Filozofia Nauki
Rok XXIII, 2015, Nr 4(92)

Ryszard Miszczyński

Fregego krytyka arytmetyki formalnej w *Grundgesetze der Arithmetik**

Badających matematykę filozofów z przełomu XIX i XX wieku tradycyjnie dzieli się na trzy grupy: intuicjonistów, logicystów i formalistów. Za twórcę ostatniego z tych kierunków uważa się zwykle Hilberta. Jego umiarkowana wersja stanowiska formalistycznego była jednak poprzedzona koncepcjami skrajniejszymi, m.in. tzw. algebrą formalną i formalną arytmetyką. W artykule chcę pokazać *obraz* tej ostatniej. Sądzę, że obraz arytmetyki formalnej na początku XX wieku w istotny sposób wpłynął na powstawanie formalizmu oraz silnie oddziaływał na sposób, w jaki traktowali to stanowisko ówcześni filozofowie i uczeni. Używam słowa „obraz", ponieważ chcę scharakteryzować arytmetykę formalną tak jak zrobił to Frege w *Grundgesetze der Arithmetik* (tom 1 wydany w 1893 r., drugi w 1903 r.). Wybrałem ten pośredni sposób prezentacji przede wszystkim ze względu na treść powszechnie wiązaną z pojęciem radykalnego formalizmu. Nie pochodziła ona bezpośrednio od autorów prac zaliczonych do tej grupy, lecz ukształtowana została przez Fregego, który upowszechnił ją i w istotnym stopniu obciążył negatywną oceną. To właśnie między innymi pod wpływem tego pośrednictwa Wittgenstein wypracował swoją koncepcję gry językowej (Rotter 2006: 136-139).

1. INFORMACJE WSTĘPNE

Znaczenie krytyki przeprowadzonej przez Fregego wykracza poza pewien historyczny epizod w kształtowaniu się formalizmu, którego ukoronowaniem będzie tzw. metamatematyka. Jego zarzuty dość istotnie przyczyniły się też do uświadomienia

* Dziękuję bardzo Pani Profesor dr hab. Gabrieli Besler za krytyczną lekturę tekstu.

różnicy między dwoma charakterystycznymi podejściami do matematyki: formalistycznym i treściowym (*inhaltlich*, *meaningful*). Krytykowani uczeni sprzeciwiają się tradycyjnemu, treściowemu ujęciu: pojmowaniu matematyki jako dyscypliny głoszącej sensowne i zrozumiałe twierdzenia o obiektywnej wartości logicznej. Opowiadają się za podejściem formalistycznym. Wypowiedzi matematyczne traktują jako pozbawione treści: matematyka stanowi precyzyjną grę przekształcania pustych formuł zgodnie z przyjętymi regułami — grę bardzo starą i skomplikowaną, ponieważ pod wpływem różnych historycznych wydarzeń reguły utraciły pierwotną prostotę, a ich liczba uległa olbrzymiemu zwielokrotnieniu. Powstały jej różnorodne odmiany. Ich uroku mogą doświadczać tylko nieliczni i bardzo wtajemniczeni kapłani tego kultu[1].

Tak pojmowany formalizm matematyczny bardzo często współwystępuje ze specyficznym scjentyzmem części matematyków, którzy nie mając większej wrażliwości filozoficznej, chcieliby oczyścić naukę z owego, jak sądzą, niepotrzebnego bagażu intelektualnego. Ich zdaniem nie odgrywa on żadnej roli w codziennej pracy uczonego. Wdrażając kogoś w tę grę, oprócz wprowadzenia kilku formalnych wyrażeń, należy podać jakieś podstawowe, zdroworozsądkowe wyjaśnienia w języku naturalnym, a następnie ćwiczyć techniczne umiejętności ich przekształcania. Zasadniczym błędem zwolenników tradycyjnego ujęcia było przekonanie, że matematyka mówi o jakimś świecie, do którego odnoszą się jej terminy. Jeśli już mówić o jakiejś rzeczywistości, to najlepiej ograniczyć się do stwierdzenia, że to same te terminy są jedynym przedmiotem zainteresowania. W zasadzie ważne są nawet nie tyle słowa, ile reguły, według których posługujemy się słowami. Wystarczy je sformułować. W nich tkwi cała matematyka.

Fregowska krytyka arytmetyki formalnej zawarta jest w drugim tomie *Grundgesetze*. Ta część pracy poświęcona była m.in. analizie podstaw teorii liczb rzeczywistych. Jednym z tematów była ocena różnych sposobów wprowadzania liczb niewymiernych. Po krytycznym omówieniu koncepcji Cantora (Frege 2009: 392-404, §§ 68-85) autor dość bezceremonialnie rozprawił się z teoriami Heinricha Eduarda Heinego i Carla Johannesa Thomaego (Frege 2009: 404-439, §§ 86-137), którzy wykorzystali pomysł twórcy teorii mnogości, nadając mu formalistyczną interpretację[2]. Frege określił ich poglądy jako „radykalne". Czasem stanowisko to nazywał też „starszym formalizmem", o a autorach mówił „arytmetycy formalni". W swoich analizach wydestylował z ich wypowiedzi istotę wskazanej koncepcji i skoncentrował się na jej krytyce.

[1] Staram się wykorzystać metaforę rozwiniętą przez Hermanna Hessego w *Grze szklanych paciorków* (1999).

[2] Heine (1821-1881) to matematyk z uniwersytetu w Halle. Thomae (1840-1921) przez 5 lat pracował wspólnie z Heinem na uniwersytecie w Halle i 35 lat wspólnie z Fregem w Jenie. Podobne poglądy głosili także Hermann Hankel (1839-1873) i Otto Stolz (1842-1905). Część autorów zauważa, że krytyka Fregego stosuje się też do niektórych koncepcji późniejszych formalistów, np. ucznia Hilberta, Haskella B. Curry'ego (Haddock 2012: 343).

Często — jak można podejrzewać — Frege nie był polemistą życzliwym wobec swoich adwersarzy: przerysowywał ich poglądy, doprowadzał do skrajności, co służyło przede wszystkim podkreśleniu zalet własnego stanowiska, a nie tylko rzetelnemu przedstawieniu cudzych poglądów[3]. Tak więc nie należy traktować jego omówienia jako obiektywnego źródła wiedzy o rzeczywistych zapatrywaniach wymienionych myślicieli[4]. Pośrednictwo Fregego jest problematyczne z jeszcze jednego powodu: autor *Grundgesetze* reprezentował głęboko zracjonalizowane, tradycyjne podejście do nauki i nie dopuszczał żadnych nowinek z nim niezgodnych[5]. Choć charakteryzował się analityczną umysłowością i często w długim ciągu dedukcyjnym dochodził do przedstawienia istotnych konsekwencji, niezauważalnych dla otwartego i nieuprzedzonego myśliciela, owo intelektualne „skostnienie" także mogło obniżyć wierność przekazu.

W rzeczywistości Frege krytykuje radykalnych formalistów nie tylko w drugim tomie *Grundgesetze.* W sposób rozproszony analizy takie pojawiły się również w *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Spójną, logiczną formę przyjęły w *Über formale Theorien der Arithmetik* (1885). Po wydaniu *Grundgesetze* Frege powrócił do swojej krytyki, nieco przypadkowo, na marginesie sporu, który toczył z Hilbertem na temat podstaw geometrii. W 1903 r. Alwin Korselt (1864-1947) w „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" omówił krytykę Fregego, opowiadając się za stanowiskiem Hilberta (Korselt 1903). W 1906 roku w tym samym czasopiśmie pojawił się polemiczny w stosunku do autora *Grundgesetze* głos Thomaego. Już w tytule nawiązywał ironicznie do podanej przez Fregego charakterystyki szachisty: *Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei* (*Bezmyślni myśliciele. Wakacyjna pogawędka*) (Thomae 1906a). Kilkadziesiąt stron później w tym samym numerze pisma została zamieszczona wypowiedź Fregego *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae* (*Odpowiedź na wakacyjną pogawędkę pana Thomaego*) (Frege 1906b). Na kilku kolejnych stronach Thomae (1906b) przedstawił swoje *Wyjaśnienie.* Reakcją na nie był umieszczony w 1908 roku tekst *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue Nachgewisen* (*Odnowiony dowód niemożliwości arytmetyki formalnej Thomaego*) (Frege 1908a), a następnie dołączone osobne oświadczenie zatytułowane *Schlussbemerkung* (*Uwaga podsumowująca*) (Frege 1908b). Frege zażądał w nim od polemisty poważnej obrony głoszonych tez, o ile nie chce, aby jego przedsięwzięcie zostało uznane za obalone.

Cała polemika poza dodatkowymi emocjami niewiele wnosi, jak sądzę, do rozważań zawartych w *Grundgesetze*. Zanim przejdę do omówienia podstawowych elemen-

[3] Polemika Fregego z Thomaem odżyła w latach 1906-1908. Po dość gwałtownych atakach Fregego zakończyła się rezygnacją atakowanego z dalszej dyskusji, choć jej zerwanie nie było chyba spowodowane względami merytorycznymi (Sundholm 2003: 123).

[4] Według Michaela Pottera (2004: 10) idee arytmetyków formalnych w interpretacji Fregego są często tak nierozsądne, że wielu osobom trudno uwierzyć, by ktoś mógł je rzeczywiście głosić.

[5] Znakomicie widać to na przykładzie dyskusji, którą Frege długo toczył z Hilbertem (zob. Frege 1971: 6-112).

tów krytyki zawartej w tym dziele, krótko przedstawię podaną przez Fregego charakterystykę poglądów Heinego i Thomaego — w zasadniczych sprawach są one zbieżne[6].

2. STANOWISKO ZWOLENNIKÓW ARYTMETYKI FORMALNEJ

Według Heinego przedmiotem jego teorii są zmysłowo postrzegalne znaki liczbowe, czyli napisy, np. „1”, „2”, „3”. Zatem z empirycznego punktu widzenia, jak podkreślał, problem istnienia liczb nie budzi wątpliwości. Napisy nie są bowiem tylko symbolami zewnętrznymi względem liczb, lecz same są liczbami (m.in. dlatego Stewart Shapiro używa sformułowania „term formalism” — 2000: 142). Zdaniem Fregego ten naiwny empiryzm, pojmowany dosłownie, może prowadzić do dość niepokojących wniosków utożsamiających własności napisów (np. tuszu drukarskiego) i liczb. Taka konsekwencja budzi oczywiste wątpliwości uczonego zajmującego się arytmetyką teoretyczną[7]. Próby niedopuszczania do takich interpretacji wymagałyby od formalistów podania odpowiednich definicji i postulowania bogatszego uniwersum, do czego nie byli skłonni (Frege 1885: 115-116).

Poglądy Thomaego nie poddają się przedstawionej krytyce. Twierdził bowiem, że formaliści mają skromniejsze wymagania w stosunku do liczb niż logicyści i nie interesuje ich natura przedmiotów matematycznych, ponieważ jest ona dla arytmetyki zupełnie nieistotna. To wspólny pogląd obu formalistów: liczby są materialnymi znakami, które na nic nie wskazują. Arytmetyka jest więc grą pustych znaków, tj. niemających żadnej treści w grze rachunkowej poza zachowaniami przypisanymi im przez obowiązujące reguły[8]. Zbliża go to do stanowiska nazywanego przez Shapira (2000: 16) *game formalism*. Sam Thomae przekonywał do swego poglądu, odwołując się do podobieństwa między arytmetyką i grą planszową. Pisał:

> Szachista używa swoich figur, przypisuje im pewne własności warunkujące ich zachowania w grze. Figury są tylko zewnętrznymi znakami tych zachowań. Między grą w szachy a arytmetyką zachodzi oczywiście znacząca różnica. Reguły gry w szachy są arbitralne, a system reguł arytmetyki jest taki, że liczby za pośrednictwem prostych aksjomatów mogą zostać odniesione do oglądowych różnorodności i w następstwie tego istotnie przysłużyć się nam w poznaniu natury (cyt. za Frege 2009: 406, por. Thomae 1906a).

Ponieważ konsekwencją takiego ujęcia jest odrzucenie znaczenia przypisywanego symbolom, Frege określił je mianem „arytmetyki formalnej”. Przeciwstawiał je

---

[6] Frege korzystał z artykułów (Heine 1872) i (Thomae 1898).

[7] U tradycyjnie nastawionych osób przedstawiony pogląd może budzić zdumienie jako prosty błąd, którego istotę wyraża wschodnie powiedzenie „Jeśli palec wskazuje księżyc, głupiec patrzy na palec”.

[8] Pomysł zrezygnowania z badania samych liczb pojawiał się także wśród innych formalistów, głosił go np. algebraik Ernst Schröder w *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (1873). Uważał, że skoro odkrywane są różne systemy liczbowe, nie można ograniczać się do tradycyjnego ich wyobrażenia. Dlatego jako liczbę wskazywał np. znak (Peckhaus 2004: 567).

odmianie treściowej, której formuły odsyłają do pewnej rzeczywistości. Wypowiedziane wyżej założenie tradycyjnej matematyki może oczywiście budzić wątpliwości. Dlatego — jak podkreślali wspólnie Heine i Thomae — ich propozycja góruje nad tradycyjną nauką, ponieważ eliminuje nierozwiązywalne problemy metafizyczne. Nie trzeba bowiem uzasadniać podstaw przyjmowanych reguł, odwołując się do własności niedoświadczalnych obiektów, a wystarczy je założyć[9].

Frege odrzucił propozycję takiego łatwego rozwiązania jako zbyt naiwną. Gdyby można było ją zrealizować, to zamiast np. dowodzić istnienia liczby o pewnej własności, matematyk mógłby wprowadzić odpowiednią figurę od razu wraz z regułami jej przekształcania. W ten sposób można byłoby wyeliminować większość trudności, przed którymi stają uczeni.

Według Heinego i Thomaego empiryczne gwarancje istnienia liczb mają usuwać metafizyczne problemy nauki. Niestety, z tego samego powodu ich propozycja jest matematycznie nie do przyjęcia. Autor *Grundgesetze* interesował się sposobem wprowadzania przez obu formalistów liczb niewymiernych. Chcieli oni, opierając się na pomyśle Cantora, wykorzystywać popularny wówczas pomysł definiowania ich za pomocą nieskończonych ciągów liczb wymiernych spełniających tzw. warunek Cauchy'ego (por. Rotter 2006: 115-118). Zdaniem Fregego nie mogą go jednak stosować. Jeśli zdroworozsądkowe doświadczenie zmysłowe jest dla formalistów gwarancją istnienia liczb (które, jak deklarują, są tożsame z odpowiednimi znakami), to ze względu na ludzką ograniczoność mają do dyspozycji tylko ich skończoną liczbę, a to za mało, aby granicą ciągu liczb wymiernych mogła być liczba niewymierna.

Frege pokazał, jak po początkowych rygorystycznych deklaracjach formalistycznego empiryzmu uczeni stopniowo ześlizgiwali się na pozycje krytykowanej wcześniej matematyki treściowej. Przykładem takiego postępowania jest odwoływanie się do tradycyjnych sposobów zapisu nieskończonego ciągu (a_1, a_2, a_3…), którego formaliści, jeśli chcą być konsekwentni, nie powinni wykorzystywać. Skończona liczba znaków zapisu musiałaby wskazywać na nieskończoną liczbę wyrazów ciągu, a tę drogę zamknęli sobie wielokrotnie powtarzanymi hasłami o pustce znaków oraz tożsamości liczby i jej zapisu. Dlatego autora *Grundgesetze* zupełnie nie przekonały podejmowane przez nich próby ukrycia finitystycznych ograniczeń omawianej koncepcji.

Według Fregego porównanie arytmetyki do gry w szachy wymaga doprecyzowania i komentarza. Skoro ruch w szachach polega na zastąpieniu ustawienia pewnej grupy figur inną, to jego odpowiednikiem w pracy matematyka stojącego przy tablicy będzie zgodne z przyjętymi regułami zastąpienie jednej grupy napisów inną. Przyjmując taką wykładnię, łatwo jednak zauważyć słabość tej analogii. Trudno bo-

[9] Jak można się domyślać, podobne przesłanki towarzyszą tzw. „regule tolerancji" postulowanej przez Carnapa: „Każdy ma prawo budować własną logikę, tj. własną formę języka, tak jak sobie życzy. Jedyne, czego się od niego wymaga, jeśli pragnie dyskusji nad swoją logiką, to to, by sformułował jasno stosowane przez siebie metody i podał reguły syntaktyczne zamiast argumentów filozoficznych" (Carnap 1995: 79).

wiem w owej matematycznej grze znaleźć odpowiednik wykorzystywanej we wszystkich naukach procedury definiowania. Założywszy jednak konserwatywną koncepcję definicji (tj. nieistotnej teoretycznie roli wprowadzania skrótowego zapisu), autor *Grundgesetze* zrezygnował z dokładniejszej analizy następstw braku tego podobieństwa.

3. FREGEGO KRYTYKA ARYTMETYKI FORMALNEJ

Frege zarzucił obu formalistom, że mimo podkreślania podobieństwa arytmetyki do szachów, nie wyciągnęli wszystkich ważnych konsekwencji z tej analogii. Jeśli, co sami przyznali, formuły matematyczne podobne są do figur szachowych, to trudno poważnie twierdzić, że mają jakąś treść. Przecież nikt nie przypisuje jej np. hetmanowi, który został przestawiony zgodnie z obowiązującymi regułami. Podobnie niefortunne jest zdanie, że figury i ich położenie mają komunikować pewne myśli. Zamiast mówić o matematycznych znakach (*Zeichen*), powinni więc zdaniem Fregego używać bardziej adekwatnego terminu wykorzystywanego w tym porównaniu. Przecież znak powinien do czegoś odsyłać, a znaki arytmetyki formalnej miały być puste. Najlepszym więc niemylącym określeniem wykorzystywanych napisów powinna być „figura liczbowa".

Ewentualna pustka figur rysowanych przez uczonych prowadzi do wniosku wyraźnie sprzecznego z koncepcją tradycyjnie pojmowanej nauki. Jeśli napisy używane przez nich nic nie komunikują i nie niosą ze sobą żadnej myśli, to nie można także charakteryzować ich za pomocą tradycyjnych wartości logicznych.

Mimo głoszonej swobody w dekretowaniu reguł Thomae w przytoczonym cytacie podkreślił pewną cechę, która odróżnia grę matematyczną od szachowej. Matematyka jest wykorzystywana w nauce. Frege zgodził się z tą wypowiedzią, a nawet ją wzmocnił. W tradycyjnym ujęciu możliwość zastosowania stanowi ważną różnicę między grą a nauką i jest podstawą przekonania o wyższej wartości arytmetyki w porównaniu z szachami.

Pytanie o zastosowania arytmetyki nie doczekało się żadnej filozoficznie satysfakcjonującej odpowiedzi ze strony formalistów: programowo nie byli zainteresowani tym tematem. Zadaniem czystej matematyki, twierdzili, jest dostarczanie różnych niezinterpretowanych systemów formalnych, dla których dopiero ich potencjalni użytkownicy znajdą odpowiedni użytek. Skoro liczba może odnosić się zarówno do masy, wielkości, jak i na przykład trwania, to dopiero fizyk lub geometra nadadzą im odpowiednią interpretację, takimi rzeczami nie zajmuje się natomiast arytmetyka[10]. Stąd też formaliści chcieli przeprowadzić reformę nauki: odejść od tradycyjnej struktury

[10] Zupełnie inny stosunek do odpowiedzi na pytanie o zastosowanie przyjmowało wielu uczonych związanych z podejściem formalistycznym. Np. Schröder (1873), przedstawiając swój program algebry absolutnej, za zadanie istotne dla jego realizacji uznawał wskazanie możliwych modeli dla przyjętego formalizmu (Peckhaus 2004: 567).

genetycznej, w której dziedziny różnych dyscyplin zachodzą na siebie, i wprowadzić podział logiczny respektujący niezbędną rozłączność. Nauki (np. arytmetyka) przestałyby się zajmować obcymi sobie problemami różnych interpretacji, a skoncentrowałaby się na własnej działalności. Konserwatywny Frege obawiał się jednak, że podczas zmian w organizacji nauki, zrzucając pracę na barki innych, zgubiono by ważne zadanie wykonywane dotychczas przez arytmetykę. Skoro możliwość wykorzystania wynosi arytmetykę do rangi nauki, to czemu odbierać jej ten status?

Brak wyjaśnienia zastosowań arytmetyki stanowi bardzo ważny zarzut Fregego przeciw radykalnym formalistom. W ich podejściu można dostrzec podobieństwo do literackiej wizji Stanisława Lema (1964: 185), w której szalony krawiec kroi i szyje mnóstwo najbardziej dziwnych i trudnych do wyobrażenia strojów, w ogóle niedopasowywanych przez niego do potencjalnego klienta. Dopiero w wypełnionym magazynie kupujący wybiera odpowiedni ubiór.

Ponadto, zdaniem Michaela Dummetta (1991: 256), możliwość zastosowań prowadzi Fregego do tezy o konieczności posiadania przez arytmetykę cechy, którą wykluczają zwolennicy arytmetyki formalnej. Zastosowanie polega na wnioskowaniu dedukcyjnym od ogólniejszych przesłanek do szczegółowego wniosku. Do tego konieczne są myśli, z których jednak formaliści chcieli zrezygnować. Jeśli traktujemy symbole matematyczne jako figury, to rzeczywiście można inferencję porównać do ruchu w szachach. Dowodzenie przypomina wtedy ruch, który od początkowej konfiguracji figur na szachownicy prowadzi do innej, odpowiadającej końcowemu twierdzeniu. Ale, jak zauważył Frege, myślenie towarzyszące przesuwaniu figur i wybór prowadzący do odpowiedniej kombinacji istotnie różnią się od rozwiązywania interesującego problemu matematycznego[11]. Zatem także psychologicznie arytmetyka formalna ma niewiele wspólnego z pięknem i głębią tradycyjnej matematyki. Zgodnie z arbitralnie przyjętymi regułami przekształca się puste formuły, które nie wyrażają żadnych myśli. Nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Taka matematyka może rzeczywiście przypominać grę planszową i być zajęciem „bezmyślnych myślicieli”, którzy bawią się przestawianiem pustych figur zgodnie z arbitralnie zadekretowanymi regułami. Zupełnie inaczej należałoby ocenić to zajęcie, gdyby figurom przyporządkować myśli: wtedy każdy ruch szachowy odpowiadałby przejściu od jednej myśli do drugiej. To pozwala zaś wyobrazić sobie możliwość stosowania partii szachów. Stąd według Fregego bierze się przewaga matematyki treściowej: znaki mają odniesienie, a odpowiednie formuły wyrażają myśli.

W tradycyjnej arytmetyce — a taka interesowała autora *Grundgesetze* — równości bądź nierówności muszą mieć treść wyrażaną przez zdania prawdziwe. Z nimi powinny być zharmonizowane reguły inferencji tak, aby nigdy nie prowadziły do

[11] Zarówno pisarz, jak i osoba grająca w scrabble zastanawiają się nad znalezieniem odpowiedniego słowa, ale ich problemy są zupełnie inne. O ile zastanawianie się gracza nad sensem słów nie przyniesie odpowiedniego efektu, o tyle trudno wyobrazić sobie pisarza, który *a priori* zrezygnowałby z takiego podejścia.

wniosków wykraczających poza ten zakres. Reguły nie mogą więc być arbitralne: powinny być tak dobrane, aby od prawdziwych przesłanek prowadzić do prawdziwych wniosków[12]. Wybór reguł zawsze wymaga ich sprawdzenia. Prawda wymaga pewnego odwoływania się do odniesienia. Dopiero na tej podstawie można mówić o poprawności reguł i wyróżniać systemy, w których obowiązują. Ta sytuacja nie pozwala na swobodę twórczą szalonego krawca. Jego „obłęd" polega na specyficznej nadprodukcji, tworzeniu bez liczenia się z potrzebami odbiorcy. Podobnie matematyk-formalista zapomniał o nich i nie chce się nimi interesować.

Według Fregego głoszony przez formalistów brak zainteresowania głębszymi podstawami nauki (związany m.in. ze swobodą w dekretowaniu reguł) jest w rzeczywistości pusty i fałszywy. Mówienie o arytmetyce formalnej ma jego zdaniem sens, jeśli od początku założymy równoczesne istnienie zarówno projektu matematyki formalnej, jak i treściowej. Nie ma jednak między nimi rzeczywistej symetrii. Formalistyczna matematyka jest możliwa tylko dzięki założeniu o istnieniu matematyki treściowej. W rzeczywistości pierwsza jest jedynie fantomem sygnalizującym swój treściowy odpowiednik. Jest opisem, który zaciemnia rzeczywiste funkcjonowanie nauki. Stanowi uproszczoną instrukcję obsługi, nie tylko nieinformującą o rzeczywistym działaniu „czarnej treściowej skrzynki", lecz także fałszującą ją przez odwoływanie do konwencjonalistycznych deklaracji o regułach ustalanych swobodną decyzją.

Łatwo zauważyć, że to klasyczna wersja matematyki nadała formalistycznej fundamenty, kształt i znaczenie. Trudno bowiem uwierzyć w rzeczywistą potrzebę tworzenia syntaktycznej struktury, jeśli jej autorom nie towarzyszyłoby przekonanie, że liczba 5 to nie tyle dowolny napis, ile symbol wskazujący na coś innego, zmysłowo niedoświadczanego. Na pozorność i czysto zewnętrzny wymiar całego projektu wskazują także umowy przyjmowane przez jego autorów. Jako figury w grze arytmetycznej obrali „1", „2", „3", …, zamiast np. „@", „#", „$". Interesują się przekształcaniem zapisów, w których między dwoma symbolami, np. „2", „3" znajduje się „+", „•", …, a stronią od używania np. „~", „§", które tworzyłyby zapisy „2~3", „2§3", równie malownicze jak tradycyjne „2+3", „2•3". Jeśli wiarygodna ma być deklaracja o braku zobowiązań wynikających z konieczności śledzenia związków między wykorzystywanymi terminami a ich odniesieniami, to dlaczego ustalane przez nich umowy odpowiadają dokładnie tradycyjnej teorii? Dlaczego jako niedozwolone traktują zestawienie symboli „3:0", a dopuszczają „4:2"?

Niska ocena przedstawionej gry rachunkowej wynikła z przekonania Fregego o podstawowej roli arytmetyki treściowej, której taka gra nie może zastąpić. Do tego doszła krytyka samego sposobu przedstawienia tej „alternatywnej koncepcji". Jeśli gra miałaby być poważną propozycją, to powinna mieć przynajmniej precyzyjnie

---

[12] Dzięki temu zamiast przeszukiwać cały magazyn szalonego krawca, możemy ograniczyć się do mniejszego pomieszczenia z napisem „wartościowe". Sądzę, że dokonana przez Fregego krytyka formalizmu jest wciąż aktualna. Przywodzi bowiem na myśl współczesne dyskusje między zwolennikami nieograniczonej swobody wypowiedzi a fundamentalistami skierowanymi ku prawdzie.

określone reguły. Według Fregego z tym również nie radzą sobie formaliści. Ich wypowiedzi o podobieństwie arytmetyki do gry w szachy wymagają wielu uzupełnień. Co odpowiada figurom szachowym, regułom gry? Thomae jako zbiór figur przyjął „0”, „1”, …, „9”. Nie wyjaśnił jednak dokładniej, czy ten sam status przysługuje innym wyrażeniom, np. „4:2”. Odpowiednikiem ruchu na szachownicy byłoby zastąpienie danego wyrażenia innym. Skoro jednak podstawą napisania „2” w miejsce „4:2” jest wyrażenie „4:2=2”, to czy ten ostatni zapis jest twierdzeniem arytmetyki, czy jedną z jej reguł? Taka graficzna formuła oprócz zestawienia dwu grup figur, między którymi znajdują się dwa poziome odcinki równoległe, umieszczone jeden nad drugim (w matematyce treściowej mówilibyśmy o znaku równości), nie ma żadnego sensu, a więc nie można w niej doszukiwać się jakiejś instrukcji. Podobnie nie jest żadnym prawem przemienności zapis literowy a+a'=a'+a (Frege 1908a: 55).

Kończąc przegląd argumentów Fregego przeciw arytmetyce formalnej, należy zwrócić uwagę na przykłady jej ewidentnych braków: dziedzina każdej funkcji powinna być dokładnie określona, nie można pozostawiać jej domyślności czytelnika, a reguły kierujące grą rachunkową wymagają precyzyjnego opisu zamiast odwołania do intuicji wypracowanych w treściowym odpowiedniku. Część tych braków to prawdopodobnie wynik bardzo wstępnego charakteru propozycji zwolenników arytmetyki formalnej, część wynikała z celów popularyzatorskich ich publikacji (Thomae 1906a: 434-437). Jak można domniemywać, sami autorzy także nie rozważali poważnie realizacji swych postulatów.

Frege ocenił przedstawianą próbę budowy arytmetyki formalnej jako niepowodzenie nie tyle ze względu na wady opisu, ile przede wszystkim z powodu nieprzestrzegania przez jej zwolenników własnych założeń. Zdarza się to często matematykom, którzy nie są zainteresowani podstawami swej nauki. Opis rozpoczęto, zapożyczając terminy i reguły z arytmetyki treściowej, a potem przenoszono je w zupełnie inne środowisko bez wyjaśniania ich nowej roli, a przez to nie podając jakiegokolwiek uzasadnienia dla nich w nowych warunkach. Twierdzenia i reguły oczywiste w matematyce treściowej traciły te walory w swym formalnym odpowiedniku, np. zupełnie niezrozumiałe stały się cechy formalnej relacji większości. Twórcy formalizmu tego nie zauważali. Sądzili, że jedyną zmianą w stosunku do nauki tradycyjnej jest eliminacja odniesienia terminów. Na początku tworzenia nowej teorii odróżniano figury arytmetyki formalnej od identycznie wyglądających nazw, których znaczenia związane są z wersją treściową. Później, chyba niezależnie od świadomych decyzji autorów projektu, ich terminy stawały się znaczące, przyjmując treści wypracowane przez arytmetykę tradycyjną, tj. ukształtowane w zupełnie innym niż formalne środowisku. Niepowodzenia arytmetyki formalnej Frege skomentował złośliwą uwagą: „poprawne pojmowanie teorii formalnej polega na tym, że się ją pojmuje fałszywie” („die richtige Auffassung der formalen Theorie besteht darin, dass man sie falsch auffasst”, Frege 2009: 407). To, co przedstawiane jest jako arytmetyka formalna, jest nieporozumieniem: ani nie ma wiele wspólnego z arytmetyką, ani z tym, o czym myśleli i co próbowali zrobić jej twórcy.

Chciałbym powrócić jeszcze do pewnej trudności. Najpierw ponownie przywołam podstawową dla formalistów analogię między arytmetyką a grą w szachy. Łatwo zauważyć, że gra rachunkowa ma niewiele wspólnego z klasycznie pojmowaną nauką: m.in. zupełnie znikają jej tradycyjne składniki, czyli twierdzenia. Przecież w konstruowanych przez naukę zdaniach czytelnik poszukuje wiedzy o rzeczywistości. A tu jedynie przestawia się układy figur, którym nie towarzyszy żadna myśl i które nie mają przekazywać żadnej treści. Nie należy w nich ani poszukiwać twierdzeń, ani prawdy. Stąd jak najbardziej odpowiednie wydają się używane czasem określenia „gra", „zabawa". Zrozumiałe staje się także poszukiwanie wartości reguł, którym jej uczestnik podporządkowuje się jedynie ze względu na obyczaj, historię lub arbitralną decyzję.

Frege, chociaż dostrzegał odmienne od tradycyjnych zamierzenia autorów (próbę nadania zupełnie nowego statusu arytmetyce formalnej), nie chciał dopuścić do propagowania surogatu zupełnie pozbawionego tradycyjnych wartości. Zauważał, że skoro postulowana przez formalistów gra za pomocą figur ma być podobna do partii szachów (w niej nie ma twierdzeń i dowodów), to można wśród tych zajęć szukać miejsca także na formułowanie i dowodzenie twierdzeń tam, gdzie korzystają z nich szachiści. Dlatego podpowiada, rozbudowując analogię, że „mogą być twierdzenia w teorii szachów, ale nie w samych szachach" (Frege 2009: 409). Czym innym jest bowiem znajomość reguł i umiejętność ich stosowania, a zupełnie czym innym wiedza o istniejących możliwościach zwycięstwa bądź ich braku. Do arkanów wiedzy szachisty oprócz umiejętności gry należy także np. wiedza o niemożliwości zwycięstwa w grze, gdy dysponuje się tylko królem i dwoma skoczkami. Arytmetyk, podobnie jak szachista, musi interesować się teorią swojej dyscypliny, nie wystarczy mu znajomość reguł. Powinien być także zaciekawiony twierdzeniami na jej temat, np. takimi jak te, które należą do teorii arytmetyki formalnej. Dopiero w tej nadbudowanej dyscyplinie można wprowadzać definicje pozwalające skrócić pewne przekształcenia (dodać nowe figury i nowe reguły), badać możliwości otrzymania pewnych konfiguracji wyrażeń itp.

Wskazanie perspektywy nowych badań dowodziło ograniczoności projektu nowej arytmetyki. Jej autorzy nie zwrócili uwagi na tę możliwość. W zasadzie nie ma nawet w ich propozycji miejsca na tego typu rozważania. Sugerowana przez Fregego teoria przeczyłaby podstawowym zasadom arytmetyki formalnej, toteż niełatwo byłoby usytuować ją w planie formalistów. Skoro ma dotyczyć ruchów figur, to jej wypowiedzi muszą mieć treść. Nie mogą być pustymi formułami, czyli prostymi odpowiednikami postawionych na szachownicy figur. Taka teoria potrzebuje jakiegoś nowego miejsca. Mimo kłopotów z harmonijnym włączeniem jej w projekt formalistyczny łatwo uzasadnić potrzebę jej istnienia: ten rodzaj refleksji może doprowadzić do lepszego zrozumienia całości arytmetyki oraz nadać jej spójność. Pomogłaby np. także inaczej spojrzeć na wspominaną już formułę zbudowaną z dwu grup figur połączonych znakiem równości. Z tego powodu Frege mówił o podwójnej roli takich wyrażeń. Chociaż w samej arytmetyce formalnej nie mogą mieć one żadnego znaczenia, to w proponowanej teorii arytmetyki formalnej przy użyciu języka potocznego możemy łatwo i dość naturalnie zinterpretować je jako reguły gry rachunkowej. Na podanym przykładzie nietrudno zauważyć oczywistą wtórność przyjmowanych reguł wobec innych związków. To w pełni dyskwalifikuje wcześniej przytaczane ogólne deklaracje ich arbitralności.

4. POTRZEBA METATEORII DLA ARYTMETYKI FORMALNEJ

Koncentrowałem się dotąd na krytyce przeprowadzonej przez Fregego. Na zakończenie warto jednak krótko przyjrzeć się pojawiającemu się w niej pomysłowi pozytywnego projektu: istnieje konieczność uzupełnienia badań radykalnych formalistów o refleksję nad funkcjonowaniem ich arytmetyki, czyli o jej teorię[13]. We współczesnym języku moglibyśmy mówić o zauważanej przez Fregego potrzebie uzupełnienia arytmetyki formalnej jej metateorią. Nie wynikała ona, w odróżnieniu od Hilbertowskiej metamatematyki, z widocznej po pojawieniu się antynomii Russella potrzeby zapewnienia matematyce stabilnych podstaw — rozwiązania, którego Frege nie akceptował z tych samych powodów, dla których odrzucał projekt radykalnych formalistów. Opowiadał się bowiem za tradycyjnym rozumieniem nauki, był logicystą. W jego ujęciu np. kwestia niezależności aksjomatów dotyczy skomplikowanej relacji między myślami, a nie zwykłych związków między zmysłowo postrzegalnymi napisami. Z tego powodu trochę pokpiwał z Hilbertowskich analiz wywodliwości pewnych formuł z innych wcześniej wyróżnionych, traktując ją jako relację między „pseudo-aksjomatami" a „pseudo-twierdzeniami". Z podobnych względów odrzucał wykorzystywaną przez Hilberta metodę badania związków między wartościami logicznymi pewnych wypowiedzi w różnych modelach (wtedy bowiem sformułowania te są wieloznaczne, co — jak uważał Frege — kłóci się z elementarnymi standardami naukowości).

ZAKOŃCZENIE

Mimo wskazanych różnic między poglądami Fregego i Hilberta obaj uczeni dostrzegali potrzebę wzbogacenia badań formalistycznych rozważaniami matematyki treściowej. Zbieżność ta wzmacnia w oczach współczesnego czytelnika *Grundgesetze* siłę argumentacji jenajskiego logicysty i tym samym podkreśla słabość wizji przeciwnej — poglądu, który ze swego filozoficznego ascetyzmu chciał uczynić zasadnicze hasło badań nad podstawami matematyki. Powtarzane nawet wbrew wielokrotnemu falsyfikowaniu jego uszczegółowionych tez.

---

[13] Swój pomysł Frege przedstawił nieco dokładniej w 1906 r. w trzeciej części odpowiedzi na artykuł Korselta wyrażającej aprobatę dla metod Hilbertowskich (Frege 1906a: 423-430). Więcej na temat zaproponowanych przez niego badań metateoretycznych, które realizowałyby w pewnym stopniu zadania metamatematyki i byłyby zgodne ze stanowiskiem logicystycznym — zob. np. Antonelli, May 2000.

Na koniec chciałbym wrócić do sporu między formalistycznym i treściowym rozumieniem matematyki. Formalistom nie udało się przekonać większości matematyków, że ich nauka zajmuje się tylko badaniem zależności między pewnymi terminami a ich opisem. Niemniej, nawet nie podzielając ich zasadniczej tezy, wielu uczonych skłonnych jest uciekać się do formalizmu, uznając za naiwne przypisywanie twierdzeniom treści, których wartość zależeć miałaby od związku z jakąś tajemniczą rzeczywistością. Fregemu udało się pokazać niemniejszą naiwność koncepcji przeciwnej — przekonania, że twierdzenia arytmetyczne zupełnie nic nie mówią.

BIBLIOGRAFIA

Antonelli A., May R. (2000), *Frege's New Science*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 41(3), 242-270.

Carnap R. (1995), *Logiczna składnia języka*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Dummett M. (1991), *Frege. Philosophy of Mathematics*, London: Duckworth.

Frege G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner.

Frege G. (1885), *Über formale Theorien der Arithmetik*, „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft" 19, 94-104, 115-116.

Frege G. (1906a), *Über die Grundlagen der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 15, 293-309, 377-403, 423-430.

Frege G. (1906b), *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 15, 586-590.

Frege G. (1908a), *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue Nachgewisen*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 17, 52-55.

Frege G. (1908b), *Schlussbemerkung*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 17, 56.

Frege G. (1971), *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, New Haven, CT: Yale University Press.

Frege G. (2009), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet*, Paderborn: Mentis.

Haddock G. E. R. (2012), *Why and How Platonism?* [w:] *Against the Current. Selected Philosophical Papers,* Heusenstamm: Ontos Verlag, 341-364.

Heine H. E. (1872), *Die Elemente der Funktionenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 74, 172-188.

Hesse H. (1999), *Gra szklanych paciorków. Próba opisu życia magistra ludi Józefa Knechta wraz z jego spuścizną pisarską*, Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.

Korselt A. (1903), *Über die Grundlagen der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 12, 402-407.

Lem S. (1964), *Summa technologiae*, Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Peckhaus V. (2004), *Schröder's Logic* [w:] *Handbook of the History of Logic*, t. 3, D. M. Gabbay, J. Woods (red.), Amsterdam: Elsevier, 557-609.

Potter M. D. (2004), *Set Theory and Its Philosophy. A Critical Introduction*, Oxford: Oxford University Press.

Reck E. H., Awodey R. S. (2004), *Frege's Lectures on Logic and Their Influence* [w:] *Frege's Lectures on Logic. Carnap's Student Notes 1910-1914*, E. H. Reck, R. S. Awodey (red.), Chicago, IL: Cyrus.

Rotter K. (2006), *Gramatyka filozoficzna w dobie sporu o podstawy matematyki. Eseje o drugiej filozofii Wittgensteina*, Opole: Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego.

Schröder E. (1873), *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, Leipzig: Teubner.

Shapiro S. (2000), *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, New York, NY: Oxford University Press.

Sundholm G. (2003), *Tarski and Leśniewski on Languages with Meaning versus Languages without Use* [w:] *Philosophy and Logic in Search of the Polish Tradition*, J. Hintikka, T. Czarnecki, K. Kijania-Placek, T. Placek, A. Rojszczak (red.), Dordrecht: Springer, 109-128.

Thomae J. (1898), *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, Halle: Louis Nebert.

Thomae J. (1906a), *Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 15, 434-438.

Thomae J. (1906b), *Erklärung*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 15, 590-592.