Filozofia Nauki
Rok XXIII, 2015, Nr 3(91)

Krzysztof Wójtowicz

Inspiracje empirystyczne w filozofii matematyki
Część I*

Przedmiotem analiz w tym dwuczęściowym studium będą wątki i inspiracje empirystyczne w filozofii matematyki — gdzie można je odnaleźć, jak się przejawiają, do jakich wniosków prowadzą i czy można mówić o jednolitym „froncie empirystycznym" w filozofii matematyki? Jak się okazuje, nie ma bynajmniej zgody co do znaczenia terminu „empiryzm matematyczny". W pierwszej części pracy analizuję pod tym kątem poglądy Milla, Berkeleya i Carnapa. W drugiej części (która ukaże się w kolejnym numerze „Filozofii Nauki") omawiam koncepcje Quine'a i Putnama oraz podsumowuję rozważania.

1. UWAGI WSTĘPNE

Za punkt wyjścia możemy obrać następujące pytania, które pozwalają na przeprowadzenie wstępnego rozróżnienia między racjonalizmem a empiryzmem:

(1) Jaka jest natura naszej wiedzy — skąd wiemy, że jakaś wypowiedź na temat świata jest prawdziwa?
(2) W jaki sposób możemy zdobywać wiedzę?
(3) Jakie są granice naszej wiedzy?

Pytania te można uszczegółowić w odniesieniu do wiedzy matematycznej:

(1) Skąd (i czy!) wiemy, że jakieś zdanie matematyczne jest prawdą na temat świata matematycznego?

---

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/HS1/04023.

(2) Jakie są mechanizmy tworzenia wiedzy matematycznej?
(3) Jakim ograniczeniom podlega ta wiedza?

Racjonalista odpowie na te pytania, odwołując się do pojęcia intuicji jako źródła naszej wiedzy matematycznej. Intuicję będzie przy tym rozumiał w szerokim sensie: jest to zdolność do rozumowego ujmowania pewnych prawd matematycznych jako pierwotnych i do dostrzegania zależności między pojęciami i stwierdzeniami matematycznymi. Podstawowe prawdy matematyczne (a zdaniem racjonalisty — podstawowe prawdy w ogóle) są rozpoznawalne dzięki intuicji, natomiast dalszą wiedzę można zdobyć, korzystając z dedukcji. Akty czysto rozumowe dają nam gwarancję prawomocności tej wiedzy, a jej granice wyznacza sam rozum. Można powiedzieć, że zarówno pewne pojęcia, jak i pewne elementy wiedzy są wpisane w naszą racjonalną naturę[1].

Empiryści odrzucają możliwość poznania czysto rozumowego. Rozum nie stanowi ich zdaniem osobnej władzy poznawczej, dającej nam wiedzę niezależną od źródeł empirycznych. Stosuje się to do wszelkich rodzajów wiedzy, a w szczególności do wiedzy matematycznej. W związku z tym musi być ona w pewien sposób (choćby pośredni) umocowana w doświadczeniu zmysłowym. Taki pogląd głosił m.in. Mill, ale możliwe jest tu całe spektrum stanowisk. Należy przy tym odróżnić uzasadnienie od genezy: przecież nawet Leibniz, który z pewnością był racjonalistą, pisał:

> Stąd wydaje się, że prawdy konieczne, takie, jakie znajdujemy w matematyce czystej, a w szczególności w arytmetyce i geometrii, muszą mieć podstawy, których uzasadnienie nie zawisło […] od świadectwa zmysłów, mimo że bez zmysłów nigdy nie ośmielono by się o nich myśleć (Leibniz 1955: 7)[2].

We współczesnym języku mówilibyśmy o kontekście odkrycia i kontekście uzasadnienia. Tezę empiryzmu można więc formułować na kilka sposobów — w zależności od tego, czy chodzi o (i) pochodzenie wiedzy matematycznej, (ii) jej uzasadnienie, czy też (iii) metodologiczne aspekty uprawiania matematyki.

Filozoficzna dyskusja wokół empirycznych elementów (aspektów, źródeł) wiedzy matematycznej może dotyczyć różnych obszarów, z których najważniejsze to:

1. *Ontologia*. W jaki sposób tezy dotyczące empirycznych źródeł matematyki rzutują na dyskusję ontologiczną (a zwłaszcza na dyskusję realizmu z antyrealizmem w filozofii matematyki)?

2. *Epistemologia*. Tu dyskusja dotyczyć będzie źródeł i natury wiedzy matematycznej — w szczególności jej źródeł empirycznych (a może wręcz empirycznego charakteru). Teza empiryzmu — sformułowana swobodnie — głosiłaby, że korzenie poznania matematycznego tkwią ostatecznie w empirii. W silniejszej postaci głosić będzie, że nie ma żadnego odrębnego, pozaempirycznego sposobu poznania matematycznego.

---

[1] Paradygmatycznym przykładem racjonalisty jest Kartezjusz, a w dwudziestym wieku reprezentantem takiego poglądu na matematykę był Gödel.

[2] Kant pisał zaś: „Choć jednak wszelkie nasze poznanie rozpoczyna się wraz z doświadczeniem, to przecież nie całe poznanie wypływa właśnie dlatego z doświadczenia” (Kant 1957: B1, 60-61).

3. *Metodologia*. W tle tych dyskusji (bądź na uboczu — zależnie od punktu widzenia) toczy się debata metodologiczna, dotycząca mechanizmów uprawiania matematyki i ewentualnych podobieństw do mechanizmów występujących w naukach empirycznych[3]. Można bowiem utrzymywać, że matematyka także z metodologicznego punktu widzenia przypomina nauki empiryczne. Zgodnie z radykalną wersją tej tezy w samej matematyce też wolno stosować procedury empiryczne.

Na wymienione obszary problemowe nakłada się wiele pytań szczegółowych. Przyjmę tu następującą schematyzację zagadnień:

1. Zagadnienie stosowalności matematyki.
2. Empiryzm a realizm matematyczny.
3. Status dowodu matematycznego a empiryzm.
4. Uzasadnianie prawd matematycznych i status aksjomatów.
5. Natura wiedzy matematycznej.

Klasyfikacja ta została sformułowana w sposób bardzo hasłowy — sądzę jednak, że jest użyteczna i warto mieć ją na uwadze przy lekturze. Odnoszę się do niej przy omawianiu poszczególnych poglądów.

Praca ma charakter systematyczny, choć różne koncepcje przedstawiane są na przykładzie ich zwolenników: prezentacja historyczna nie jest celem samym w sobie, lecz służy czytelnemu przestawieniu możliwych stanowisk. Omawiam i analizuję m.in. poglądy Milla, Berkeleya, Carnapa, Quine'a i Putnama. Wybór takich, a nie innych myślicieli jest uzasadniony tym, że reprezentują oni wyraziste — i zarazem zróżnicowane — ujęcia matematyki. Przy wspólnym mianowniku, jakim jest szeroko rozumiany empiryzm, dochodzą do bardzo różnych wniosków dotyczących natury i statusu matematyki. Zasadna jest zatem teza, że choć można mówić o wątkach i inspiracjach empirystycznych w filozofii matematyki, to nie istnieje dobrze zarysowane, jednolite stanowisko „matematycznego empiryzmu".

Empiryzm matematyczny może przyjmować różne formy — od radykalnych (i często naiwnych) po bardzo subtelne. Ich przedstawianie rozpocznę od skrajnej odmiany pochodzącej od Johna Stuarta Milla.

2. MILL — GEOMETRIA JAKO GEODEZJA

Pogląd Milla jest zapewne najbardziej ekstremalnym stanowiskiem empirystycznym w historii filozoficznych rozważań nad matematyką. W swoich analizach odnosi się w zasadzie tylko do (bardzo elementarnej) arytmetyki i geometrii. Obie dyscypliny uważa za swoiste idealizacje wiedzy empirycznej. Jego zdaniem cała nasza wie-

[3] Temu zagadnieniu poświęcę tutaj stosunkowo najmniej miejsca, ponieważ wyczerpująco omówiłem je — w kontekście koncepcji Lakatosa — w innej pracy (Wójtowicz 2012). W tekst wplecione są jednak uwagi dotyczące tej problematyki.

dza arytmetyczna pochodzi z obserwacji, których przedmiotem jest codzienna praktyka liczenia przedmiotów[4]. Uogólniamy przy tym — i to tak dalece, że zapominamy o pierwotnych źródłach naszej wiedzy i zaczynamy sądzić, że wiedza ta ma charakter aprioryczny. Co więcej, jesteśmy skłonni sądzić, że wiedza matematyczna dotyczy jakichś abstrakcyjnych bytów[5]. Mill jednak — jako nominalista — twierdzi, że prawdy arytmetyki nie dotyczą żadnych abstrakcyjnych przedmiotów. Liczba jest zawsze liczbą *czegoś* — nie ma więc liczb *per se*.

Drugim filarem matematyki jest geometria. Badamy nieskończone proste, płaszczyzny, idealne kule, sześciany, bryły platońskie (*nomen omen*). Mill zdecydowanie odrzuca punkt widzenia, zgodnie z którym geometria dotyczy tworów idealnych: geometria jest nauką empiryczną o własnościach naszej przestrzeni fizycznej. Mill rozważa przykład elementarnej prawdy geometrycznej mówiącej, że dwie różne proste mogą się przecinać tylko w jednym punkcie. Jego zdaniem źródłem tej wiedzy — podobnie, jak pozostałych prawd geometrycznych — jest obserwacja:

> Twierdzenie „Dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni" albo innymi słowy: „Dwie proste, które raz się spotkały, nie spotykają się znowu, lecz stale oddalają się coraz więcej od siebie" — to zdanie jest wnioskiem indukcyjnym na podstawie danych, jakich nam dostarczają nasze zmysły (Mill 1962a: 358).

Do twierdzeń geometrycznych nie dochodzimy więc na drodze kontemplacji idealnego świata tworów geometrycznych, lecz na drodze uogólniania wyników obserwacji.

W związku z tym wiedza matematyczna nie ma bynajmniej charakteru wiedzy pewnej, w każdym razie nie bardziej niż fizyka. Naszą wiedzę geometryczną tworzymy zaś w ten sposób, że abstrahujemy od pewnych własności badanych przedmiotów, biorąc pod uwagę tylko niektóre aspekty, ważne z punktu widzenia naszych potrzeb[6]. Geometria jest po prostu nauką empiryczną, która w przybliżony sposób opisuje geometryczne własności przestrzeni fizycznej. Te przybliżenia są oczywiście obarczone pewnym błędem, ale zaspokajają nasze potrzeby i „nie narażamy się na żaden poważniejszy błąd w praktyce, gdy przyjmiemy fikcyjnie, że jest to prawda ścisła" (Mill 1962a: 350).

---

[4] Podstawowe prawdy arytmetyki poznajemy według Milla w doświadczeniu. A są to „aksjomaty potoczne, dotyczące równości. A mianowicie: »rzeczy, równe tej samej rzeczy, są równe między sobą"; „rzeczy równe, dodane do równych, dają sumy równe« (żadnych innych aksjomatów nie potrzeba)" (Mill 1962b: 201).

[5] „Wielka ogólność i odległość nie tyle od danych zmysłowych, ile od wyobraźni wzrokowej i dotykowej, praw, jakie dotyczą liczb, sprawia, iż nieco trudny jest wysiłek myśli oderwanej, potrzebny do zrozumienia, że te prawa są w rzeczywistości prawdami fizykalnymi, osiągniętymi drogą obserwacji" (Mill 1962b: 210).

[6] „Myślimy cały czas o dokładnie takich przedmiotach, jakieśmy widzieli i dotykali, ze wszystkimi własnościami, które z natury rzeczy im przynależą; ale dla naukowej wygody wyobrażamy sobie fikcyjnie, że te przedmioty obrane są z wszelkich własności, wyjąwszy te, które są istotne dla naszego celu i ze względu na które mamy zamiar rozważać te przedmioty" (Mill 1962a: 351).

Takie stanowisko jest z całą pewnością nie do pogodzenia z racjonalistyczną wizją geometrii (i w ogóle matematyki) jako wiedzy pewnej, obejmującej wieczne, niezmienne prawdy, poznawane w sposób czysto rozumowy, które dotyczą „królestwa bytów idealnych". W ujęciu racjonalistycznym wiedza matematyczna ma charakter konieczny, status wiedzy pewnej i niepodważalnej[7]. Mill kwestionuje jednak ten punkt widzenia: „ten charakter konieczności, przypisywany prawdom matematyki, i nawet (z pewnymi zastrzeżeniami […]) szczególna pewność im przypisywana, jest złudzeniem" (Mill 1962a: 348). Wszystkie twierdzenia geometrii należy interpretować w duchu idealizacyjnym: mówią nam one, co by się stało, gdybyśmy przeprowadzili pewne konstrukcje z dostatecznie małym błędem, zaniedbywalnym z uwagi na nasze potrzeby poznawcze.

Należy dodać, że Mill przypisuje geometrii status *wiedzy* właśnie. Badania geometryczne nie dotyczą więc bynajmniej fikcji[8]. W przeciwnym razie nie dałoby się wyjaśnić, jak to możliwe, że wiedza matematyczna znajduje zastosowanie przy opisie świata fizycznego. Mill zatem — podobnie jak dzisiejsi uczestnicy debaty między realizmem a antyrealizmem — uważa problem stosowalności matematyki za istotny dla dyskusji filozoficznej. Rozwiązuje go jednak w bardzo specyficzny sposób: twierdzi po prostu, że geometria nie tyle ma zastosowanie w fizyce, ile raczej zwyczajnie *jest* fizyką. Należy od razu dodać, że Mill — jako nominalista — odrzuca wyjaśnienie w duchu konceptualizmu. Jego zdaniem nie jest bowiem możliwe utworzenie wyobrażeń figur geometrycznych, a tym samym geometria nie może tych wyobrażeń dotyczyć[9]. Ostatecz-

[7] Taki był np. punkt widzenia Kartezjusza czy Gödla. Zdaniem Kartezjusza podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których „możemy nie obawiając się omyłki dojść do poznania rzeczy" (Descartes 1958: 12), to intuicja i dedukcja. Intuicję Kartezjusz określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy" (Descartes 1958: 12). Poznanie intuicyjne (które obejmuje w szczególności poznanie matematyczne) stanowi więc pewien czysto intelektualny akt, który prowadzi do wiedzy pewnej. Gödel pisał zaś: „Pomimo ich [tj. obiektów teorii mnogości] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe" (Gödel 1964: 271).

[8] Z całą pewnością do Milla nie przemawiałaby koncepcja wiedzy matematycznej głoszona przez współczesnych fikcjonalistów, takich jak Field i Balaguer. Twierdzą oni — w pewnym uproszczeniu — że matematyka stanowi fikcję przydatną z punktu widzenia potrzeb nauki, ale sama w sobie nie ma żadnego przedmiotu badań (por. Field 1980, Balaguer 1998). Gwoli uzupełniania warto dodać, że Balaguer, analizując tę wersję stanowiska antyrealistycznego, traktuje ją czysto hipotetycznie i poświęca drugą część pracy analizie radykalnego realizmu — uznaje oba te stanowiska za jedyne konsekwentne w obrębie obu obozów (tj. antyrealizmu i realizmu matematycznego).

[9] „Skoro więc ani w naturze, ani w umyśle ludzkim nie istnieją przedmioty, dokładnie odpowiadające definicjom geometrii, i skoro nie można przecież przyjąć, że nauka ta zajmuje się rzeczami nie istniejącymi, przeto nie pozostaje nic innego, jak uważać, że geometria zajmuje się takimi liniami, kątami i figurami, jakie istnieją rzeczywiście" (Mill 1962a: 350).

nie więc geometria ma charakter nauki empirycznej i — choć posługuje się idealizacją — dotyczy realnie istniejących przedmiotów fizycznych.

Zdania geometrii nie mają zatem charakteru prawd koniecznych. To zaś, że jesteśmy skłonni taki status im przypisywać, wynika stąd, że nasze dane empiryczne mają bardzo regularny charakter:

> Gdy często byśmy widzieli dwie rzeczy razem, […] mocą pierwotnego prawa kojarzenia rośnie trudność, która w końcu może stać się niepokonalna, przedstawienia sobie tych dwóch rzeczy oddzielnie (Mill 1962a: 371)[10].

Niemniej, nie ulega wątpliwości, że w geometrii dowodzimy nowych twierdzeń, opierając się na przyjętych wcześniej założeniach. Czy nie stoi to w sprzeczności z tezą Milla, że *cała* wiedza geometryczna ma charakter empiryczny? Jak wyjaśnić dedukcyjny składnik geometrii — i w szczególności status tak uzyskanej wiedzy? Czy również ten rodzaj wiedzy ma charakter empiryczny, a jeśli tak, to w jakim sensie? Mill stawia tu mocną tezę: dedukcja to jedynie droga na skróty, ale nie prowadzi do żadnej *istotnie nowej* wiedzy (tzn. niedającej się uzyskać na drodze doświadczenia):

> Każde twierdzenie geometrii jest prawem dotyczącym natury zewnętrznej i można by je było ustalić, uogólniając na podstawie obserwacji i eksperymentu, które w tym przypadku sprowadzało się do porównania i mierzenia (Mill 1962b: 211).

Pod tym względem geometria nie różni się np. od zoologii. Natomiast różni się od niej tym, że podstawowych praw geometrycznych jest na tyle mało, że można z nich utworzyć system dedukcyjny (a byłoby to niemożliwe w wypadku zoologii). Możemy korzystać z dedukcji dzięki temu, że mamy „możność tworzyć […] w myśli obrazy wszelkich możliwych zestawień linii i kątów" (Mill 1962a: 363). Możemy tworzyć wyidealizowane obrazy obiektów, będących przedmiotem badań geometrii, a następnie:

> uczynić te obrazy przedmiotem geometrycznego eksperymentowania. […] Obrazy bowiem, jeśli są dostatecznie dokładne, przedstawiają wszelkie własności, jakie ujawniłyby przedmioty rzeczywiste w pewnym momencie przy prostym na nie spojrzeniu (Mill 1962a: 363).

Empirystyczna teza Milla jest bardzo silna: twierdzi on bowiem nie tylko, że wiedza matematyczna ma swój początek w doświadczeniu, lecz także iż wszelka wiedza geometryczna jest potencjalnie dostępna na drodze obserwacji. Można powiedzieć, że nasza zdolność do rozumowego ujmowania zagadnień nie wnosi żadnej „wartości dodanej", a jedynie usprawnia proces zdobywania wiedzy[11].

---

[10] „Nasza zdolność lub niezdolność ujmowania pojęciowego jakiejś rzeczy bardzo niewiele ma wspólnego z możliwością samej tej rzeczy" (Mill 1962a: 370). W innym miejscu deklaruje: „Jestem bowiem przekonany, że nie potrzeba nic więcej niż umiarkowanej znajomości tych praw, ażeby rozwiać złudzenie, które przypisuje swoistą konieczność naszym najwcześniejszym wnioskom indukcyjnym z doświadczenia i które mierzy możliwość rzeczy samych w sobie ludzką zdolnością przedstawiania ich sobie" (Mill 1962a: 376).

[11] Koncepcja ta przypomina nieco poglądy Hilberta na temat roli tzw. matematyki idealnej i Fielda na temat statusu matematyki w ogóle. Przypomnijmy, że według Hilberta można wyróżnić

Jako radykalny empirysta Mill odrzucał stanowisko kantowskie, w myśl którego zdania matematyczne są syntetyczne *a priori.* Zdaniem Kanta twierdzenia geometrii dostarczają wiedzy dotyczącej świata empirycznego (a nie tylko zależności czysto pojęciowych), ale nie dlatego, że pochodzą z doświadczenia, lecz dlatego, że stanowią ramy organizujące nasze doświadczenie. Czas i przestrzeń to formy, w których jawią się nam dane zmysłowe. Wiedza matematyczna dlatego więc dotyczy świata empirycznego, że warunkuje nasze postrzeganie świata. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, według Kanta przyroda nie tyle jest sama w sobie matematyczna, ile raczej jest jako taka postrzegana (konstruowana) przez poznający podmiot. Mill oczywiście sprzeciwia się takiemu rozwiązaniu: w zdaniach matematyki nie ma nic apriorycznego, dotyczą świata w takim sensie, w jakim go dotyczą zdania nauk empirycznych[12].

Mill jest zatem empirystą radykalnym zarówno jeśli chodzi o problem genezy, jak i uzasadnienia wiedzy matematycznej. Początkiem procesu zdobywania wiedzy jest obserwacja, następnie metodą indukcyjnych uogólnień dochodzimy do podstawowych zasad matematycznych, a dedukcja usprawnia proces zdobywania wiedzy, lecz nie wnosi nic *istotnie* nowego.

Jak z punktu widzenia takiej koncepcji odnieść się do pięciu zagadnień wymienionych we wstępie? Odpowiedzi na te pytania udzieliłem dość obszernie w dotychczasowym wywodzie, tutaj jedynie krótko je podsumuję.

Zagadnienie stosowalności matematyki. Sprawa jest dość oczywista: matematyka stosuje się w nauce, ponieważ sama ma charakter empiryczny. Np. twierdzenia geometrii to po prostu wyidealizowane wersje stwierdzeń o przestrzeni fizycznej; podobny jest status zdań arytmetycznych[13].

Empiryzm a realizm matematyczny. Matematyka nie ma żadnego odrębnego przedmiotu badań (rozumianego jako system abstrakcyjnych bytów). Mill jest zatem antyrealistą.

Status dowodu matematycznego a empiryzm. Dedukcja stanowi jedynie drogę na skróty, nie wnosi nic istotnie nowego. Wiedza matematyczna nie tylko ma swój

---

matematykę idealną (MI) oraz matematykę realną (MR). Mówiąc w pewnym uproszczeniu, zdania MR mają pewną treść, natomiast MI pełni rolę pomocniczą. Ważna w analizach Hilberta jest *nietwórczość* MI względem MR: każde zdanie MR, które daje się uzasadnić w MI, można też uzasadnić w MR. Field (1980) formułuje bardzo radykalne tezy dotyczące roli matematyki, odwołując się do technicznego pojęcia nietwórczości teorii. Formalnie rzecz biorąc, teoria T* jest nietwórcza nad teorią T (ze względu na klasę zdań A), jeśli dowolne zdanie $\alpha \in A$, które można udowodnić w ramach teorii T*, jest też dowodliwe na gruncie teorii T. Mówiąc swobodnie, przez teorię T* prowadzi droga na skróty, ale ostatecznie dojdziemy w to samo miejsce. Umożliwia to traktowanie teorii T* jako pomocniczego narzędzia, które samo w sobie nie ma interpretacji, ale jest użyteczne.

[12] Dodajmy tu, że empiryzm Milla różni się od empiryzmu Hume'a, według którego zdania matematyczne są koniecznymi prawdami analitycznymi: dla Milla są one zdaniami przygodnymi *a posteriori.*

[13] Oczywiście, Mill rozważa tylko absolutnie elementarne zastosowania.

początek w doświadczeniu, lecz wręcz sprowadza się do wiedzy o charakterze doświadczalnym.

Uzasadnianie prawd matematycznych i status aksjomatów. Podstawowe prawdy matematyczne znajdują uzasadnienie w doświadczeniu, a nasze przekonanie, że dotyczą jakiejś sfery abstrakcyjnej, jest złudzeniem. Np. wiedzę geometryczną zdobywa się przez uogólnienie wyników obserwacji. Aksjomatyzacja teorii jest możliwa, ponieważ istnieje stosunkowo niewiele podstawowych zasad (inaczej niż w wypadku nauk szczegółowych). W matematyce oczywiście dowodzimy twierdzeń, ale nie wnoszą one nic nowego (z logicznego punktu widzenia).

Natura wiedzy matematycznej. Wiedza matematyczna stanowi uogólnienie wyników obserwacji, dotyczy rzeczywistości empirycznej i nie odwołuje się do intuicji matematycznej jako czysto rozumowej zdolności pojmowania prawd.

Czy taki obraz matematyki do nas przemawia? W pewnym, niewielkim stopniu — tak. Gdyby geometria dotyczyła jedynie reguł praktycznych (np. reguł geodezyjnych czy topograficznych), moglibyśmy się zgodzić, że reguły te tworzymy tak, jak to opisuje Mill[14]. Możemy przyjąć, że proste hipotezy geometryczne stawiamy na drodze uogólniania wyników obserwacji. Koncepcja Milla zawiera w sobie ziarnko prawdy i może służyć za wyjaśnienie formowania się naszych przekonań matematycznych na bardzo elementarnym poziomie. Dziecko nieznające żadnych twierdzeń może na poziomie heurystycznym posługiwać się swoimi obserwacjami (np. takimi, że jeśli kąty trójkąta są równe, to jego boki też) i te obserwacje podnosić do rangi ogólnych tez (niekoniecznie jednak określając je mianem „twierdzeń matematycznych"). Wykonywane przez nas szkice mogą stanowić punkt wyjścia do formułowania hipotez. Jednak nie uznajemy „dowodów szkicowych": każda wysunięta w ten sposób hipoteza musi zostać udowodniona[15]. Co więcej, tego typu „obserwacyjne twierdzenia" bardzo często okazują się fałszywe, ponieważ np. nasza idealizacja idzie zbyt daleko (a błąd obserwacji jest zbyt duży). Pewne, nawet elementarne twierdzenia geometryczne wykraczają zdecydowanie poza zdolność naszej obserwacji[16].

Choć koncepcję Milla można byłoby (z licznymi zastrzeżeniami) zaakceptować w odniesieniu do najprostszych fragmentów matematyki, to trudno sobie wyobrazić, w jaki sposób mielibyśmy ją stosować do opisu bardziej złożonych pojęć, pozbawio-

---

[14] Mill pisał zresztą o geodezji: „Ten plan działania stosuje się przy trygonometrycznym przeglądzie kraju" (Mill 1962b: 215).

[15] Brown (1999) analizuje rolę dowodów rysunkowych i twierdzi, że odgrywają one istotną rolę w naszej praktyce matematycznej. Rzeczywiście, nie ma wątpliwości, że w wielu sytuacjach szkic (diagram, rysunek itp.) bardzo ułatwia zrozumienie sytuacji, idei dowodu, itd. — i na poziomie „machania rękami" może być w zupełności wystarczający. Szkice, rysunki, poglądowe modele mogą mieć dużą wartość dydaktyczną. Nie zmienia to jednak faktu, że nie stanowią dowodów.

[16] W praktyce mapy są wystarczająco dokładne. Ale przecież mapa to odwzorowanie powierzchni o pewnej krzywiźnie, istnieje zaś twierdzenie, które mówi, że takie odwzorowanie zawsze zaburza kąty i odległości.

nych poglądowych modeli fizycznych. Jak widać, Mill ogranicza swoje analizy do matematyki wczesnoszkolnej (i to wczesnoszkolnej, a w każdym razie szkolnej, nawet w jego czasach[17]), nic więc dziwnego, że jego stanowisko jawi się nam jako naiwne i anachroniczne.

Niemniej warto pamiętać, że choć koncepcja Milla nie wytrzymuje krytyki i razi naiwnością, to niewątpliwie stanowi silne dowartościowanie wątku empirystycznego w matematyce. Trudno wskazać kontynuatorów radykalnej myśli Milla[18], ale można zauważyć pewne nawiązania (przy całej nieostrości tego pojęcia) do tego podejścia także we współczesnej filozofii matematyki, w której żywy jest nurt akcentujący empiryczną składową wiedzy matematycznej, a także wskazujący na pewne metodologiczne podobieństwa matematyki i nauk empirycznych.

3. BERKELEY — MATEMATYKA JAKO PRAKTYCZNA FIKCJA

W niehistorycznych pracach dotyczących filozofii matematyki Berkeley pojawia się stosunkowo rzadko. Matematyka nie była głównym przedmiotem jego zainteresowań, poświęcił jej jednak nieco miejsca w swoich analizach. Jego stanowisko stanowi wyrazisty przykład instrumentalizmu naukowego i matematycznego, można przy tym rzec, że przyjmuje postać bardzo współczesną.

Berkeley był jednym z najbardziej radykalnych empirystów w historii filozofii. Jego koncepcja bywa przedstawiana (przez niefilozofów) jako dziwaczna i wydumana, ale sam Berkeley uważał ją za całkowicie zdroworozsądkową, a jedną z jego motywacji było uwolnienie naszego myślenia od arbitralnych i prowadzących na manowce założeń. Jednym z celów Berkeleya była analiza znaczenia tez dotyczących istnienia przedmiotów: jego słynną zasadę *esse est percipi* można rozumieć w duchu analitycznym jako eksplikację sensu terminu „istnieć". W ujęciu Berkeleya „istnieć" sprowadza się do „być postrzegalnym"[19]. Wygłaszając twierdzenia o istnieniu przedmiotów materialnych, mamy więc na myśli jedynie fakt, że nasze wrażenia układają się w taki, a nie inny sposób. W związku z tym postulaty dotyczące istnienia przedmiotów fizycznych należy rozumieć wyłącznie jako twierdzenia o strukturze dostępnych nam danych zmysłowych. Jakiekolwiek inne tezy mają charakter nieuprawnionych spekulacji. Jest to zatem pogląd utrzymany w duchu minimalizmu

---

[17] Mill opublikował swoje główne dzieło, gdy geometria różniczkowa, rachunek różniczkowy i całkowy, algebra, teoria liczb zespolonych itd. były już na rozwiniętym poziomie. Nie zapominajmy też o już odkrytych wówczas geometriach nieeuklidesowych.

[18] Radykalnym empirystą jest Kitcher (np. 1983). W jednym z tekstów stwierdził, że ponieważ Mill nie żyje, to pozostał już tylko jeden reprezentant radykalnego empiryzmu w filozofii matematyki.

[19] „Kiedy powiadam, że stół, na którym piszę, istnieje, znaczy to, że go widzę i dotykam. Jeślibym zaś był poza moją pracownią, wówczas powinienem powiedzieć, że stół istniał — rozumiejąc przez to, że gdybym był wewnątrz, wówczas mógłbym go postrzegać, lub że jakiś inny duch postrzega go w tej chwili" (Berkeley 2005: 26, § 3).

(jeśli chodzi o przyjmowane założenia) i radykalnego empiryzmu: dane zmysłowe nie uzasadniają hipotez metafizycznych na temat istnienia podłoża, którego dotyczą.

W podobnie bezkompromisowym duchu utrzymane są poglądy Berkeleya na naukę. Można powiedzieć, że są one zbliżone do neopozytywistycznego instrumentalizmu. Zdaniem Berkeleya prawa fizyki dotyczą jedynie struktury naszych wrażeń, które są w nas odciskane przez Boga w pewnym określonym porządku[20]. Wrażenia są tym, co — ostatecznie — stanowi przedmiot naszej wiedzy, i nie ma powodu, aby doszukiwać się rzeczywistości wykraczającej poza to, co jest nam bezpośrednio dane we wrażeniach. Nie należy w szczególności poszukiwać żadnej ukrytej natury zjawisk, a wiedza naukowa nie ma polegać na ukazywaniu ukrytych przyczyn, lecz „na szerokości ujęcia, która pozwala na odkrycie w przyrodzie podobieństw, zgodności i dostosowania i na wyjaśnienie poszczególnych skutków przez sprowadzenie ich do ogólnych reguł" (Berkeley 2005: 66, § 105). Poszukujemy jedynie prawidłowości w naszym obrazie świata i staramy się je ująć w stosowne ramy teoretyczne.

Według Berkeley'a, aby skutecznie posługiwać się teoriami naukowymi, przyjmujemy w nich różne założenia, wprowadzając w szczególności terminy dotyczące pewnego typu obiektów i przypisywanych im własności. Należy jednak pamiętać, że terminy te nie muszą dotyczyć ani faktycznie istniejących przedmiotów, ani ich rzeczywistych cech. Na przykład termin „siła grawitacji" wprowadzamy jedynie jako narzędzie opisu, jako element systemu pojęciowego, w ramach którego opisujemy ruch ciał — a nie jako pojęcie, które opisuje jakieś realnie istniejące byty czy ich własności. Terminy naukowe stanowią jedynie pomocnicze konstrukcje, użyteczne fikcje służące do opisu porządku wrażeń[21].

Poglądy Berkeleya w kwestii matematyki są równie skrajne. Cała wartość matematyki sprowadza się *jedynie* do jej użyteczności w nauce. Na przykład, przedmiotem badań arytmetyki jest liczenie — ale liczenie przedmiotów, a nie liczenie samo w sobie:

> W arytmetyce bierzemy pod uwagę nie rzeczy, lecz znaki, które jednak rozważamy nie ze względu na nie same, ale dlatego, że stanowią dla nas wskazówkę, jak obchodzić się z rzeczami i jak się nimi właściwie posługiwać. […] Oczywistym jest, że uważane za takowe, abstrakcyjne prawdy i twierdzenia dotyczące liczb w rzeczywistości nie odnoszą się do żadnych przedmiotów, które byłyby różne od konkretnie liczonych rzeczy. […] Badanie ich dla nich samych byłoby zajęciem równie nierozumnym i bezużytecznym, co trwonienie czasu na niedorzeczną krytykę samych słów lub na czysto werbalne rozumowania i spory, lekceważąc przy tym właściwy użytek czy pierwotny cel i przeznaczenie języka (Berkeley 2005: 75, § 122).

[20] Należy pamiętać o religijnych motywacjach filozofii Berkeleya: twierdził, że ostateczną rzeczywistością jest Bóg będący źródłem wrażeń odciskanych w naszej jaźni w określonym porządku, który interpretujemy jako porządek zdarzeń fizycznych.

[21] „Mechanik posługuje się pewnymi abstrakcyjnymi i ogólnymi terminami, wyobrażając sobie w ciałach siłę, działanie, przyciąganie […], które dla teorii, formuł, a także obliczeń dotyczących ruchu są wielce pożyteczne, chociaż na próżno by ich szukać w rzeczywistości i w faktycznie istniejących ciałach, podobnie jak na próżno by szukać tych rzeczy, które są fikcjami stworzonymi przez geometrów na drodze matematycznej abstrakcji" (G. Berkeley, *De motu* 39, IV: 20, cyt. za Copleston 1997: 263).

Berkeley twierdzi, że motywacją do prowadzenia badań arytmetycznych jest wyłącznie praktyczna potrzeba liczenia przedmiotów i to ona stanowi jedyne źródło naszych przekonań arytmetycznych. Matematyka w oderwaniu od zastosowań nie ma wartości poznawczej[22]. Jest tak zarówno w wypadku arytmetyki, jak i geometrii. Kartezjusz sądził, że geometria przynosi (na drodze czysto rozumowych analiz) wiedzę o naturze przestrzeni fizycznej. Dla Berkeleya jedyna wartość geometrii polega na tym, że daje nam ona praktycznie użyteczne narzędzia. Mimo że geometria rozumiana jako nauka o nieskończenie podzielnej przestrzeni to zwykła fikcja (Berkeley odrzuca tezę o nieskończonej podzielności przestrzeni), nie narusza to prawomocności zasad geometrii — rozumianych jako zasady praktyczne[23][24].

W jakim sensie Berkeley jest matematycznym empirystą? Czy twierdzi, że prawdy matematyczne są uprawomocnione empirycznie? Problem dotyczy rozumienia pojęcia „prawda matematyczna”. Berkeley odrzuca oczywiście tezę, że matematyka odnosi się do abstrakcyjnych idei: jest zdeklarowanym nominalistą. Zdania matematyczne mają status fikcji, które pomagają nam formułować teorie naukowe w użytecznej dla nas postaci. Nie można więc mówić o prawdach matematycznych w sensie klasycznej koncepcji prawdy. Matematyka stanowi fragment systemu pojęciowego, w obrębie którego opisujemy dane (podobnie jak pojęcie „siła grawitacji” dostarcza nam wygodnego sposobu mówienia o ruchu ciał, choć nie odpowiada jej żaden rzeczywisty byt). Teorie matematyczne mają charakter pomocniczy, a jedynym usprawiedliwieniem ich uprawiania jest praktyczna użyteczność. Ostatecznie więc to, jaką postać przyjmują teorie matematyczne, zależy od wyjściowych danych doświadczenia: teorie matematyczne konstruujemy bowiem po to, aby te dane w odpowiedni sposób uporządkować. Dlatego można powiedzieć, że *w takim sensie*, według Berkeleya, źródłem wiedzy matematycznej jest doświadczenie.

Jak z punktu widzenia tej koncepcji skomentować pięć zagadnień? Niektóre z nich nie mogłyby zostać sformułowane w ten sposób w czasach Berkeleya, toteż trudno doszukiwać się u niego jakichkolwiek bezpośrednich komentarzy. Moje uwagi stanowią więc spekulacje dotyczące tego, jakie odpowiedzi wydają się najbliższe stanowiska Berkeleya.

Zagadnienie stosowalności matematyki. Teorie i twierdzenia matematyczne są jedynie użytecznymi fikcjami, a sama matematyka jest użyteczna o tyle, o ile jest przydatna. Nie ma nic zaskakującego w stosowalności narzędzia, które zostało stworzone *właśnie po to*, aby je stosować.

---

[22] „Nauka o liczbach powinna być całkowicie podporządkowana praktyce i […] staje się ona jałowa i błaha, kiedy widzi się w niej jedynie przedmiot czystej spekulacji” (Berkeley 2005: 74, § 120).

[23] „Wszystko, co w geometrii jest użyteczne […] nadal w pełni i w niewzruszony sposób obowiązuje na gruncie naszych zasad” (Berkeley 2005: 79, § 131).

[24] W pewnym sensie wolno więc uznać Berkeleya za prekursora współczesnego fikcjonalizmu w filozofii matematyki. Np. zdaniem Fielda (1980) matematykę można traktować właśnie jako użyteczną fikcję, która umożliwia konstruowanie teorii naukowych.

Odrębnym problemem wartym rozważenia byłoby natomiast pytanie: dlaczego w ogóle przyroda daje się ujmować w kategoriach matematycznych? Sądzę, że naturalna byłaby tutaj odpowiedź odwołująca się do teologicznych motywacji stanowiska Berkeleya. Źródłem wrażeń jest Bóg, który ukazuje je nam w takim właśnie porządku, że dają się ująć rozumowo, w szczególności za pomocą pojęć matematycznych.

Empiryzm a realizm. W tej kwestii Berkeley nie miałby żadnych wątpliwości: matematyka jest tylko użyteczną fikcją, żadne obiekty matematyczne nie istnieją.

Status dowodu matematycznego a empiryzm. Berkeleya możemy określić jako instrumentalistę, co wiąże się także z jego koncepcją języka. W jego ujęciu pozbawiony interpretacji system (język) może służyć do uzyskiwania znaczących poznawczo wyników — i tak właśnie dzieje się w wypadku języka matematyki:

> według rozpowszechnionego mniemania jedynym zadaniem języka jest komunikacja naszych idei i […] każda nazwa obdarzona znaczeniem reprezentuje naszą ideę. […] Wystarczy chwila namysłu, aby zdać sobie sprawę, że nie jest rzeczą konieczną (nawet w najściślejszych rozumowaniach), aby nazwy obdarzone znaczeniem i reprezentujące idee, przy każdym użyciu wywoływały w umyśle te idee, które zastępują; bo przy czytaniu i w rozmowie używa się nazw przeważnie tak jak liter w algebrze, w której, choć każda cyfra oznacza jakąś szczegółową wielkość liczbową, nie jest koniecznym dla poprawności wyliczeń, aby na każdym kroku każda cyfra przywoływała na myśl tę szczegółową wielkość, którą reprezentuje (Berkeley 2005: 17-18, § 19).

W rozumowaniach matematycznych możemy zatem posługiwać się czysto formalnymi manipulacjami, nie zastanawiając się nad interpretacją[25]. Rozumowania matematyczne nie potrzebują uprawomocnienia w aktach intelektualnego ujęcia treści. Nie tylko nie muszą mieć obiektywnego odniesienia pozajęzykowego, lecz nawet nie musimy umieć (w sensie psychologicznym) tworzyć skorelowanych z nimi pojęć. Tak jest np. w wypadku jednostki urojonej[26]. Dowody matematyczne mogą być zatem interpretowane instrumentalistycznie — jako fragment użytecznego systemu pozbawionego obiektywnego odniesienia.

Uzasadnianie prawd matematycznych i status aksjomatów. Z punktu widzenia Berkeleya matematyka sama w sobie nie ma żadnego przedmiotu badań, stanowi pomocniczy konstrukt. Ostatecznie celem nauki jest poznanie porządku zjawisk (czy ściślej: porządku, w jakim owe zjawiska nam się ujawniają), a uprawianie matematyki służy jedynie temu, aby ten cel łatwiej osiągnąć. Uzasadnieniem dla zasad ma-

---

[25] Jest to więc ujęcie zasadniczo odmienne np. od stanowiska Kartezjusza, który akcentował semantyczny aspekt rozumowań i dostrzeganie oczywistości poszczególnych kroków. Według Kartezjusza uprawomocnieniem wnioskowań jest intuicyjny wgląd, pozwalający dostrzec oczywistość i zasadność poszczególnych kroków rozumowania.

[26] „Znak algebraiczny, który określa pierwiastek z liczby ujemnej, jest używany w operacjach logistycznych, choć nie jest możliwe utworzenie idei takiej wielkości" (G. Berkeley, *Alciphron*, cyt. za Detlefsen 2005: 267).

tematycznych nie jest oczywistość, lecz ich rola w nauce[27]. Tym samym nie można mówić o prawdach matematycznych w klasycznym sensie — raczej o zestawie przydatnych technik.

Natura wiedzy matematycznej. Badania matematyczne mają charakter pomocniczy. Badania „czyste" to zwykłe łamigłówki: oderwane od praktyki naukowej nie posiadają żadnej wartości poznawczej (Berkeley 2005: 73, § 119)[28]. Uzasadnieniem dla zdań matematycznych jest wyłącznie ich użyteczność, matematyka nie opisuje żadnej pozajęzykowej rzeczywistości, a to, co określamy mianem „prawdy matematycznej", winniśmy raczej nazywać „użyteczną umową".

Stanowisko Berkeleya zbliżone jest do współczesnego instrumentalizmu. Naturalne więc będzie przyjrzenie się teraz koncepcji logicznych empirystów.

4. CARNAP — MATEMATYKA JAKO SKŁADNIA JĘZYKA NAUKI

Stosunek logicznych empirystów do matematyki wynika w naturalny sposób z ich wizji uprawiania filozofii (a w szczególności z ich poglądów na relację między filozofią a naukami szczegółowymi). Fundamentem uprawiania filozofii powinna być ich zdaniem logiczna analiza języka. Pozwala ona między innymi wykazać bezsensowność wypowiedzi metafizycznych, które są „skutkiem ubocznym" wadliwości języka naturalnego (paradygmatycznym przykładem było *Das Nichts nichtet*)[29]. To analiza logiczna stanowi podstawę rozsądnego uprawiania filozofii — a w zasadzie cała filozofia powinna sprowadzać się do logicznej analizy języka nauki.

Logiczni empiryści podkreślali, że wszelkie wypowiedzi formułujemy w obrębie pewnego języka, pewnego systemu pojęć, który uważali za zestaw swobodnie przyjętych konwencji. Tak jest też w wypadku matematyki. W jasny sposób wyłożył ten pogląd Carnap w artykule *Empiryzm, semantyka i ontologia* (1950, 2007)[30]. Stawia w nim pytanie, jak powinien być interpretowany język teorii naukowych (w szczególności ten fragment, który odnosi się do matematyki), aby nie prowadziło to do konieczności przyjmowania tez metafizycznych. Problem ten interesuje nas zwłaszcza w wypadku przedmiotów abstrakcyjnych, ponieważ język naukowy aż roi się od terminów, które zdają się do nich odnosić. Mówimy przecież o obiektach matematycznych, ale i o znaczeniach, pojęciach, możliwościach, stanowiskach, punktach widzenia, związkach przyczynowych itd. Nominalistyczna terapia wstrząsowa polegałaby

[27] Ściślej: sam fakt, że pewne zdania matematyczne jesteśmy skłonni uznać za oczywiste, nie stanowi żadnego argumentu na rzecz ich prawomocności.

[28] „Nauka o liczbach powinna być całkowicie podporządkowana praktyce i […] staje się ona jałowa i błaha, kiedy widzi się w niej jedynie przedmiot czystej spekulacji" (Berkeley 2005: 74, § 120).

[29] Słynna praca Carnapa nosi tytuł *Przezwyciężenie metafizyki przez logiczną analizę języka* (*Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache*).

[30] Prezentację stanowiska Carnapa opieram głównie na tej właśnie pracy.

na próbie wyeliminowania tych podejrzanych terminów i sformułowania spornych fragmentów teorii w postaci parafraz możliwych do przyjęcia przez nominalistę[31].

Owe terminy są jednak zbyt ważne i potrzebne z praktycznego punktu widzenia, abyśmy mogli faktycznie formułować teorie naukowe bez ich użycia. Naukowiec bez najmniejszych skrupułów posługuje się wszelkimi przydatnymi pojęciami[32]. Carnap zauważa, że fizyk-nominalista będzie w sytuacji swoistego rozdwojenia:

> będzie tak jak wszyscy mówił o tych rzeczach [t.j. bytach abstrakcyjnych], mając przy tym ciężkie sumienie i przypominając człowieka, który na co dzień postępuje niezgodnie z wysokimi standardami moralnymi, którym hołduje w niedzielę (Carnap 2007: 417).

Carnap twierdzi jednak, że możliwe jest takie wyjaśnienie problemu i statusu języka odwołującego się do terminów abstrakcyjnych, które „nie implikuje przyjęcia ontologii platońskiej, ale doskonale pasuje do empiryzmu i ściśle naukowego myślenia" (Carnap 2007: 418).

W każdej nauce mamy do czynienia z pewną aparaturą pojęciową. Wprowadzenie jej, a w szczególności poszerzenie języka, powodowane jest potrzebą usprawnienia komunikacji. Jaki jest jednak status tej aparatury — i w szczególności, czy za wprowadzeniem do języka nowych pojęć i wyrażeń kryją się jakieś deklaracje ontologiczne? Aby rozstrzygnąć ten problem, musimy uświadomić sobie, że pytanie o realność bytów pewnego typu ma dwa różne znaczenia — można powiedzieć, że rozpada się na dwa typy pytań:

(1) Pytania wewnętrzne — czyli pytania o istnienie pewnego typu bytów *wewnątrz* przyjętej siatki pojęciowej.

(2) Pytania zewnętrzne — czyli pytania o realność całego systemu bytów.

Pytania te mają różny charakter. Carnap ilustruje to zagadnienie, mówiąc o istnieniu świata rzeczy (czyli świata zewnętrznego). Kwestię tę można rozumieć jako problem wewnętrzny w następujący sposób: jeśli język dotyczący świata rzeczy zostanie zaakceptowany, to możemy *w ramach* tego języka stawiać (a następnie poddawać empirycznym testom) pytania dotyczące istnienia przedmiotów w naszym otoczeniu (planet, postaci historycznych, cząstek elementarnych, drobnoustrojów, drzew, centaurów itd.). W takim ujęciu:

> Rozpoznać coś jako rzeczywistą rzecz […] znaczy tyle, co włączyć to coś w system rzeczy […] tak, że pasuje do pozostałych rzeczy rozpoznawanych jako rzeczywiste, zgodnie z regułami aparatury pojęciowej (Carnap 2007: 419).

---

[31] Taki radykalny postulat formułuje Kotarbiński w swoim programie reizmu.

[32] Oczywiście, poddaje je rygorystycznym testom. Wprowadzanie nowych pojęć nie odbywa się *ad hoc*: zanim naukowiec zdecyduje się wprowadzić termin opisujący nową cząstkę elementarną albo nowe zjawisko społeczne, bada wszelkie argumenty za przyjęciem lub odrzuceniem tego rozwiązania (choć w wypadku niektórych dyscyplin swoboda jest nadmierna). Nie ulega natomiast wątpliwości, że fizyk, chemik, biolog czy socjolog nie wahają się przed użyciem nawet najbardziej skomplikowanych technik matematycznych, jeśli tylko są owocne w danej dziedzinie.

Nie wiąże się to bynajmniej z żadną deklaracją metafizyczną, chodzi jedynie o stwierdzenie, że pewien system jest spójny. Inny charakter ma natomiast pytanie o istnienie świata rzeczy jako takiego. Jest ono pytaniem zewnętrznym, na które nie możemy odpowiedzieć na mocy kryteriów empirycznych. Nie jest to pytanie naukowe, ponieważ „być rzeczywistym, w sensie naukowym, znaczy być elementem systemu" (Carnap 2007: 419). Tak więc nawet przyjęcie języka, w którym mówimy o rzeczach, i nawet akceptacja (w obrębie tego języka) twierdzeń dotyczących istnienia przedmiotów określonego typu nie powinny być interpretowane jako wyraz przekonania o *realności* świata rzeczy:

> Zaakceptować świat rzeczy znaczy tyle, co zaakceptować pewną formę języka, innymi słowy, zaakceptować reguły formowania zdań, ich sprawdzania, akceptowania bądź odrzucania (Carnap 2007: 419-420).

Przyjęcie tezy o istnieniu świata rzeczy nie jest w ogóle zagadnieniem teoretycznym. Jest to kwestia wyboru wygodnej siatki pojęciowej: aparatura oparta na pojęciu przedmiotu fizycznego jest wygodniejsza niż aparatura fenomenalistyczna, odwołująca się wyłącznie do języka danych zmysłowych. Niemniej fakt, że język rzeczy jest wydajny, nie stanowi argumentu na rzecz metafizycznego realizmu.

Podobny podział na pytania wewnętrzne i zewnętrzne obowiązuje w wypadku matematyki. Carnap rozważa m.in. system liczb naturalnych, zauważając, że siatka pojęciowa tego systemu jest konstruowana przez wprowadzanie do języka nowych wyrażeń (np. liczebników, zmiennych, kwantyfikatorów itd.) wraz z regułami ich użycia. Także w wypadku tej aparatury pojęciowej mamy do czynienia z pytaniami wewnętrznymi (np. „czy istnieje liczba pierwsza większa niż 100?"), przy czym odpowiedzi można uzyskać przez analizę logiczną, opierając się na regułach konstrukcji pojęcia liczby. Tezy uzasadniane w ten sposób są prawdziwe analitycznie.

Oczywiście, *w ramach* aparatury pojęciowej liczb pytanie o ich istnienie jest banalne, a odpowiedź tautologiczna. Filozofowie nie pytają jednak oczywiście o to, czy siatka pojęciowa okazałaby się pusta, gdyby została przyjęta. Nie chodzi im przecież o czysto syntaktyczny problem niesprzeczności (pustość aparatury należałoby interpretować właśnie jako jej sprzeczność). Filozofowie rozważający takie problemy, stawiający pytanie o realność liczb, mają na myśli kwestię *poprzedzającą* dopuszczenie nowej aparatury pojęciowej. Zdaniem Carnapa do niczego to nie prowadzi, ponieważ filozofowie ci:

> nie podali do tej pory sformułowania swojego pytania w terminach zwykłego języka nauki. Nasz osąd zatem jest z konieczności taki, że nie zdołali oni nadać pytaniu zewnętrznemu, ani potencjalnym odpowiedziom, żadnej treści poznawczej. O ile, i dopóki, nie przedstawią jasnej interpretacji poznawczej, możemy w sposób usprawiedliwiony podejrzewać, że ich pytanie jest pseudo-pytaniem, czyli pytaniem, które ma formę pytania teoretycznego, ale jest w istocie zamaskowanym pytaniem nie mającym charakteru teoretycznego. W rozważanym przypadku praktycznym problemem jest, czy włączać do języka nowe formy językowe, które tworzą aparaturę pojęciową liczb (Carnap 2007: 421).

Tymczasem praktycznym decyzjom dotyczącym wyboru aparatu pojęciowego nie powinny towarzyszyć deklaracje metafizyczne[33].

Wprowadzanie do języka nauki pojęć matematycznych stanowi klarowny przykład rozszerzania aparatury pojęciowej przez wprowadzenie nowych form językowych (nowej klasy zmiennych, nowych predykatów czy stałych) wraz z regułami syntaktycznymi dotyczącymi posługiwania się tymi formami[34]. Jednak za każdym razem zewnętrzne pytanie o realność systemu odpowiednich bytów winno być traktowane jako pozbawiony treści poznawczej pseudoproblem[35].

Ostatecznie zaś decyzje dotyczące wyboru takiej, a nie innej aparatury pojęciowej podejmowane są na podstawie kryteriów pragmatycznych owocności i skuteczności. „Bądźmy ostrożni, formułując twierdzenia, i krytyczni w ich sprawdzaniu, lecz tolerancyjni w dopuszczaniu form językowych" (Carnap 2007: 433). W innym zaś miejscu pisał:

> Naszą sprawą jest nie ustanawiać zakazy, lecz dochodzić do umów. […] W logice nie ma moralności. Każdy ma prawo budować własną logikę, tj. własną formę języka, tak jak sobie życzy. Jedyne, czego się od niego wymaga, jeśli pragnie dyskusji nad swoją logikę, to to, by sformułował jasno stosowane przez siebie metody i podał reguły syntaktyczne zamiast argumentów filozoficznych (Carnap 1995: 78-79).

Można powiedzieć, że stanowisko logicznych empirystów było bardziej kantowskie niż stanowisko Milla. Mill nie wprowadzał rozdziału między wiedzą a językowym systemem pojęć, w ramach którego ta wiedza jest formułowana, a zdaniom matematycznym przypisał charakter uogólnień tez empirycznych. Ten podział jest natomiast istotny dla empiryzmu logicznego. W wypadku wizji matematyki utrzymanej w duchu kantowskim to matematyka (Kant mówił *explicite* o geometrii) narzuca formę naszych doświadczeń — dotyczących zjawisk, a nie rzeczy samych w sobie. Ta forma jest od nas niezależna: mówiąc swobodnie, jest niejako wbudowana w nasze struktury poznawcze. W myśl logicznego empiryzmu nasz opis świata również sformułowany jest w ramach pewnego systemu pojęć, choć (inaczej niż u Kanta) system ten jest kwestią naszego wyboru, motywowanego pragmatycznie. W szczegól-

---

[33] Stanowisko to jest zatem podobne do instrumentalizmu Berkeleya.

[34] W wypadku matematyki można uchwycić ten proces wzbogacania języka w stosunkowo precyzyjny sposób, dzięki analizie logicznej struktury wprowadzanych pojęć.

[35] Następujący fragment zawiera jasne podsumowanie stanowiska Carnapa w sprawie statusu siatki pojęciowej teorii naukowych — w szczególności aparatury matematycznej: „Od pytań wewnętrznych musimy jasno odróżnić pytania zewnętrzne, tj. filozoficzne pytania o istnienie lub realność całego systemu nowych bytów. Wielu filozofów traktuje pytania tego typu jako pytania ontologiczne, które trzeba stawiać i rozstrzygać przed wprowadzeniem nowych form językowych. Uważają oni, że wprowadzenie takich form językowych jest uprawnione tylko pod warunkiem, że może być ono uzasadnione za pomocą potwierdzenia realności całego systemu bytów uzyskanego dzięki intuicji ontologicznej. Sprzeciwiamy się temu poglądowi, stoimy na stanowisku, że wprowadzenie nowych sposobów mówienia nie wymaga żadnego uzasadnienia teoretycznego, ponieważ nie pociąga ono za sobą żadnego twierdzenia na temat realności" (Carnap 2007: 426).

ności cała matematyka wchodzi w skład owego systemu językowego, w obrębie którego formułujemy zdania o świecie. Ma zatem charakter analityczny — w tym sensie, że jej obowiązywanie jest wynikiem przyjętej konwencji. O prawdziwości zdań matematycznych można mówić tylko i wyłącznie w sensie wewnętrznym: nie należy sądzić, że wyrażają one jakiekolwiek prawdy faktyczne, dotyczące pozajęzykowej rzeczywistości. Jak w duchu logicznego empiryzmu odnieść się do pięciu zagadnień?

Zagadnienie stosowalności matematyki. Z faktu stosowalności matematyki nie można wyprowadzać wniosków o charakterze metafizycznym. Zawsze wypowiadamy się w jakimś języku, w jakimś systemie pojęć, a matematyka jest po prostu pewnym wygodnym systemem. Przyjęcie określonych konwencji jest motywowane tym, jakie dane musimy uporządkować, a wybór konwencji ma charakter pragmatyczny. W takim ujęciu stosowalność matematyki w opisie świata fizycznego nie ma specjalnie tajemniczego charakteru: nasza wiedza zawsze jest wyrażana w jakimś systemie językowym, a więc nic dziwnego, że schemat wybrany przez nas jako najwygodniejszy jest właśnie wygodny. Rzekoma matematyczność świata jest tylko cechą naszego systemu pojęć, a ten jest kwestią mniej lub bardziej arbitralnego wyboru. Wigner w słynnym eseju (1960, 2002) mówił o tajemniczym darze stosowalności matematyki[36]. Tajemnica opisywalności przyrody w języku matematyki fascynowała wielu filozofów i matematyków, którzy z tego faktu wywodzili tezy dotyczące racjonalności czy wręcz matematyczności świata. Z perspektywy Carnapa takie postawienie sprawy jest po prostu wadliwe. Nie wykluczam, że mógłby je określić mianem „filozoficznej egzaltacji".

Empiryzm a realizm. Empiryści logiczni nie są empirystami matematycznymi w sensie Milla. Carnap nie uważał bynajmniej, że twierdzenia matematyczne to uogólnienia wyników obserwacji (bądź wnioski z takich uogólnień). Nie można więc twierdzić, że matematyka jest nauką empiryczną — stanowi bowiem zbiór użytecznych w nauce konwencji. W szczególności nie ma pozajęzykowego odniesienia (a już na pewno nie w postaci bytów abstrakcyjnych).

Status dowodu matematycznego a empiryzm. Dowody matematyczne mają charakter logicznych konstrukcji i można je ujmować w duchu matematycznego formalizmu. W logicznym empiryzmie nie ma miejsca na rozważania dotyczące kartezjańskiej oczywistości, intelektualnego ujęcia prawd matematycznych czy jakiejkolwiek formy matematycznej intuicji[37]. Rzekome postrzeganie oczywistości prawd mate-

[36] „Cud odpowiedniości języka matematyki do formułowania praw fizyki jest niezwykłym darem, którego nie rozumiemy i na który nie zasługujemy" (Wigner 2002: 309).

[37] Przytoczmy opinię Hahna (skądinąd wybitnego matematyka): „Ponieważ intuicja okazała się zwodnicza w tak wielu przypadkach i ponieważ twierdzenia akceptowane na mocy intuicji okazywały się fałszywe (na mocy wnioskowania logicznego), matematycy stawali się coraz bardziej sceptyczni w odniesieniu do intuicji. Uznali, że nie jest rzeczą bezpieczną akceptowanie jakiegokolwiek stwierdzenia matematycznego […] na podstawie intuicyjnych przekonań. Pojawiło się dążenie do wyeliminowania intuicji z rozumowań matematycznych i do całkowitej formalizacji matematyki.

matycznych polega jedynie na akceptacji pewnych konwencji — i tego, że konwencje te prowadzą (na drodze logicznych dedukcji) do określonych wniosków[38].

Uzasadnianie prawd matematycznych i status aksjomatów. Matematyka stanowi zbiór konwencji. Racją dla przyjęcia takich, a nie innych konwencji jest ich użyteczność. Mówienie o prawdach matematycznych ma rację bytu, tylko jeśli owe prawdy rozumiemy jako prawdy wewnątrzsystemowe — jako pewnego typu reguły gry w ramach systemu, a nie jako zdania, które mówiłyby coś o pozajęzykowej rzeczywistości (matematycznej). Podobny jest status aksjomatów: nie stanowią one opisu fundamentalnych prawd o świecie matematycznym, lecz zapis podstawowych konwencji, które zdecydowaliśmy się przyjąć na potrzeby rozważań wewnątrzsystemowych.

Natura wiedzy matematycznej. Matematyka ma charakter wiedzy analitycznej. Nie jest to wiedza empiryczna (jak chciałby Mill), nie jest to też wiedza na temat naszych kategorii poznawczych czy sposobu funkcjonowania umysłu, ponieważ mamy swobodę wyboru takich, a nie innych konwencji (dotyczy to nawet logiki). Odpowiedź na klasyczne pytanie filozofii matematyki, „czy matematykę odkrywa się, czy tworzy", jest oczywista: matematyka jest wygodnym zestawem konwencji. Uprawiając matematykę, nie odkrywamy prawd o świecie, lecz identyfikujemy użyteczne w nauce zestawy pojęć. To, że niezależnie od zastosowań badania matematyczne mogą w ich autorach wywoływać poczucie odkrywania obiektywnych faktów, jest wyłącznie kwestią psychologiczną, niemającą nic wspólnego z (rzekomym) odkrywaniem wiecznych i niezmiennych prawd matematycznych.

BIBLIOGRAFIA

Balaguer M. (1998), *Platonism and Anti-platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Berkeley G. (2005), *Traktat o zasadach ludzkiego poznania*, Kraków: Zielona Sowa.

Brown J. (1999), *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, New York, NY: Routledge.

Carnap R. (1937), *Logical Syntax of Language*, London: K. Paul, Trench, Trubner & Co.

Carnap R. (1950), *Empiricism, Semantics, and Ontology*, „Revue Internationale de Philosophie" 4(2), 20-40.

Carnap R. (1995), *Logiczna składnia języka*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Carnap R. (2007), *Empiryzm, semantyka i ontologia* [w:] *Pisma semantyczne*, Warszawa: Fundacja Aletheia, 417-433.

Copleston F. (1997), *Historia filozofii*, t. 5: *Od Hobbesa do Hume'a*, Warszawa: PAX.

Detlefsen M. (2005), *Formalism* [w:] *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. Shapiro (red.), Oxford: Oxford University Press, 236-317.

Descartes R. (1958), *Prawidła kierowania umysłem. Poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

[…] Każde nowe pojęcie matematyczne miało być wprowadzane przez czysto logiczne definicje; każdy matematyczny dowód przeprowadzany za pomocą czysto logicznych środków" (Hahn 1980: 93).

[38] Z takim postawieniem sprawy oczywiście zdecydowanie nie zgadzał się Gödel (1995).

Field H. (1980), *Science without Numbers*, Oxford: Basil Blackwell.
Gödel K. (1964), *What is Cantor's Continuum Problem?* [w:] *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, P. Benacerraf, H. Putnam (red.), Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 258-273.
Gödel K. (1995), *Is Mathematics Syntax of Language?* [w:] *Collected Works*, t. 3, Oxford: Oxford University Press, 334-363.
Hahn H. (1980), *Empiricism, Logic, and Mathematics*, Dordrecht: Reidel.
Kant I. (1957), *Krytyka czystego rozumu*, t. 1, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Kitcher P. (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, NY: Oxford University Press.
Leibniz G. W. (1955), *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Mill J. S. (1962a), *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, t. 1, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Mill J. S. (1962b), *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, t. 2, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Wigner E. P. (1960), *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics" 13(1), 1-14.
Wigner E. P. (2002), *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych* [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, R. Murawski (red.), Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 293-309.
Wójtowicz K. (2012), *O pojęciu dowodu w matematyce*, Toruń: Wydawnictwo Naukowe UMK (Monografie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej).