywiście, jeżeli $\lambda = \varphi(u)$, to wówczas jest λ elementem Y (albowiem $Y = \Sigma\varphi(u)$), czyli posiada cechę ϕ (oznaczenie z formy Russella). Z drugiej strony, $\lambda = \varphi(u)$ nie jest elementem zbioru u, na podstawie definicji U. Wreszcie $\varphi(u)$ istnieje, jeżeli tylko istnieje u, albowiem [jest tak] dla wszystkich elementów zbioru M', a więc i dla wszelkiego u. $\varphi(u)$ zatem posiada sens i jest elementem zbioru Φ. Dowiedliśmy więc, że $\varphi(u)$ (forma Nelsona) posiada wszelkie cechy $f(u)$ (forma Russella). Przy tych założeniach w[62] jest

---

[59] Tzn. musiałoby być swoim własnym elementem, a z założenia $f(u) = u$ (przyp. red.).

[60] G. Hessenberg, *Grundbegriffe*, twierdzenie XXXIII.

[61] Tamże.

[62] Chodzi o w występujące w ogólnej formie Russella (a nie o w zdefiniowane szczegółowo jako klasa klas sobie niepodporządkowanych) (przyp. red.).

identyczne ze zbiorem Y, ponieważ w jest zbiorem wszystkich elementów Φ posiadających cechę ϕ. Paradoksalność zbioru w, względnie $f(w)$, jest już wobec tego konsekwencją paradoksalności $\varphi(Y)$.

Różnica sądów paradoksalnych w obu formach nie powinna nas uderzać. W formie (P) brzmią one: $\varphi(Y)$ nie jest elementem X i $\varphi(Y)$ nie jest elementem Y. W formie Russella: $f(w)$ jest elementem w i $f(w)$ nie jest elementem w. „$\varphi(Y)$" i „$f(w)$" są to wyrażenia identyczne, oznaczmy je literą K. „Być elementem Y" i „być elementem w" — są to również wyrażenia identyczne; będziemy tę własność wyrażali przez: „posiadać cechę ϕ". Wobec tego konkluzje obu form dają się przedstawić — (1) według (P): K nie nie posiada ϕ i K nie posiada ϕ; (2) według formy Russella: K posiada ϕ, K nie posiada ϕ. Jak widzimy, (1) i (2) są równoważnymi iloczynami logicznymi, zatem konkluzje obu form są równoważne.

Przez uwagi powyższe okazałem, że jeśli pewne przedmioty czynią zadość warunkom formy (P), to czynią też zadość warunkom zawartym w określeniach formy Russella; gdyby się okazało, że odwrotnie tak nie jest, wówczas moglibyśmy twierdzić, że forma Nelsona i Grellinga jest szczegółowym przypadkiem formy Russella. Tak jednak jest w istocie[63]. Forma (P) żąda bowiem, żeby M' był jakimś zbiorem częściowych[64] mnogości [zbioru] Φ, forma Russella warunkowi temu nie musi zadość czynić. Zbiór M' jest to suma logiczna $U + V$; otóż jeśli okażemy, iż według formy Russella chociażby elementy zbioru U nie potrzebują być częściowymi mnogościami zbioru Φ, to okażemy przez to, że forma Russella nie czyni zadość warunkom formy (P). U jest to ogół zbiorów u. Że zbiory te nie muszą być częściowymi mnogościami, przekonamy się na przykładzie paradoksów grupy drugiej; paradoksy te dają się mianowicie ująć w formę Russella, nie podpadając pod formę Nelsona i Grellinga. Wynika stąd, że forma Nelsona i Grellinga jest szczegółową postacią formy Russella. Formy te jednak staną się równoważne, jeżeli nie będziemy zakładać, że M' jest zbiorem częściowych[65] mnogości [zbioru] Φ, ale jakimś zbiorem mnogości m spełniających $\varphi(m) \in \Phi$[66].

7. Paradoksy grupy drugiej charakteryzują się tym, że sądy paradoksalne są typu: x daje się pewnymi środkami zdefiniować i nie daje się nimi zdefiniować. Należą tu paradoksy Richarda, Königa i Berry'ego, przy czym ten ostatni już raczej nie należy do teorii mnogości, ponieważ można go też sformułować bez pojęć i twierdzeń teorii mnogości.

Paradoks Richarda został przezeń sformułowany w następujący sposób:

[63] Tzn. forma Nelsona i Grellinga jest szczególnym przypadkiem formy Russella (przyp. red.).

[64] W maszynopisie: „częściowym". Chodzi jednak o pewną rodzinę podzbiorów zbioru Φ, a nie o podzbiór zbioru Φ. Poprawka nie jest konieczna, jeśli Ajdukiewicz używa tu wyrażenia „zbiór częściowy" na oznaczenie zbioru częściowych mnogości, czyli podzbiorów (przyp. red.).

[65] W maszynopisie: „częściowym" — jak wyżej (przyp. red.).

[66] W maszynopisie: $\varphi(m) = \varphi$ (przyp. red.).

Wypiszmy wszystkie układy dwójkowe dwudziestu sześciu liter alfabetu francuskiego, porządkując te układy alfabetycznie, w dalszym ciągu wszystkie układy trójkowe uporządkowane według alfabetu, dalej czwórkowe itd. Układy te mogą zawierać tę samą literę powtarzającą się kilka razy: są to kombinacje z powtórzeniami. […] Ponieważ wszystko, co się da napisać za pomocą skończonej ilości wyrazów, jest układem liter, przeto wszystko, co się da napisać, będzie się zawierało w tablicy, dla której właśnie wskazaliśmy sposób tworzenia. […] Usuńmy wszystkie kombinacje spośród powyższych, które nie są definicjami liczb. Niech u_1 będzie pierwszą z liczb zdefiniowanych przez jedną kombinację, u_2 — drugą, u_3 — trzecią itd.

Tym sposobem ułożono w porządku oznaczonym wszystkie liczby zdefiniowane za pomocą skończonej liczby słów. Zatem wszystkie liczby dające się zdefiniować za pomocą skończonej ilości słów tworzą zbiór przeliczalny. A oto sprzeczność: można zdefiniować liczbę nie należącą do tego zbioru.

« Niech p będzie n-tą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego n-tej liczby zbioru E; utwórzmy liczbę, mającą 0 jako całość, a jako n-tą cyfrę dziesiętną p+1, jeżeli p nie jest równe 8 ani 9, a 1 w razie przeciwnym ». Ta liczba N nie należy do zbioru E. Gdyby bowiem była n-tą liczbą zbioru E, wówczas jej n-ta cyfra dziesiętna byłaby n-tą cyfrą tej liczby, a tak nie jest. Nazywam G grupę liter w cudzysłowie « … » zawartą. Liczba N jest zdefiniowana przez wyrazy grupy G, zatem przy pomocy skończonej ilości wyrazów; powinna więc należeć do zbioru E. Atoli widzieliśmy, że nie należy. Na tym polega sprzeczność[67].

8. Paradoks Königa[68] został przezeń sformułowany tak, że dotyczy tylko zbioru liczb rzeczywistych uporządkowanego według wielkości. Można go jednak rozszerzyć dla wszelkiej mnogości dobrze uporządkowanej.

Skończonych definicji liczb rzeczywistych jest nie więcej niż skończonych układów liter alfabetu wraz z przerwą między wyrazami, czyli nie więcej niż $\aleph_0$. Każdej z liczb rzeczywistych należącej do zbioru E składającego się z liczb rzeczywistych dających się w sposób skończony zdefiniować odpowiada jedna lub więcej definicji. Ponieważ zbiór wszystkich definicji jest dobrze uporządkowany (i przeliczalny), przeto i każdy zbiór definicji określających tę samą liczbę rzeczywistą posiada element pierwszy. Przyporządkujmy danej liczbie rzeczywistej ze zbioru E tę liczbę naturalną, która jest numerem pierwszej spośród definicji liczby e. Tym sposobem, każdej liczbie rzeczywistej dającej się w sposób skończony zdefiniować, została przyporządkowana jednoznacznie pewna liczba naturalna (numer pierwszy spośród jej definicji) (1). Ale jest i odwrotnie. Każdy element omawianego zbioru daje się za pomocą symboli Königa przedstawić jako ciąg nieskończony (a_1, a_2, …, a_k, …), gdzie a_k jest pewną liczbą naturalną. Przy innej definicji kontinuum można każdemu elementowi kontinuum przyporządkować taki ciąg. Stąd jeżeli a jest jakąkolwiek

[67] I. Richard, *Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue des Sciences*, „Acta Mathematica” 30(3), 1906, s. 295-296.

[68] J. König, *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem*, „Mathematische Annalen” 61(1), 1905, s. 156-160 oraz J. König, *Sur les fondements de la théorie des ensembles et le probleme du continu*, „Acta Mathematica” 30(4), 1906, s. 329.

liczbą naturalną, to $(a, a, \ldots, a, \ldots)$ definiuje w sposób skończony pewien element. Każdej przeto liczbie naturalnej odpowiada pewien element ze zbioru E (2).

Jeśli więc μ jest mocą E, otrzymujemy wobec (1) i (2): $\mu = \aleph_0$. Ponieważ jednak dalej kontinuum nie jest przeliczalne, muszą przeto istnieć takie jego elementy, które nie dają się w sposób skończony zdefiniować. Zbiór wszystkich tych elementów musi zawierać element pierwszy, ponieważ jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Ale wyrażenie „pierwszy spośród elementów kontinuum nie dających się w sposób skończony zdefiniować" określa jednoznacznie pewien przedmiot, który należy do zbioru $F = C–E$ (C — kontinuum). Jako taki jest jednak ten element zdefiniowany za pomocą skończonych środków i należy do zbioru E. Element ten zarazem należy do E (jest środkami skończonymi zdefiniowany) i należy do F (nie jest skończonymi środkami zdefiniowany).

König sam[69] nie sądzi, żeby paradoks tutaj powstawał. Zdaniem jego argumentacja powyższa wykazuje jedynie, że kontinuum nie może być dobrze uporządkowane. W rzeczy samej, jeżeli zechcemy odrzucić to założenie, paradoksu nie będzie. Atoli powstaje wtedy paradoks inny, mianowicie paradoks stwierdzający, że kontinuum nie jest dobrze uporządkowane (według dowodu powyższego) i kontinuum jest dobrze uporządkowane (według dowodu Cantora).

Paradoks ten można rozszerzyć na wszystkie mnogości dobrze uporządkowane nieprzeliczalne Φ. Skoro bowiem skończonych definicji jest nie więcej niż $\aleph_0$, to przeto i mnogość E zdefiniowanych w sposób skończony elementów mnogości Φ jest mocy nie większej niż $\aleph_0$. Stąd muszą istnieć elementy mnogości Φ nie dające się w sposób skończony zdefiniować; niech ich zbiór nazywa się $F = \Phi–E$. Wyrażenie „pierwszy spośród elementów F" definiuje przedmiot K, który zarazem jest elementem F i nie jest elementem F. Można by więc analogicznie, jak wyżej König, przyjąć, że nie ma mnogości dobrze uporządkowanych nieprzeliczalnych.

9. Paradoksem zupełnie analogicznym jest paradoks Berry'ego[70]. Liczba głosek w wyrazach wzrasta na ogół w miarę jak wyrażają one coraz to większe liczby naturalne. Liczba liczb, które dadzą się zdefiniować za pomocą 100 albo mniej niż 100 głosek (nazwijmy ich zbiór E), jest skończona. Zatem muszą istnieć liczby, które nie dają się zdefiniować za pomocą nie więcej niż 100 głosek (zbiór ich niech będzie F). Między nimi musi się zawierać pierwsza i to najmniejsza, gdyż zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany według wielkości. Zatem wyrażenie „najmniejsza spośród liczb nie dających się zdefiniować za pomocą nie więcej niż 100 głosek" definiuje pewną liczbę, która należy do zbioru F. Z drugiej strony, liczba ta jako zdefiniowana wyrażeniem ujętym w cudzysłów, a więc wyrażeniem składającym się z nie więcej niż 100 głosek, należy do zbioru E. Można by stąd wywieść, że i zbiór liczb naturalnych nie jest dobrze uporządkowany. Wtedy paradoks zniknie, powstanie jednak paradoks inny.

---

[69] Tamże.

[70] Por. B. Russell, N. Whitehead, *Principia*, s. 63 oraz L. Chwistek, *Zasada sprzeczności*, s. 13.

10. Ogólna forma paradoksów grupy drugiej da się w sposób następujący przedstawić. Niech M będzie zbiorem definicji — czyniących zadość pewnym warunkom c — niektórych tylko elementów zbioru Φ. Klasa tych elementów zbioru Φ niech się nazywa V. Jeżeli istnieje takie wyrażenie K, które czyni zadość warunkom c i określa jednoznacznie pewien element zbioru Φ nie należący do zbioru V, wówczas przedmiot przez K zdefiniowany zarazem jest przez definicję ze zbioru M określony (ze względu na formę wyrażenia K) i nie jest przez definicję ze zbioru M określony, nie należąc do zbioru V.

Z formy tej dają się wyprowadzić wszystkie trzy wyżej wymienione paradoksy. Niech M będzie zbiorem wszystkich definicji liczb rzeczywistych; warunki c spełnia dane wyrażenie, jeżeli jest definicją liczby rzeczywistej. Wówczas wyrażenie G z paradoksu Richarda spełnia warunki określające w powyższej formie K. Tak powstaje paradoks Richarda. Kładąc M identyczne ze zbiorem wszystkich definicji elementów zbioru dobrze uporządkowanego Φ, zaś K z pierwszym elementem zbioru Φ–V, otrzymamy paradoks Königa. Wreszcie, przez założenia: M — zbiór definicji liczb naturalnych o nie więcej niż 100 literach, K — najmniejsza spośród liczb nie dających się zdefiniować za pomocą nie więcej niż 100 głosek, dochodzimy do paradoksu Berry'ego.

11. Wyżej sformułowane paradoksy dają się wszystkie sprowadzić do jednej formy. Jest nią podana w paragrafie 6 forma Russella[71]. Widzieliśmy, że można ją traktować jako schemat paradoksu Russella i Burali-Fortiego, obecnie przekonamy się, że obejmuje ona sobą także paradoksy grupy drugiej.

Załóżmy za u przeliczalny zbiór definicji liczb rzeczywistych składających się ze skończonej ilości słów (posiadać cechę ϕ — być definicją liczby rzeczywistej składającą się ze skończonej ilości słów). Niech p oznacza n-tą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego istotnie nieskończonego n-tej liczby zbioru liczb rzeczywistych zdefiniowanych przez elementy zbioru u. Połóżmy teraz za $f(u)$ wyrażenie „liczba mająca na miejscu całości 0, zaś na n-tym miejscu dziesiętnym p+1, jeżeli p jest mniejsze od 8, zaś 1 w wypadku przeciwnym". Tak określone $f(u)$ posiada cechę ϕ (jest skończoną definicją liczby rzeczywistej). Dalej, $f(u)$ nie jest elementem zbioru u, bo różni się od każdego z nich tym miejscem dziesiętnym [definiowanej liczby], którego numer nosił dany element w zbiorze u. Wobec tego, skoro w będzie zbiorem wszystkich definicji o cesze ϕ (składających się ze skończonej ilości liter), to $f(w)$ będzie wyrażeniem G. Powyższe więc założenia dają paradoks Richarda.

Założenia: u — jakiś zbiór skończonych definicji elementów zbioru dobrze uporządkowanego Φ oraz $f(u)$ — wyrażenie „pierwszy spośród nie dających się zdefiniować za pomocą żadnego elementu zbioru u element zbioru dobrze uporządkowanego Φ" sprowadzają formę Russella do paradoksu Königa. „Posiadać cechę ϕ" znaczy tu: „być skończoną definicją jakiegoś spośród elementów [Φ]". Każdy z ele-

[71] Odnośniki do stron maszynopisu zastąpiono w całym tekście odwołaniami do numerów paragrafów (przyp. red.).

mentów zbioru *u* cechę tę posiada. Nadto *f*(*u*) jest również definicją skończoną jednego z elementów *Φ*, posiada więc cechę ϕ, a nadto nie jest elementem *u*. Przy założeniach tych *w* oznacza zbiór wszystkich przedmiotów o cesze ϕ, tj. wszystkich skończonych definicji elementów zbioru *Φ*; *f*(*w*) jest tedy wyrażeniem „pierwsza spośród liczb zbioru *Φ*, nie dających się zdefiniować w sposób skończony", zarazem więc posiada ϕ (jest definicją skończoną jednego z elementów *Φ*) i nie posiada ϕ.

Paradoks Berry'ego otrzymamy przez założenie: *u* — jakiś zbiór definicji liczb naturalnych o nie więcej niż 100 głoskach, *f*(*u*) — „pierwsza spośród liczb nie dających się zdefiniować za pomocą żadnego z elementów zbioru *u*", posiadać ϕ — być definicją liczby naturalnej o nie więcej niż 100 głoskach. Tak więc podana w paragrafie 6 ogólna forma Russella jest ogólną formą wszystkich paradoksów.

III

12. Wobec podanej przez nas na wstępie definicji paradoksu, możemy szukać rozwiązania paradoksów w dwóch kierunkach. Aby rozumowanie było paradoksem danej nauki, potrzeba i wystarcza, iżby z założeń z punktu widzenia danej nauki i logiki prawdziwych wynikały konsekwencje antylogiczne. Skoro zaś tego potrzeba, aby paradoks powstał, to brak tych właściwości pozbawi rozumowanie charakteru paradoksalnego. Pierwszy sposób rozwiązania będzie więc polegał na okazaniu, że z założeń danej nauki — w tym wypadku teorii mnogości — rezultat antylogiczny nie wynika, drugi na wykazaniu, że założenia, na których się paradoksalny rezultat opiera, z punktu widzenia teorii mnogości lub ogólnologicznego nie są dopuszczalne.

Pierwszy sposób rozwiązania nazwiemy rozwiązaniem właściwym, drugi — usunięciem paradoksu. Naturalnie, możliwa jest kombinacja obu tych typów rozwiązań. Rozwiązania te są jednak wszystkimi możliwymi, albowiem trzecia możliwość, polegająca na okazaniu, że rezultaty nie są antylogiczne, sprowadza się do tego typu rozwiązania, które nazwaliśmy rozwiązaniem właściwym paradoksu. Okazując bowiem, że dane rozumowanie nie prowadzi do wyniku antylogicznego, okazujemy, że albo rezultatu tego rozumowania w ogóle nie ma, albo że nie jest on antylogiczny; że więc w żadnym razie rezultat nie jest antylogiczny; ale i odwrotnie, jeśli okażemy, że rezultaty rozumowania nie są antylogiczne, okazujemy tym samym, że sądy antylogiczne nie mogą być rezultatem danego rozumowania. Tak więc wymieniony trzeci możliwy sposób rozwiązania paradoksów sprowadza się do pierwszego jako równoważny.

13. Pierwszym z rozwiązań, którymi się zajmiemy, jest rozwiązanie Poincarégo[72]. Powołuje się on tam na rozwiązanie, którym Richard zakończył artykuł publikujący

[72] H. Poincaré, *Les mathématiques et la logique*, „Revue de Méthaphysique et de Morale" 14(3), 1906, s. 307n. Rzecz ta została w skróceniu przedrukowana w zbiorze: H. Poincaré, *Nauka i metoda* (tłum. M. H. Horwitz), nakład Jakóba Mortkowicza, G. Centnerszwer i ska, Warszawa 1911; Księgarnia H. Altenberga, Lwów 1911.

jego paradoks. Sądzi on wprawdzie, że rozwiązanie to tylko powtarza, atoli podaje rozwiązanie inne.

W rozdziale owego artykułu zatytułowanym „La vraie solution” podaje Poincaré dwa rozwiązania. Jedno z nich zarzuca paradoksom *quaternio terminorum*. Zdaniem Poincarégo, wszystkie paradoksy powstają przez to, iż raz definiuje się zbiór E[73] jako obejmujący wszystkie elementy o pewnej cesze ϕ, w których nie może się zawierać pojęcie samego zbioru E, a następnie o tym zastrzeżeniu zapominamy i, zdefiniowawszy G posiadające cechę ϕ, ale powołujące się na E, zaliczamy je bezprawnie do zbioru E, pojmując (bez zastrzeżeń) tym razem przez E zbiór elementów posiadających cechę ϕ. Więc w paradoksie Richarda E składa się z tych skończonych definicji liczb rzeczywistych, które nie powołują się na E[74]. Wyrażenie zaś G, określone w paragrafie 7, wprowadza pojęcie zbioru E. Podobnież w paradoksach Königa i Berry’ego zbiór E ma się składać ze skończonych (względnie nie więcej niż 100-głoskowych) definicji, ale takich, które nie wprowadzają pojęcia E; zatem kwestionowane wyrażenie G — „najmniejsza spośród liczb nie dających się zdefiniować w sposób skończony” (względnie „…za pomocą nie więcej niż 100 głosek”) — nie może należeć do zbioru E, a jeśli je mimo to do E zaliczamy, to czynimy to przez *quaternio terminorum*, podsuwając za zbiór E, mający się składać ze skończonych — ale nie wprowadzających pojęcia zbioru E — definicji, taki zbiór E, w którym zastrzeżenie o niewprowadzaniu pojęcia E odpada.

Podobnie ma się rzecz z paradoksem Burali-Fortiego. Zbiór W jest zdefiniowany jako zbiór tych liczb porządkowych, w których definicji nie jest użyte pojęcie W. Typ zaś porządkowy ξ mnogości W nie należy do W, ponieważ w definicji jego jest użyte pojęcie zbioru W. A jeśli ξ do W zaliczamy, to dzieje się to przez zmianę w znaczeniu, jakie nadajemy W.

Wreszcie w paradoksie Russella dzielimy klasę M wszystkich klas, w których definicji nie zawiera się pojęcie klasy M, na część X klas sobie podporządkowanych i część Y klas sobie niepodporządkowanych. Dlatego też nic dziwnego, jeśli klasa Y — klasa wszystkich klas sobie niepodporządkowanych — ani nie należy do X, ani do Y. Nie należy ona bowiem w ogóle do M, bo powołuje się na M, a więc też do żadnej części M nie należy, a jeśli Y mimo to do M zaliczamy, to zapominamy o zastrzeżeniu, że żaden z elementów zbioru M nie może zawierać w swej definicji pojęcia M. Y zaś jest zdefiniowane jako klasa tych wszystkich elementów zbioru M, które nie są sobie same podporządkowane, a więc w jego definicji zawiera się pojęcie zbioru M.

Na taki sposób rozwiązania można by odpowiedzieć, że jest to raczej przekręcenie paradoksu niż rozwiązanie. Nikt bowiem zastrzeżenia o nieużywaniu pojęcia zbioru w (z formy Russella) do definicji jego elementów w paradoksach nie wprowadza. Przecież w np. jest zbiorem wszystkich liczb porządkowych, bez wszelkich ograniczeń;

[73] E jest tu rozumiane jako zbiór definicji, a więc inaczej niż w sformułowaniu Richarda, w którym E to odpowiedni zbiór liczb rzeczywistych (przyp. red.).

[74] U Richarda E to odpowiedni zbiór liczb rzeczywistych (przyp. red.).

ogólnie w formie Russella jest *w* zbiorem wszystkich przedmiotów o cesze ϕ, bez wszelkich ograniczeń. Poincaré zaś zakłada, że zbiór *w* jest zbiorem wszystkich przedmiotów o właściwości ϕ prócz tych, które zawierają w definicji samo pojęcie *w*. Zdaniem jego jest takie zastrzeżenie konieczne, ponieważ w razie przeciwnym popełnilibyśmy inny błąd formalny — *circulus in definiendo*. Definicje, które ten błąd formalny popełniają, nazywa Poincaré „niepredykatywnymi". Definicja niepredykatywna jest to taka definicja, która określa *A* przez jego stosunek do *B*, które znów jest określone przez stosunek do *A*. Definicja taka nic nie określa, nie znaczy to jednak, żeby określała klasę pustą — nie określa ona nic, zatem też i żadnej klasy (jedynie wyrażenie; klasa przez definicję niepredykatywną określona, określa klasę pustą).

Gdyby zbiór *w*, o którym mowa w paradoksach, był określony jako zbiór wszystkich przedmiotów o cesze ϕ bez względu na to, czy ich definicja zawiera pojęcie całego zbioru, czy nie, wówczas definicja *w* byłaby niepredykatywna (bo wówczas *w* musiałoby zawierać owe przedmioty paradoksalne powołujące się na *w*), zatem nic by nie określała i paradoks nie mógłby powstać, operując pustymi dźwiękami, które nic nie znaczą.

Każda definicja jest, według Poincarégo, pewną klasyfikacją[75]. Mianowicie klasyfikacją polegającą na oddzieleniu przedmiotów spełniających definicję od pozostałych (jeżeli definicja odbywa się *per genus proximum et differentiam specificam*, oddziela ona elementy *generis proximi* posiadające *differentiam* od pozostałych). Atoli klasyfikacja pewnej klasy nie może być gotowa, póki nie rozważymy wszystkich przedmiotów tej klasy i nie zbierzemy wszystkich spełniających definicję („La classification ne pourra être définitive que lorsque nous aurons passé en revue toutes les phrases de moins de cent mots" mówi Poincaré o paradoksie Berry'ego[76]). Tym samym każda definicja jako klasyfikacja wymaga rozważenia wszystkich przedmiotów spełniających definicję. Jeżeli tedy niektóre przedmioty wymagają pojęcia definiowanego, to proces definiowania nigdy się nie skończy.

Pomijając owe ogólne uwagi o definicji, możemy stwierdzić, że według Poincarégo zbiór nie jest zdefiniowany, jeżeli jeden choćby z jego elementów nie jest zdefiniowany. Jeżeli tedy zbiór składa się z elementów, które zakładają pojęcie samego zbioru, wówczas ani definicja elementu, ani całego zbioru nie da się przeprowadzić. Jeśli tedy określamy dany zbiór *w*, to zawsze jako zbiór tych przedmiotów o cesze ϕ, które nie zakładają pojęcia *w*. Cytowane wyżej artykuły Poincarégo są bardzo popularne, ale mimo to, czy też dlatego, niejasne. Dlatego też (przynajmniej w części dlatego) i referat powyższy nie jest ścisły, atoli o ile myśl Poincarégo została w nim uchwycona, to stwierdzić musimy, że projektowane rozwiązanie Poincarégo nie jest wolne od błędu.

Zbiór *w* ma być koniecznie określany jako zbiór tych przedmiotów o cesze ϕ, które nie odwołują się do *w*, inaczej definicja będzie niepredykatywna. Rzuca się

[75] H. Poincaré, *La logique de l'infini*, „Revue de Méthaphysique et de Morale" 17(4), 1909, s. 465.

[76] Tamże, s. 462 (przyp. A.H.).

jednak w oczy, że definicja proponowana przez Poincarégo jest *par excellence* niepredykatywna. *w* jest określone przez pojęcie (B) — „zbiór przedmiotów o cesze ϕ, które nie odwołują się do *w*". Atoli pojęcie to, (B), jest określone (między innymi) przez swój stosunek do *w*. Wprost przeciwnie, tego właśnie odwoływania się do *w* unikają krytykowane przez Poincarégo definicje.

Wobec tego, o ile krytyka definicji niepredykatywnych jest słuszna, wówczas przesunięcie, jakiego Poincaré używa, aby wykazać *quaternio* w dowodach paradoksów, nie będzie bynajmniej dyktowane koniecznością unikania *petitionis principii*. Jeżeli bowiem błąd *petitionis principii* tkwi w pojęciach założonych w paradoksach, to tkwi on nie mniej w proponowanych przez Poincarégo pojęciach zastępczych.

Musimy zwrócić uwagę na wieloznaczność pojęcia definicji niepredykatywnych. Jeżeli (1) niepredykatywne definicje są definicjami określającymi pojęcie *A* przez jego stosunek do *B*, którego inaczej *nie można* określić jak przez *A*, wówczas w zupełności przyznać musimy słuszność oceny, jaką Poincaré o takich definicjach wygłasza. Nie ma jednakże Poincaré słuszności, jeśli niepredykatywnymi nazywa definicje (2) określające *A* jako pozostające w pewnym stosunku do *B*, które *jest* zdefiniowane (lub daje się, zaś nie musi) przez jego stosunek do *A*. Określmy np. zbiór cyfr jako zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, zaś 9 jako największy element tego zbioru; wówczas ta definicja 9 byłaby niepredykatywna, a więc nic by nie określała. Powtarzam, że gdyby inaczej zbioru cyfr określić nie było można jak przez wyliczenie elementów, wówczas krytyka Poincarégo byłaby uzasadniona, atoli definicja 9 jako największej spośród zbioru cyfr nadaje wyrazowi „9" jednoznaczny sens, a to dlatego, że pojęcie zbioru cyfr daje się inaczej niż przez wyliczenie elementów określić. Jeżeli *A* jest zdefiniowane przez *B*, ale posiadamy kryterium pozwalające stwierdzić, czy coś jest *B*, czy nie, niezależnie od *A*, wówczas może oprócz tej definicji (takie obustronne — pozytywne i negatywne — kryterium jest definicją) istnieć dowolnie wiele definicji określających *B* przez jego stosunek do *A*, a mimo to będzie *A* przez swój stosunek do *B* wystarczająco określone.

Gdyby wyrażenie „definicja niepredykatywna" posiadało sens drugi (2), wówczas każda definicja byłaby niepredykatywna. Każda bowiem polega na ustosunkowaniu definiowanego *A* do pewnego *B*, ale to *B* pozostaje zawsze w pewnym jednoznacznym stosunku do *A*, bo każda definicja musi się dać odwrócić, zatem daje się przez *A* określić.

Aby okazać, że definicje, na których się opierają paradoksy, są niepredykatywne w znaczeniu drugim, wystarczy uwaga, że zbiory dają się definiować przez ogół elementów. Ta okoliczność jednak, że definicje te są niepredykatywne w znaczeniu drugim, zdaniem naszym bynajmniej nie decyduje o ich poprawności. Na to, aby je wykluczyć spośród definicji poprawnych, trzeba udowodnić, że definicje te są niepredykatywne w znaczeniu pierwszym. Zdaje mi się, że definicje użyte faktycznie w paradoksach, *o ile odwołują się do poszczególnych elementów*, są niepredykatywne w znaczeniu pierwszym, gdyż między tymi elementami znajdują się i takie, których inaczej jak przez ich pewną relację do całego zbioru określić nie można.

Pojęcie np. G[77] w paradoksie Richarda nie daje się — zdaje się — inaczej określić jak przez odwołanie się do całego zbioru E[78]. Mimo to pojęcie zbioru E nie jest skazane na wykluczenie z zakresu pojęć poprawnie zdefiniowanych. Pojęcie zbioru E daje się bowiem zdefiniować bez odwoływania się do pojęcia G. A tym samym i pojęcie G nie zawiera błędnego koła. Według Poincarégo — wobec uwag dotyczących klasyfikacji i związanej z nią definicji — jest to jednak niemożliwe. Albowiem każdy zbiór jest dopiero wtedy określony, gdy wszystkie przedmioty należące do tego zbioru zostały rozważone. Tak więc zdaniem Poincarégo zbiór E nie mógłby być zdefiniowany niezależnie od swego elementu G.

Atoli nie decyduje to o samym pojęciu, można je bowiem określić także, nie odwołując się do poszczególnych elementów. Innymi słowy, kwestionuję założenie, że zbiór może być jedynie wtedy określony, gdy określone są jego elementy. Poucza nas bowiem praktyka, że nader często definiujemy zbiory, nim jeszcze określone zostały elementy. Nadto, gdyby tak było, wówczas nie moglibyśmy nigdy definiować liczb jako największych lub najmniejszych [elementów] danego zbioru, ponieważ każda z tych definicji byłaby niepredykatywna. Zermelo zauważa[79], że ze stanowiska, jakie zajmuje Poincaré, nie można by mówić o maksimum lub minimum pewnej ograniczonej mnogości, a tym samym mylnymi byłyby dowody matematyczne, które tymi pojęciami się posługują, jak np. Cauchy'ego dowód podstawowego twierdzenia algebry[80].

---

[77] W maszynopisie: „Pojęcie np. zbioru *G*".

[78] Wydaje się, że w akapicie tym (dopisanym ręcznie na oddzielnej kartce) E jest ponownie rozumiane jako zbiór definicji, a nie jako odpowiedni zbiór liczb rzeczywistych. Jeśli jednak E to zbiór liczb (jak u Richarda), to również wyrażenie „*G*" odnosi się tu do liczby N, a nie do jej definicji (przyp. red.).

[79] E. Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, „Mathematische Annalen" 65(1), 1908, s. 117.

[80] Poincaré przyznaje (*Réflexions sur les deux notes précédentes*, „Acta Mathematica" 32(1), 1909, s. 199), że gdyby jego teoria uniemożliwiała tak powszechnie w matematyce przyjęte dowody, to byłoby to ciężkim zarzutem przeciwko niemu. W dowodzie Cauchy'ego, że $F(x) = 0$ posiada zawsze pierwiastek, zauważa się, że $(F(x))$ jest stale dodatnie i że stale ma minimum, że dalej funkcja ciągła dosięga swojego minimum, i wreszcie dowodzi się, że $(F(x))$ nie ma innego minimum jak 0, skąd wynika, iż istnieje taki punkt dla którego $(F(x)) = 0$. Mówi się w tym dowodzie o: I° zbiorze E wartości $(F(x))$, II° jednej z tych wartości e, która jest mniejsza niż wszystkie inne, III° odpowiedniej wartości x. Definicja e figurująca w tym dowodzie jest niepredykatywna; e bowiem określamy przez jego stosunek do całego zbioru E, zaś zbiór — według założenia — jest określony przez wszystkie poszczególne elementy. Pojęcie e musiałoby być zarazem wcześniejsze od E i późniejsze. Poincaré sądzi jednak, że zarzutowi temu może się jego założenie oprzeć. Posługuje się przy tym następującym przekształceniem dowodu. Niech x będzie zmienną niezależną; niech y będzie jakąkolwiek wartością x, której część rzeczywista i urojona są liczbami wymiernymi. Niech E' będzie zbiorem wartości $(F(y))$. Niech e będzie minimum zbioru E'. Dowodzi się dalej, że istnieje taka wartość x niewymierna w ogóle i taka, że $(F(x)) = e$, i że e nie może być różne od 0. Tym sposobem uniknęliśmy błędnego definiowania, albowiem w definicji e występuje wyłącznie pojęcie zbioru E'. Mimo jednak uratowania tego dowodu, pozostaje w mocy zarzut, według którego stanowisko Poincarégo wyklucza definiowanie liczb jako największych lub najmniejszych elementów zbioru.

Wreszcie, oprócz powyższych argumentów, praktyka nas poucza, że doskonale rozumiemy i znakomicie zdefiniować możemy pojęcia różnych zbiorów nieprzeliczalnych, jakkolwiek na pewno istnieje nieprzeliczalna nawet mnogość elementów zbioru, które się zdefiniować nie dadzą.

Wszystko to wskazuje na to, że zbiory *w*, o które chodzi w paradoksach, nie muszą być określone niepredykatywnie. Skoro zaś np. zbiór *E* może być zdefiniowany inaczej niż przez elementy, to i owo *G*, które w paradoksie Richarda występuje, nie jest zdefiniowane niepredykatywnie w sensie pierwszym. Definicja *G* bowiem powołuje się wprawdzie na *E*, ale *E* może być inaczej określone niż przez każdy z jego elementów, a więc nie wymaga uprzedniego określenia każdego *e*, a więc i *G*.

Reasumując: *quaternio terminorum* zawierają tylko dowolnie[81] przez Poincarégo przeprowadzone przekręcenia paradoksów. Przesunięcie sprawy nie tylko nie jest uzasadnione, ale samo zawiera błąd. *Petitio principii* zawierają definicje pojęć zakładane przez paradoksy tylko przy założeniu, że elementy są przez zbiór zakładane. Założenie to jednak jest nie tylko nieuzasadnione, ale nawet sprzeczne z wieloma powszechnie przyjętymi sposobami definiowania. Należy uczynić następujące zastrzeżenie. Jeśli *petitio principii* w definiowaniu ma być w ogóle błędem, wówczas nie może ono polegać na tym, że *A* jest *prius* logicznym *B*, zaś *B prius* logicznym *A*. Oba te stosunki mogą bowiem zarazem zachodzić. Współczesność bowiem logiczna, czyli równoważność przedmiotów *A* i *B*, polega właśnie na tym, że oba przedmioty są dla siebie wzajemnie *prius*-ami. Błędem jest *petitio*, jeżeli w jakiś sposób czasowo (czy w ogóle [w sposób] nieodwracalny[82]) musiałoby *A* być przed *B*, zaś *B* przed *A*. W naszym wypadku *petitio principii* polegać by mogło np. na tym, że kryterium, czy coś jest *G*, byłoby zależne od kryterium, czy coś jest *E*, i odwrotnie. Czyli *wiedzieć* moglibyśmy, że *x* jest *G*, gdybyśmy wiedzieli wprzód, czy *y* jest *E*, atoli to moglibyśmy wiedzieć dopiero wtedy, gdybyśmy wprzód wiedzieli, że *x* jest *G*. Tak więc wiedza nasza o tym, czy *x* jest *G*, nie mogłaby się nigdy zacząć. W tym świetle jaśniej przedstawi się niesłuszność poglądu, że wszystkie elementy muszą być przed zbiorem zdefiniowane.

14. Inny błąd wytyka paradoksom Richard, ale zarzut swój odnosi jedynie do swego paradoksu. Twierdzi on[83], że sprzeczność zawarta w jego paradoksie jest pozorna. Zwróćmy się — mówi Richard — do tabeli naszych kombinacji (patrz wyżej, paragraf 7) przed wykreśleniem z niej tych, które żadnych liczb nie definiują. Grupa liter *G* jest jednym z tych uszeregowań, zatem znajdzie miejsce w naszej tablicy. Ale w miejscu, w którym *G* się znajdzie, nie będzie ono miało sensu. Chodzi tu bowiem o zbiór *E*, a ten dotąd nie jest określony. Sensu nabierze grupa *G* dopiero, gdy *E* sta-

[81] W maszynopisie: „dowolne" (przyp. red.).

[82] Uwaga umieszczona tutaj w nawiasie została w maszynopisie dopisana ręcznie między wierszami (przyp. red.).

[83] J. Richard, *Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences*, „Acta Mathematica" 30(1), 1996, s. 296.

nie się określone, zaś tego można dokonać tylko przez nieskończenie wiele liter. Nie ma zatem sprzeczności.

Zacytowałem prawie dosłownie odpowiedni ustęp. Można by się dopatrywać w nim tej myśli, że *G* nie ma sensu, póki go *E* nie nabierze, ale sensu nabierze *E*, gdy *G* sens posiądzie. Tak rozumie to Poincaré. Atoli nie sądzę, żeby taka była myśl Richarda. Wzmianka o tym, że *E* może być tylko przez nieskończenie wiele liter określone, wskazuje na coś innego. Mianowicie *G* jest definicją, która jednak jest niezupełna, ponieważ występuje w niej symbol *E*. Otóż, aby *G* stało się definicją, należy doń wstawić ten system liter, który definiuje *E*. Ale ten składa się z nieskończenie wielu liter. Zatem *G*, o ile sens posiada, składa się z nieskończenie wielu liter. Stąd liczba *N* przez *G* zdefiniowana na pewno nie należy do liczb zdefiniowanych przez elementy *E*[84], nie tylko z powodu znaczenia *G*, ale też i z powodu formy tego wyrażenia. Paradoksu więc nie ma.

Aby względem tego rozwiązania zająć stanowisko, wystarczy zauważyć, że mylne jest założenie, jakoby definicja *E* musiała się składać z nieskończenie wielu liter. Wszakże sam Richard temu przeczy; czytamy bowiem: „Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble *E* à l'aide des concidérations suivantes"[85]. Po słowach tych następuje ustęp składający się z piętnastu wierszy, po czym następują rozważania nad mnogością zbioru *E*. W owych piętnastu wierszach zawiera się też definicja *E*, zgodnie z zacytowaną przeze mnie zapowiedzią. Jakżeby bowiem zresztą inaczej mógł Richard różne właściwości tego zbioru *E* wykrywać, gdyby nie podał jego definicji. Że zaś w piętnastu wierszach mieści się na pewno skończona ilość liter, przeto *E* daje się w sposób skończony zdefiniować, więc też i *G* jest definicją skończoną, zatem z powodu swej formy należy do *E*, zaś przez swą treść do *E* nie należy.

U podstaw leży tu ten sam — zdaje się — błąd co u Poincarégo. Skoro *E* ma być zbiorem nieskończonym, to musi się jego definicja składać z nieskończonej liczby liter, bo musi dotyczyć wszystkich elementów zbioru. Krytykę tego poglądu starałem się podać wyżej.

15. Podobnie do Poincarégo, upatruje Russell błąd paradoksów w pewnego rodzaju błędnym kole[86]. Dla uniknięcia błędnych definicji wiodących do paradoksu stworzył Russell tzw. teorię typów logicznych. Aby jednak móc zreferować poglądy Russella, należy wprzód wyjaśnić szereg pojęć.

Pojęciem najważniejszym jest pojęcie funkcji propozycjonalnej. „Przez »funkcję propozycjonalną« — mówi Russell — nazywam coś, co zawiera zmienną *x* i wyraża sąd, ilekroć pewna wartość zostanie za *x* założona. […] Np. »*x* jest człowiekiem«

[84] A więc *E* jest tu rozumiane jako zbiór definicji, podczas gdy u Richarda *E* to odpowiedni zbiór liczb rzeczywistych (przyp. red.).

[85] Tamże, s. 295 (przyp. A.H.).

[86] B. Russell, *La théorie des types logiques*, „Revue de Métaphysique et de Morale" 18(3), 1910, s. 263-301 oraz B. Russell, A. N. Whitehead, *Principia*, t. 1, s. 63n.

albo »sin x = l« są to funkcje propozycjonalne". Podobnie jak w matematyce, zmienna, która w funkcji propozycjonalnej występuje, nazywa się jej argumentem, sądy zaś, które z funkcji powstają przez założenie różnych wartości za argument, nazywają się wartościami funkcji. Funkcje propozycjonalne będziemy oznaczać przez $f(\hat{x})$, $\varphi(\hat{x})$, … itp. i odróżniać od nieoznaczonej wartości funkcji znaczonej przez $f(x)$, $\varphi(x)$, …

Różnicę tę można uchwycić, jeśli się zważy, że $f(\hat{x})$ nie jest żadną zmienną, podczas gdy przeciwnie $f(x)$ jest zmienną. Dlatego też, gdy mówimy: „$f(x)$ jest sądem", wydajemy funkcję propozycjonalną, która zresztą się sprawdza dla wszelkich wartości x. Gdy jednak mówimy „$f(\hat{x})$ jest funkcją propozycjonalną", nie wydajemy funkcji, ale całkiem oznaczony sąd. Otóż twierdzi Russell, że funkcja nie posiada sensu, jeśli $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$, …, tj. każda z jej możliwych wartości, nie jest określona. Wynika stąd, że żadna funkcja nie śmie pośród swych wartości zawierać czegoś, co by zakładało samą funkcję. Gdyby bowiem tak było, nie moglibyśmy uważać przedmiotów oznaczonych wieloznacznie przez funkcję (tj. właśnie wartości funkcji) za określone, jak tylko pod tym warunkiem, że sama funkcja byłaby określona, podczas gdy przeciwnie — jak żeśmy właśnie widzieli — funkcja nie może być zdefiniowana, jak tylko pod warunkiem, że jej wartości są określone.

Wynika stąd dalej, że żadną wartością argumentu[87] funkcji nie może być coś, co ją samo zakłada. Albowiem wtedy istniałaby wartość funkcji, która by zależała od samej funkcji, a to, zdaniem Russella, być nie może. Nazwiemy też argumenty, dla których $f(\hat{x})$ posiada sens, możliwymi wartościami dla x. Jest to pierwszy, a zarazem najważniejszy wypadek zasady błędnego koła (*vicious circle principle*) mającej rozwiązać paradoksy. Zasadę tę formułuje Russell w tych słowach:

> Uważajmy grupę przedmiotów taką, że gdybyśmy o niej przypuścili, że da się ująć w całość, to musiałaby zawierać człony, które zakładają ową całość; otóż taka grupa nie daje się ująć w całość. Mówiąc zaś, że pewna grupa nie daje się ująć w całość, chcemy przede wszystkim wyrazić, że nie można nic z sensem orzec o wszystkich jej członach[88].

Właśnie zbiór wartości funkcji stanowi w wyżej wymienionym wypadku zbiór nie dający się ująć w całość. Twierdzi dalej Russell, że nie tylko nie może funkcja $f(\hat{x})$ mieć siebie samej lub jakiegoś od niej pochodzącego wyrażenia za argument, ale jeśli dwie funkcje $\varphi(\hat{z})$ i $\psi(\hat{z})$ dla jakiegoś a mają sens, to nie mogą być dla siebie wzajemnie argumentami i nie mogą mieć żadnego terminu wspólnego z funkcją, dla której obie mogą być argumentem. Wobec powyższego twierdzenia, że żadna funkcja nie może mieć nic od siebie zależnego za argument, staje się to jasne. Nawet możemy twierdzić, że żadne dwie funkcje nie mogą być dla siebie wzajemnie argumentami. Gdyby bowiem $\varphi(\hat{z})$ było możliwym argumentem $\psi(\hat{z})$, wówczas wobec tego, że funkcja zależy od swych wartości, funkcja $\psi(\hat{z})$ zależałaby od $\psi\{\varphi(\hat{z})\}$, a więc i od $\varphi(\hat{z})$, a jako taka nie mogłaby być argumentem dla $\varphi(\hat{z})$. Tym sposobem powstaje zada-

[87] Czyli wartością odpowiedniej zmiennej, np. x w $f(x)$ (przyp. red.).

[88] B. Russell, *La théorie des types*, s. 264 (przyp. A.H.).

nie, aby utworzyć hierarchię funkcji zależnie od tego, jakie są ich możliwe argumenty, aby utworzyć grupy funkcji dające się ująć w całość (*être totalisé*, *have a total*).

Jeśli tedy będę przez a rozumiał przedmioty proste — indywidua — a więc cokolwiek, co nie jest sądem ani funkcją propozycjonalną, wówczas — jak się zdaje — będę mógł utworzyć najniższą klasę w hierarchii funkcji propozycjonalnych, zaliczając do niej takie funkcje, które mają sens dla argumentów a. Dalej, do drugiej klasy zaliczymy wszystkie te funkcje, których możliwymi argumentami są funkcje klasy pierwszej; itd. Atoli ten sposób tworzenia hierarchii „typów logicznych" jest niemożliwy. A to dlatego, ponieważ wyrażenie „zbiór wszystkich funkcji, których możliwym argumentem jest x" (gdzie x jest jakąkolwiek zmienną) nie ma sensu. Pomyślmy bowiem funkcję $f(\varphi(\hat{x}), x)$ dwóch zmiennych — $\varphi(\hat{x})$ i x. Zatwierdźmy ją dla wszelkich możliwych wartości φ. Otrzymujemy tym sposobem funkcję jednej zmiennej x, $\varphi.f(\varphi(\hat{x}), x)$[89].

Mamy tu do czynienia z funkcją x, ale wobec tego, że funkcja ta zawiera zbiór całkowity funkcji $\varphi(\hat{x})$, przeto nie może być sama w tym zbiorze zawarta z powodu zasady błędnego koła. Wynika stąd, że zbiór wszystkich wartości $\varphi(\hat{x})$, o którym mowa w wyrażeniu $\varphi.f(\varphi(\hat{x}), x)$, nie jest zbiorem wszystkich funkcji, w których x może występować jako argument i że nie ma wcale zbioru wszystkich funkcji, w których x może występować jako argument. Trzeba więc typy ograniczyć w ten sposób, aby klasa składająca się z funkcji o danych możliwych argumentach, nie zawierała funkcji odwołujących się do całego typu. Te funkcje, które odwołują się do jakiegoś zbioru funkcji, zawierają jako zmienną pozorną funkcję danego zbioru. Funkcje, które nie zawierają żadnych zmiennych pozornych nazywa Russell matrycami.

Pierwszymi matrycami będą te, w których jako zmienne wystąpią tylko zmienne o zakresie indywiduów. Matryce te nazwiemy matrycami pierwszego rzędu. Zamieniając niektóre lub wszystkie zmienne w nich występujące na pozorne, nie wykroczymy przeciw wyżej sformułowanemu postulatowi, aby funkcja nie odwoływała się do całego zbioru funkcji, albowiem te zmienne pozorne, o których wyżej mowa, będą odwoływały się tylko do zbioru indywiduów. Matryce pierwszego rzędu i funkcje z nich otrzymane nazwiemy funkcjami rzędu pierwszego. Znaczyć je będziemy, pisząc: $\varphi!(\hat{x})$. Funkcjami rzędu drugiego nazwiemy te funkcje, które między swymi argumentami zawierają zmienne, których wartościami są funkcje rzędu pierwszego i żadne inne jak tylko funkcje rzędu pierwszego, i zmienne o zakresie indywiduów; zaś matrycami rzędu drugiego — takie funkcje rzędu drugiego, które nie zawierają żadnych zmiennych pozornych. Ogólnie, funkcje rzędu n będą to funkcje, które jako argumenty będą zawierały zmienne, których wartościami są funkcje rzędu n–1 i żadne inne [funkcje] jak tylko te, oraz zmienne, których wartościami są funkcje rzędu

[89] Przez „$x.\psi(x)$" oznaczamy sąd: ψ jest prawdą dla wszystkich x, przez „$(\exists x)\ \psi(x)$" — ψ jest prawdą dla niektórych x. Negację sadu p znaczymy „$\sim p$". W naszym wypadku zmienną jest funkcja φ (nie jej nieoznaczona wartość). Kiedy coś twierdzimy lub przeczymy o wszystkich lub niektórych przedmiotach danej zmiennej, wówczas zmienna ta nazywa się pozorną, albowiem funkcja staje się ze względu na tę zmienną sądem.

niższego niż n–1 lub indywidua (naturalnie nie muszą być stopnie niższe niż n–1 koniecznie reprezentowane).

Ważne jest jeszcze pojęcie funkcji predykatywnej. Funkcje predykatywne rzędu n są to funkcje, w których jako zmienna rzeczywista występuje przynajmniej jedna funkcja rzędu n–1 dla n większych od 1, zaś funkcjami predykatywnymi rzędu pierwszego są funkcje, w których występuje jedna przynajmniej zmienna rzeczywista o zakresie indywiduów.

> Uważajmy funkcję, której jedynym argumentem jest indywiduum. Funkcja ta zakłada co najwyżej całkowity zbiór indywiduów, […] ale żadnego zbioru funkcji. Jeżeli jednakże zawiera jakąś funkcję jako zmienną pozorną, to nie może być zdefiniowana, póki nie jest zdefiniowany pewien zbiór funkcji[90].

Każda funkcja rzędu n zakłada całkowity zbiór funkcji rzędu n–1, n–2, …, 2, 1 oraz zbiór indywiduów, wszystko to bowiem stanowi zakres jej możliwych zmiennych, a ten musi być określony, jeżeli funkcja ma być określona.

Jest rzeczą oczywistą i na żadną krytykę nie powinno zdaniem Russella natrafić, że jeżeli w funkcji zawiera się zmienna pozorna danego rzędu, to oczywiście musi być określony całkowity zakres funkcji danego rzędu, do którego należy funkcja występująca jako zmienna pozorna. Stąd wywodzi Russell wniosek, że w żadnej danej funkcji rzędu n nie śmie występować jako zmienna pozorna funkcja n rzędu. Albowiem wówczas owa dana funkcja n rzędu zakładałaby samą siebie dla własnej definicji, przez co definicja jej nigdy do skutku dojść by nie mogła. W hierarchii typów Russella wypadek taki jest niemożliwy, albowiem jeśli funkcja zawiera jako zmienną pozorną funkcję rzędu n, to sama przeto staje się funkcją n+1. Teoria typów usuwa też możliwość, aby funkcja danego rzędu posiadała za argument funkcję tego samego lub wyższego rzędu.

Należy wreszcie zauważyć, że hierarchia typów jest względna, tj. zależy od tego, który typ logiczny uznamy za najniższy.

Przystępując do rozwiązania paradoksu Russella, należy zauważyć, że według niego każdy sąd o klasie daje się zawsze sprowadzić do sądu o funkcji, która definiuje tę klasę, tj. do funkcji, którą sprawdzają wszystkie elementy tej klasy i tylko one. Taka klasa jest czymś, co zakłada funkcję, która ją definiuje. Stąd klasa nie może być, wobec zasady błędnego koła, argumentem tej funkcji, która ją definiuje, żeby przez to ta funkcja nie traciła zupełnie sensu. Jeśli przez „$\hat{z}.\varphi(z)$” oznaczymy klasę zdefiniowaną przez $\varphi(\hat{z})$ („$\hat{z}.\varphi(z)$” należy czytać: „te z, które sprawdzają $\varphi(\hat{z})$” — jest to coś innego niż „$z.\varphi(\hat{z})$”), to wyrażenie „$\varphi(\hat{z}.\varphi(z))$” musi być pozbawione sensu. Stąd żadna klasa ani sprawdza, ani nie sprawdza funkcji, która ją definiuje, a zatem ani jest, ani nie jest swoim własnym elementem, więc też wyrażenie „klasa tych klas, które nie są własnymi elementami” nie ma w ogóle sensu. Dlatego paradoks pochodzący stąd, że się przypuści, iż coś takiego jak przedmiot usymbolizowany zdaniem ujętym w cudzysłów jest klasą, znika jako oparty na mylnym założeniu.

[90] B. Russell, *La théorie des types*, s. 287 (przyp. A.H.).

Rozwiązanie paradoksu Burali-Fortiego zakłada cały szereg pojęć, które Russell w swym ogromnym trzytomowym dziele wprowadza. Właściwe rozwiązanie zawiera się dopiero w tomie trzecim na stronie 73, *256. Niżej podaję szkic rozwiązania[91]. Każdy zbiór dobrze uporządkowany jest relacją, zaś liczba porządkowa (według Russella) jest klasą tych zbiorów. Stąd zbiór dobrze uporządkowany liczb porządkowych jest relacją między klasami relacji i jest typu wyższego niż którykolwiek ze zbiorów, które są elementami rozważanej liczby ordynalnej. Zdefiniowana przez Burali-Fortiego „liczba porządkowa wszystkich liczb porządkowych" musi być liczbą porządkową wszystkich liczb porządkowych danego typu, a stąd musi być typu wyższego niż którakolwiek z tych liczb, zatem nie jest jedną z tych liczb ordynalnych i stąd nie ma w tym sprzeczności, że jest większa od którejkolwiek z nich. Jeśli ξ ma być liczbą porządkową wszystkich bez zastrzeżeń liczb porządkowych, to w ten sposób będąc określone, jest ξ w ogóle pozbawione sensu, gdyż zbiór wszystkich liczb ordynalnych nie daje się — w myśl zasady błędnego koła — stotalizować.

Rozwiązanie paradoksów Berry'ego i Königa opiera się na tych samych zasadach. Wyrażenie „pierwszy z elementów zbioru dobrze uporządkowanego nie dających się usymbolizować w sposób skończony" odnosi się do ogółu symbolów i samo jest jednym z tych symbolów. Stąd nie może być nic takiego jak zbiór wszystkich symbolów, w tym przynajmniej sensie, jak o tym mówi paradoks. Zbiór symbolów byłby określony przez ogół symbolów. Ale mielibyśmy między nimi symbole odwołujące się do ogółu, a zatem ani zbiór, ani te elementy nie mogą — wobec zasady błędnego koła — posiadać sensu. Należy rozróżnić, według Russella, symbole różnych rzędów, i to tak, że elementarnymi nazwiemy symbole będące prostymi konwencjami, symbole których znaczenie nie daje się zdefiniować, tj. sprowadzić do innych. Symbolami pierwszego rzędu nazwiemy tzw. deskrypcje rzędu pierwszego. Deskrypcją w ogóle nazywa Russell symbol „$(\iota x)\ (\Phi(\hat{x}))$", który należy czytać: „to x, które spełnia $\Phi(\hat{x})$, o ile istnieje tylko jedno x spełniające $\Phi(\hat{x})$". Tak np. jeżeli y jest pewnym człowiekiem, „(ιx) (x jest ojcem y)" jest deskrypcją pewnego oznaczonego człowieka. Deskrypcją pierwszego rzędu jest deskrypcja „$(\iota x)\ \varphi!(\hat{x})$", gdzie $\varphi!(\hat{x})$ jest funkcją rzędu pierwszego. Ogólnie mówiąc, symbol rzędu n jest to deskrypcja „$(\iota x)\ \varphi(\hat{x})$", gdzie $\varphi(\hat{x})$ jest funkcją rzędu n.

Wyrażenie „dający się usymbolizować" bez określenia rzędu symbolu, do którego się odnosi, nie może w żadnym kontekście mieć sensu[92]. Natomiast wyrażenie, w którym zawiera się zwrot „dający się usymbolizować przez symbole rzędu n", jest zawsze rzędu n+1. Tym sposobem antynomia znika. Podobnie w antynomii Richarda definicja G odwołuje się do ogółu definicji liczb, sama jednak jest definicją liczby. Zatem zbiór E nie może być, według zasady błędnego koła, stotalizowany, a każde

[91] B. Russell, A. N. Whitehead, *Principia*, s. 66.

[92] Zauważmy, że w paradoksie Königa chodzi o liczby „dające się zdefiniować", nie zaś o „dające się usymbolizować". Nie zmienia to jednak istoty rzeczy, albowiem zasada błędnego koła da to samo zastosowanie, zaś typy, o tyle ulegną zmianie, że klasa symbolów elementarnych odpadnie.

powiedzenie jego się tyczące jest pozbawione sensu. Jeżeli jednak w wyrażeniu *G* nie do ogółu definicji, ale do zbioru definicji typu *n* się odwołamy, to paradoks zniknie, albowiem samo wyrażenie *G* będzie definicją rzędu $n+1$.

Aby względem tego sposobu rozwiązywania zająć stanowisko, wystarczy rozważyć zasadę błędnego koła. Według Russella o żadnym z przedmiotów usymbolizowanych przez wyrażenia paradoksalne nie są prawdziwe dwa sądy sprzeczne i w ogóle żadne sądy nie są o nich prawdziwe, ponieważ żaden przedmiot nie jest usymbolizowany przez paradoksalne wyrażenie. Wyrażenia te nic nie symbolizują dlatego, że gdyby coś oznaczały, to oznaczałyby bądź zbiory, których według zasady błędnego koła nie można stotalizować, bądź przedmioty od tych zbiorów pochodzące. Zasada błędnego koła brzmi: żadne powiedzenie mające za przedmiot zbiór, którego jeden chociażby element zakłada cały zbiór, nie ma sensu. Jest to myśl ta sama, którą widzieliśmy wyżej u Poincarégo. Wydaje nam się jednak, że leżąca u podstawy myśl, iż żaden zbiór nie może, nie tracąc w ogóle wszelkiej treści, posiadać elementu, który jedynie daje się zdefiniować przez stosunek do całego zbioru, nie jest słuszna.

16. Rozwiązania Poincarégo i Russella polegają na kwestionowaniu pewnej przesłanki, mianowicie przesłanki, że (w formie Russella) „$f(w)$ posiada ϕ". W obu tych rozwiązaniach dowodzi się, że żaden sens ze znaczkiem „$f(w)$" nie jest złączony, że zatem powiedzieć „$f(w)$ posiada ϕ" nie ma sensu. Według formy Grellinga i Nelsona będzie przesłanka „*Y* jest elementem *M*" pozbawiona sensu, zaś przesłanka „Przedmiot oznaczony przez »*Y*« jest elementem *M*" jest mylna, „*Y*" bowiem w ogóle nic nie znaczy. A że, jak widzieliśmy, przesłanka ta jest niezbędna dla dojścia do skutku paradoksu, przeto — gdyby dowody tych uczonych były słuszne — paradoksy ujęte w formę Nelsona byłyby rozwiązane. Podobnie ma się rzecz z paradoksami grupy drugiej, jak to zresztą wyżej szczegółowo było przedstawione.

Rozwiązania te, o ile nie upatrują *quaternio terminorum* w rozumowaniu wiodącym do kontradykcji, dzięki odpowiedniemu przekręceniu paradoksu należą do typu drugiego rozwiązań: są usunięciem paradoksów, gdyż okazują, że założenia paradoksu są z punktu widzenia ogólnologicznego niedopuszczalne. Gdzie się przyjmuje, że nauka posiada w wystarczającej liczbie założenia pozwalające uniknąć potrzebnych dla paradoksu przesłanek, tam tego rodzaju rozwiązanie może się obejść bez reformy podstawowych pojęć danej nauki. Tak sądzi Poincaré, inaczej już Russell, który przez swoją teorię typów właściwie tak reformuje logikę, aby paradoksalne pojęcia nie powstały. Zawsze jednak widzi na starej logice ugruntowaną zasadę błędnego koła, na podstawie której paradoksy dają się usunąć, a teoria typów usprawiedliwić.

Inaczej postępują ci autorzy, którzy nie znajdują w starej nauce założeń wystarczających dla usunięcia niezbędnych premis z paradoksu. Sądzą oni, że z całą konsekwencją wiedzie dawna nauka do paradoksów. Ponieważ ich jednak należy unikać, przeto też należy starą naukę zreformować. Jest to przede wszystkim stanowisko Zermela.

Zermelo[93] uważa, że wobec paradoksów nic innego nie pozostaje jak:

> wychodząc od historycznie danej teorii mnogości, wyszukać zasady, które do ugruntowania tej matematycznej dyscypliny są potrzebne, w ten sposób, aby raz zasady te dość ciasno ograniczyć dla uniknięcia wszelkich sprzeczności, równocześnie jednak zostawić im taki zakres, iżby wszystko w tej nauce zachować, co w niej wartość posiadało.

Zermelo wychodzi od rozważania pojęć elementarnych, które mają zostać zdefiniowane przez postulaty. Do pojęć tych należy „zakres $\mathcal{B}$" (*Bereich*) do którego należy wszystko to i tylko to, o czym w dalszym ciągu mówić się będzie, że istnieje, więc „mnogości" i elementy jako przedmioty pozostające w stosunku znaczonym przez „$a \in b$". Nie są to bynajmniej definicje, ale objaśnienia znaków.

Trzy tylko podaje Zermelo definicje. Pierwsza z nich brzmi: „M nazywam częściową mnogością N, jeśli stale z $x \in M$ wynika $x \in N$", znacząc to: „M € N" (symbolika Schrödera). Drugą jest definicja „obcości" zbiorów (*Elementenfremd*). Dwa zbiory M i N są sobie obce, jeśli z $x \in M$ wynika x *non* $\in N$. Trzecią — definicja powiedzeń definitnych (*Definit*). Są to takie powiedzenia f, których prawdziwość lub mylność daje się logicznie z aksjomatów wywieść[94]. Powiedzenie klasowe $f(x)$ jest definitne dla klasy K, jeżeli z podstawienia któregokolwiek elementu klasy K za x w powiedzeniu $f(x)$, otrzymamy powiedzenie definitne. Każde powiedzenie $a \in b$ musi być zawsze definitne.

Zermelo podaje siedem aksjomatów, określających „zakres" (*Bereich*)[95].

Aksjomat I. Jeżeli stale $x \in M$ pociąga $x \in N$ i odwrotnie, wówczas $M = N$ (M i N oznaczają ten sam przedmiot).

Aksjomat II. (a) Istnieje mnogość zero (0), która nie spełnia żadnego $x \in 0$;
(b) Dla każdego przedmiotu a uważanego zakresu $\mathcal{B}$, istnieje mnogość $\{a\}$, która spełnia $a \in \{a\}$ i przy wszelkim $x \neq a$, x *non* $\in \{a\}$;
(c) Dla każdych dwu przedmiotów a, b, istnieje klasa $\{a, b\}$ spełniająca $a \in \{a, b\}$ i $b \in \{a, b\}$oraz dla $x \neq a$ i $x \neq b$, x *non* $\in \{a, b\}$.

Aksjomat III. Jeżeli powiedzenie klasowe $f(x)$ jest definitne dla wszelkich elementów mnogości M, wówczas zawiera M mnogość częściową M_f, która zawiera te i tylko te elementy M, dla których $f(x)$ jest prawdą.

Aksjomat IV. Każdej mnogości T odpowiada mnogość UT, która zawiera wszystkie i tylko mnogości częściowe T.

Aksjomat V. Każdej mnogości T odpowiada mnogość ST, która zawiera wszystkie i tylko elementy wszystkich elementów T.

---

[93] E. Zermelo, *Untersuchungen*, s. 261.
[94] Tamże, s. 262-263 (przyp. A.H.).
[95] Tamże, s. 263-266 (przyp. A.H.).

Aksjomat VI. Jeżeli T jest mnogością, której elementy są różnymi od 0 mnogościami i wzajemnie sobie obcymi, to ST zawiera przynajmniej jedną część, która z każdym elementem jeden i tylko jeden wspólny element posiada.

Aksjomat VII. Zakres $\mathcal{B}$ zawiera przynajmniej jedną mnogość taką, że 0 jest jej elementem, a nadto jeśli a jest jej elementem, to jest nim i $\{a\}$.

Z aksjomatów tych wyprowadza Zermelo wszystkie ważniejsze twierdzenia teorii mnogości. Nadto zaś — jak sądzi — usuwa z zakresu $\mathcal{B}$ wszystkie mnogości, które by mogły wieść do paradoksu. Tę zasługę ma posiadać aksjomat III. „Dzięki aksjomatowi III stają się możliwe definicje nowych mnogości, przez co zyskujemy nowy sposób definiowania mnogości w miejsce dawnego”[96], polegającego na zbieraniu w mnogość wszelkich przedmiotów dających się ująć pewnym prawidłem,

> od którego różni się ów nowy przez następujące ograniczenia. Po pierwsze, przy pomocy tego aksjomatu nie można nigdy mnogości definiować niezależnie, tylko zawsze jako mnogości częściowe pewnych już danych mnogości, przez co unikamy takich sprzecznych tworów jak „mnogość wszystkich mnogości” albo „mnogość wszystkich liczb porządkowych”. […] Po drugie, musi owo określające kryterium $f(x)$ być według naszej definicji zawsze definitne, tj. musi się dać rozstrzygnąć przez podstawowe własności zakresu $\mathcal{B}$,

przez co takie kryteria, jak „»dające się zdefiniować za pomocą skończonej ilości wyrazów«, a tym samym antynomia Richarda” i Königa, „z naszego punktu widzenia odpadają”.

Gdyby podany w aksjomacie III sposób tworzenia mnogości był sformułowany: „Każda mnogość [powinna] się składać z elementów, które pewne powiedzenie definitne $f(x)$ sprawdzają, przy czym wszystkie możliwe wartości x należą do danej już z góry mnogości N”, wówczas usunięcie paradoksów byłoby oczywiste. Atoli w sformułowaniu podanym przez Zermela nie wydaje się, aby paradoksy były usunięte. Jego sformułowanie wymaga, aby każda mnogość posiadała przez $f(x)$ określoną mnogość częściową, nie wyklucza zaś wcale mnogości, które albo w ogóle przez żadne, albo przez niedefinitne $f(x)$ są określone. Innymi słowy podany przez Zermela w aksjomacie III sposób definiowania mnogości, jest przezeń w tymże aksjomacie określony jako warunek wystarczający zdefiniowania mnogości, bynajmniej zaś nie jako niezbędny (jak to czyni podane wyżej, ujęte w cudzysłów wyrażenie). Stąd jeśli jakiś przedmiot spełnia ten warunek, to jest mnogością (w rozumieniu Zermela), jeżeli go nie spełnia, może nią być lub nie być, ponieważ niespełnienie warunku wystarczającego nie pociąga za sobą nieistnienia rzeczy uwarunkowanej.

Aksjomat ten nakłada na mnogość M inny warunek niezbędny. Musi się z niej dać wydzielić część M_f o elementach spełniających $f(x)$, nie jest jednak powiedziane, że każda mnogość musi posiadać takie K, do którego pozostaje w tym stosunku co M_f do M, czyli takie K, z którego by się musiała dać wydzielić za pomocą $f(x)$. Dla-

[96] Por. tamże, s. 263-264.

tego dowód nieistnienia mnogości paradoksalnych (w zakresie $\mathcal{B}$) nie jest na podstawie aksjomatu III przeprowadzony. Dowód taki przeprowadza Zermelo w odniesieniu do mnogości wszystkich mnogości osobno.

Okazuje mianowicie, że dla każdej mnogości M istnieje taka częściowa mnogość M_0, która nie jest elementem M. Przy każdej mnogości M, kładąc M_0 — mnogość wszystkich elementów zbioru M sprawdzających powiedzenie definitne „x *non* $\in x$”, możemy okazać że M_0 *non* $\in M$. Gdyby bowiem było $M_0 \in M$, wówczas albo byłoby $M_0 \in M_0$, albo M_0 *non* $\in M_0$. W razie pierwszym zawierałoby M_0 element $x = M_0$, który by spełniał „$x \in x$” — wbrew definicji M_0. W razie drugim — M_0 *non* $\in M_0$ — musiałoby M_0 w myśl własnej definicji jako element zbioru M spełniający „M_0 *non* $\in M_0$” być swoim elementem, a właśnie okazaliśmy, że tak być nie może. M_0 nie jest tedy elementem M przy wszelkim M. Zatem nic takiego jak mnogość wszystkich mnogości nie istnieje, gdyż każda mnogość musi mieć częściową mnogość, która nie jest jej elementem. Tym sposobem też zostaje usunięty paradoks Russella. Nie mogę natomiast wobec uwag powyższych zrozumieć, dlaczego by w Zermelowskim zakresie nie miało być miejsca dla mnogości W, E itd.

17. Podobnie jak Zermelo postępuje Frege[97]. Odnosi on swoje rozwiązanie tylko do paradoksu Russella; antynomii Königa, Richarda ani Berry’ego w czasie, gdy pisał swoje dzieło, jeszcze nie było.

Mówi on zamiast o klasach o zakresach pojęć (*Begriffsumfänge*). Warunkiem niezbędnym dojścia do skutku paradoksu Russella jest spełnienie następującego związku: „jeżeli dwa pojęcia mają ten sam zakres i zakres ten pod jedno z nich podpada, to podpada też pod drugie”[98]. Związek ten jest uszczegółowieniem tego, cośmy w paragrafie 6 znaleźli dla związku φ przyporządkowującego w formie Nelsona i Grellinga elementom zbioru M' elementy zbioru Φ. Okazało się tam, że paradoks ten nie może dojść do skutku, jeśliby istniało choć jedno κ takie, że spełniając „$\varphi(m_1) = \kappa$” i „$\varphi(m_2) = \kappa$” oraz „$\kappa \in m_1$”, nie spełniałoby „$\kappa \in m_2$”.

Dla paradoksu Russella φ przyporządkowuje każdemu m zbiór identyczny, zatem „$\varphi(m_1) = \kappa$, $\varphi(m_2) = \kappa$ oraz $\kappa \in m_1$” znaczy: κ jest zakresem identycznym z zakresem m_1 i z zakresem m_2 oraz podpada pod m_1; zaś niespełnienie „$\kappa \in m_2$” znaczy, że zakres ten nie podpada pod m_2. Jest [jednak] rzeczą oczywistą, jak to w paragrafie 6 było udowodnione, że warunek ten[99] musi być spełniony. Że jednak z drugiej strony prowadzi [to] do paradoksu w wypadku $\kappa = Y$ (porównaj formę Grellinga i Nelsona, paragraf 6), przeto należy, zdaniem Fregego, pojęcie równości zakresu zmodyfikować tak, aby wyżej wymieniony warunek nie był spełniony, a w ten sposób do paradoksu nie dojdziemy. Wprowadza też następującą definicję równości zakresów: „Zakres pewnego pojęcia A jest identyczny z zakresem pojęcia B, jeśli każdy przedmiot, który podpada pod pojęcie A, z wyjątkiem zakresu pojęcia A, podpada też pod

[97] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, t. 2, Hermann Pohle, Jena 1903, s. 255n.

[98] Tamże (przyp. A.H.).

[99] Tzn. $\kappa \in m_2$ (przyp. red.).

pojęcie *B*, i jeżeli każdy przedmiot podpadający pod pojęcie *B*, z wyjątkiem zakresu pojęcia *B*, podpada pod pojęcie *A*".

Dla Fregego jest zatem paradoks dowodem mylności jego założeń, a jeśli z przyjętych podstaw nauki założenia te wynikają, to należy odpowiednio założenia te — w tym wypadku pojęcie równości zakresów — zmodyfikować.

18. Pozostają do omówienia dwie mało udatne próby rozwiązania paradoksu Burali-Fortiego z punktu widzenia powszechnie jakoby przyjętych zasad teorii mnogości. Jedną z nich jest próba Bernsteina[100].

Bernstein wychodzi od definicji liczb porządkowych. Liczbą porządkową nazywa typ porządkowy α mnogości dobrze uporządkowanej, będącej odcinkiem jakiejś dobrze uporządkowanej mnogości. Dla każdej liczby porządkowej α istnieje zawsze typ porządkowy $\alpha+1$ bezpośrednio następujący.

Mnogość W wszystkich liczb porządkowych składa się z typów porządkowych wszystkich odcinków dobrze uporządkowanej mnogości. W jest dobrze uporządkowane, jeżeli jego elementy uporządkujemy według wielkości, ale typ porządkowy ξ mnogości W nie jest liczbą porządkową, albowiem W nie jest odcinkiem żadnej dobrze uporządkowanej mnogości. Gdyby bowiem istniała mnogość F, której odcinkiem byłoby W, wówczas ξ byłoby elementem W. Wyznaczony zaś przez ξ odcinek $W' = A(\xi)$ miałby ten sam typ co W, a więc $W \simeq W'$, co być nie może, gdyż żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do swego odcinka[101]. Wynika stąd, że nie ma elementu e, który by następował po wszystkich elementach W zarazem, gdyby bowiem tak było, wystarczyłoby (W, e) przyjąć jako F i W byłoby odcinkiem, a to być nie może. Bernstein jest zdania, że paradoksalna jest tylko mnogość $(1\ldots\ldots.\xi)$ obejmująca elementy mnogości W i po nich następujące ξ, zaś wyżej zdefiniowana mnogość W, jako mnogość wszystkich typów porządkowych odcinków mnogości dobrze uporządkowanych, nie zawiera sprzeczności.

Bernstein nie przeczy, jakoby można było utworzyć (W, e): mnogość taką można zbudować, jedynie nie śmie i nie może być ustalony porządek między elementami W i e. Można też, zdaniem Bernsteina, wprost okazać, że mnogości $(W, \xi) = (1\ldots\ldots.\xi)$ nie ma. Każdy typ mnogości, która jest odcinkiem, zawiera się w W. Mnogość dobrze uporządkowana, która nie jest odcinkiem, jest podobna do W i posiada typ ξ. Typ γ mnogości (W, ξ) musiałby się zawierać w (W, ξ), a więc $A(\gamma) \simeq (W, \xi)$, co być nie może.

Poglądy te poddaje słusznie krytyce Hessenberg[102]. Twierdzi on, że czymkolwiek by było W, zawsze można uporządkować (W, e) tak, że e następuje po wszelkim W. Jeśli bowiem a i b są różnymi elementami (W, e), to albo (1) oba są elementami W i wtedy $a < b$, jeśli a i b w tym stosunku pozostają w dobrze uporządkowanej mno-

[100] F. Bernstein, *Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen*, „Mathematische Annalen" 60(2), 1905, s. 187n.

[101] G. Hessenberg, *Grundbegriffe*, s. 544, twierdzenie XXIII.

[102] Tamże, s. 632.

gości W, albo (2) jeden z nich jest identyczny z e, np. $b = e$ i wtedy kładziemy $a < b$. W ten sposób zostało e umieszczone po wszystkich elementach W, a tym samym dało się utworzyć dobrze uporządkowany zbiór F, którego odcinkiem byłoby W.

Gdyby nawet uwagi Bernsteina były trafne, to mimo to paradoks pozostałby, tylko nie dla mnogości określonych przez Bernsteina liczb porządkowych, tylko dla mnogości wszystkich typów porządkowych, i nie wiadomo, co byśmy przez to zyskali.

19. Jourdain twierdzi, że spośród mnogości dobrze uporządkowanych tylko mnogości konsystentne, tj. te, które nie posiadają części podobnej do mnogości W, posiadają typy porządkowe i liczby kardynalne. Zermelo[103] i Hessenberg[104] zauważają słusznie, że hipoteza Jourdaina jest zdumiewająca, skoro się zważy, że typy porządkowe są w teorii Cantora tylko symbolami mającymi służyć do wygodnego porównywania mnogości dobrze uporządkowanych. Powiedzenie, że dana mnogość nie posiada typu porządkowego, jest wprost fałszywe, skoro się zważy, że mnogość dobrze uporządkowana M ma typ porządkowy, jeżeli istnieje choćby jedna mnogość N do M podobna. A że w każdym razie $M \sim M$, przeto każda dobrze uporządkowana mnogość definiuje typ porządkowy.

20. Kończąc niniejszy referat prac dotyczących paradoksów teorii mnogości, uczynić należy następujące uwagi. Żadne z podanych wyżej rozwiązań nie wydaje się zadowalające; nie mogę przypuszczać, żeby powierzchowne i pobieżne uwagi krytyczne, jakie na temat poszczególnych rozwiązań wyżej czyniłem, mogły być dowodem, że dotychczasowe próby rozwiązań paradoksów nie wystarczają. Powierzchowność tych uwag jest usprawiedliwiona przez referujący charakter pracy.

Można jednak przypuszczać, że paradoksy są rozwiązane. Rozwiązaniem paradoksu może być, z punktu widzenia logicznego, sam paradoks. Jest on dowodem apagogicznym na to, że założenia, na których się antylogiczny wynik opiera, są mylne. Gdyby się okazało, że mimo to przez inne zasady logiczne są te założenia postulowane, mielibyśmy inny paradoks, który by w tymże sensie sam siebie rozwiązywał, jak powyżej była mowa. W ten sposób, wznosząc się do założeń, albo doszlibyśmy do założeń przez zasady logiczne niepostulowanych a przez rodzenie paradoksów wykluczonych, albo doszlibyśmy do ostatecznych założeń — aksjomatów logiki — i tym samym okazalibyśmy ich wzajemne się wykluczanie. Nie jest to niemożliwe, bo do dziś niesprzeczność ich nie jest wykazana. W tym drugim wypadku należałoby logikę zreformować tak, aby sprzeczności w aksjomatach uniknąć. W wypadku pierwszym, paradoksu w znaczeniu ścisłym nie byłoby, byłby on tylko dowodem mylności pewnych założeń. Wtedy powstałoby zadanie wykryć te założenia prowadzące do antylogicznych wniosków możliwie wysoko, tj. w możliwie ogólnej postaci, a mając w paradoksach dowód ich mylności, nie potrzebowalibyśmy ich usunięcia dopiero motywować.

---

[103] E. Zermelo, *Neuer Beweis*, s. 107-128.
[104] G. Hessenberg, *Grundbegriffe*, s. 632.

Natomiast powstałoby drugie zadanie praktycznej natury: podać kryterium pozytywne, pozwalające na uniknięcie wiodących do paradoksu założeń w przyszłości. Podwójne to zadanie spełnia np. Russell (inna kwestia, czy trafnie), wykrywając błędne założenie w przypuszczeniu, że pewne zbiory dają się „totalizować", lub Poincaré, upatrując błąd w przypuszczeniu, że niepredykatywnie zdefiniowane symbole mogą sens posiadać; obaj też ci uczeni podają kryterium pozwalające na uniknięcie założeń wiodących do paradoksu: pierwszy w swojej teorii typów, drugi (po niefortunnej próbie postulującej, aby definicja zbioru zastrzegała, że żaden z jego elementów na zbiór się nie powołuje) w trzech ogłoszonych w 1910 r. postulatach[105]:

I. Nie rozważać innych przedmiotów jak te, które mogą być za pomocą skończonej ilości wyrazów zdefiniowane.

II. Nie zapominać, że każdy sąd o nieskończoności powinien być tylko przetłumaczeniem, skróceniem pewnego sądu o „skończoności".

II. Unikać definicji i klasyfikacji niepredykatywnych.

W wypadku, gdzie aksjomaty logiki nie muszą być zreformowane, gdzie więc można wykryć niezbędne dla paradoksu, a przez logikę nie postulowane założenia, paradoksy nie są niczym innym jak apagogicznymi dowodami. Nie powinny nas zatem bynajmniej martwić. Inaczej mają się rzeczy, gdzie założenia (niezbędne) paradoksu będą przez logikę postulowane. Wtedy powstaje praca odbudowania tej nauki od podstaw, by na przyszłość podobnych błędnych konsekwencji uniknąć.

LITERATURA

Bernstein F., *Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen*, „Mathematische Annalen" 60(2), 1905, 187-193.

Burali-Forti C., *Una questione sui numeri transfiniti*, „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo" 11(1), 1897, 154-164.

Chwistek L., *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella*, „Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział Historyczno-Filozoficzny", t. 30, Polska Akademia Umiejętności, Kraków 1912, 270-334.

Frege G., *Grundgesetze der Arithmetik*, t. 2, Hermann Pohle, Jena 1903.

Grelling K., Nelson L., *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, „Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge" 2(3), 1907, 301-334.

Hessenberg G., *Grundbegriffe der Mengenlehre*, „Abhandlungen der Fries'schen Schule, Neue Folge" 1(4), 1906.

König J., *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem*, „Mathematische Annalen" 61(1), 1905, 156-160.

König J., *Sur les fondements de la théorie des ensembles et le probleme du continu*, „Acta Mathematica" 30(4), 1906, 329-334.

Poincaré H., *La logique de l'infini,* „Revue de Méthaphysique et de Morale" 17(4), 1909, 461-482.

[105] H. Poincaré, *La logique de l'infini*, s. 482.

Poincaré H., *Les mathématiques et la logique*, „Revue de Méthaphysique et de Morale" 14(3), 1906, 294-317.

Poincaré H., *Réflexions sur les deux notes précédentes*, „Acta Mathematica" 32(1), 1909, 185-200.

Poincaré H., *Nauka i metoda* (tłum. M. H. Horwitz), nakład Jakóba Mortkowicza; G. Centnerszwer i ska, Warszawa 1911; Księgarnia H. Altenberga, Lwów 1911.

Richard J, *Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue des Sciences*, „Acta Mathematica" 30(3), 1906, 295-296.

Russell B., *The Principles of Mathematics*, University Press, Cambridge 1903.

Russell B., *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, „Proceeding of the London Mathematical Society" 4(14), 1906, 29-53.

Russell B., *Les paradoxes de la logique*, „Revue de Métaphysique et de Morale" 14(5), 1906, 627-650.

Russell B., *La théorie des types logiques*, „Revue de Métaphysique et de Morale" 18(3), 1910, 263-301.

Russell B., Whitehead A. N., *Principia Mathematica*, t. 1, University Press, Cambridge 1910.

Zermelo E., *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, „Mathematische Annalen", 65(1), 1908, 107-128.

Zermelo E., *Untersuchungen über die Grundlagen den Mengenlehre. I.*, „Mathematische Annalen" 65(2), 1908, 261-281.