Filozofia Nauki
Rok XXIII, 2015, Nr 2(90)

Karolina Rożko

Dwa modele reprezentacji liczb
Umysłowa oś liczbowa oraz umysłowa wiązka osi liczbowych*

Celem artykułu jest przedstawienie oraz porównanie dwóch epistemologicznych modeli liczb naturalnych — modelu umysłowej osi liczbowej (*mental number line*) w wersji zaproponowanej przez Stanislasa Dehaene'a[1] oraz modelu umysłowej wiązki osi liczbowych (*mental number cluster*) Wojciecha Krysztofiaka. Oba funkcjonują w obrębie neokantyzmu. Dehaene (1997) przytacza argumenty wspierające intuicjonizm w matematyce oraz podkreśla, że arytmetyka powinna być postrzegana jako kolejna forma przystosowania mózgu do środowiska[2], a liczby są tworzonymi przez umysł reprezentacjami:

> Numbers, like other mathematical objects, are mental constructions whose roots are to be found in the adaptation of the human brain to the regularities of the universe (Dehaene 1997: 252).

---

* Dziękuję anonimowemu recenzentowi oraz Radosławowi Placie za wnikliwą lekturę oraz uwagi, które pozwoliły udoskonalić artykuł.

[1] Model umysłowej osi liczbowej jest obecnie powszechnie przyjmowany w arytmetyce kognitywnej, lecz nadal trwa dyskusja na temat szczegółowych rozwiązań. Dla uproszczenia w artykule zostanie omówione ujęcie Dehaene'a.

[2] Podaje cztery argumenty na rzecz tego stanowiska. Po pierwsze, dzieci rodzą się z wewnętrznymi mechanizmami umożliwiającymi indywidualizację obiektów oraz określanie liczebności zbiorów o małej liczbie obiektów. Po drugie, tego typu wewnętrzną intuicję posiadają również zwierzęta, a więc jest ona niezależna od języka i wpływów kulturowych. Po trzecie, dzieci potrafią spontanicznie zacząć przybliżać liczby, porównywać je, zliczać, wykonywać proste operacje dodawania i odejmowania, nawet jeśli nie otrzymały wcześniej bezpośredniej instrukcji, jak to robić. Po czwarte, dolne obszary ciemieniowe obu półkul mózgowych zawierają neurony, które uaktywniają się tylko podczas manipulowania przez umysł liczbami (Dehaene 1997: 244-245).

Z kolei Krysztofiak formułuje swój model na gruncie tzw. kognitywnego kantyzmu, łącząc problem powstawania pojęć matematycznych z problemem postrzegania czasu. W artykule *Indexed Natural Numbers in Mind* (2011) zauważa, że struktura arytmetyki Peana może być interpretowana jako umysłowa reprezentacja dyskretnego czasu. Zgodnie z takim rozumieniem zakodowana apriorycznie forma czasu ma postać pojedynczej dyskretnej półprostej. Model ten zakłada istnienie wielu takich półprostych, a jako podstawę formalną przyjmuje arytmetykę indeksowanych liczb naturalnych[3].

Mimo że oba modele osadzone są w podobnych teoriach filozoficznych, to zostały opisane z punktu widzenia odmiennych perspektyw badawczych. Dehaene koncentruje się na neurobiologicznym aspekcie problemu. Powołuje się na wiele neurobiologicznych doświadczeń przeprowadzonych na zwierzętach, dzieciach i dorosłych[4]. Szczegółowo opisuje, jak na posługiwanie się reprezentacjami liczbowymi wpływają różnego rodzaju zaburzenia pracy mózgu spowodowane chorobami lub wypadkami (Dehaene 1997: 175-206). Czysto biologiczne podejście uzupełnia analizą rozwoju pojęć matematycznych na przestrzeni wieków oraz opisem kompetencji matematycznych członków plemion, w których językach brak liczebników złożonych (np. plemię Mundurucú, por. Pica i in. 2004, Izard i in. 2008). Z kolei Krysztofiak przedstawia formalno-logiczny opis reprezentacji matematycznych, koncentrując się na wyjaśnieniu, w jaki sposób siedmioletnie dzieci rozwiązują proste zadania matematyczne z treścią oraz w jaki sposób odczytujemy złożone liczby (takie jak np. 3467) i wykonujemy na nich operacje arytmetyczne. Szczegółowo bada też akty referencji liczebnikowej, występujące między innymi w codziennych sytuacjach konwersacyjnych (Krysztofiak 2012, 2015).

Celem artykułu jest przedstawienie poglądów obu autorów z uwzględnieniem przyjmowanej przez nich perspektywy badawczej oraz próba porównania proponowanych przez nich modeli. Oba modele mają wiele cech wspólnych, a ich osadzenie w odmiennym kontekście badawczym sprawia, że mimo wyraźnych różnic są pod pewnymi względami komplementarne[5]. Artykuł podzielony jest na trzy części.

---

[3] Arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych po raz pierwszy sformułowana została przez Harmana (1974). Nie była jednak rozwijana do czasu ukazania się w 2008 r. artykułu Krysztofiaka, który przedstawił między innymi aksjomaty oraz podstawowe własności arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych.

[4] Badania te można podzielić na dwie grupy. W pierwszej nacisk kładzie się na pomiar czasu reakcji podczas porównywania liczb lub liczności (np. badając małe dzieci, mierzy się czas, po którym dziecko przestaje się wpatrywać w pokazany mu obraz zbioru kropek lub przedmiotów). W drugiej grupie za pomocą metod takich jak obrazowanie rezonansem magnetycznym analizie poddaje się pracę mózgu podczas wykonywania zadań arytmetycznych.

[5] Warto w tym miejscu zaznaczyć, że proponowany przez Krysztofiaka model wiązki osi obliczeniowych ma odwzorowywać dojrzałą kompetencję arytmetyczną. Jednocześnie Krysztofiak przyjmuje założenie, że punktem wyjścia do uformowania się tej wieloosiowej struktury jest model pojedynczej osi obliczeniowej. W tym sensie Krysztofiak nie odrzuca modelu Dehaene'a.

W pierwszej zostaje opisany opierający się na pierwotnym „zmyśle liczb” (*number sense*) model umysłowej osi liczbowej Dehaene’a. W drugiej przedstawiam postulowany przez Krysztofiaka model nabywania arytmetycznego systemu kompetencyjnego. W trzeciej porównuję te dwie koncepcje. Pragnę zastrzec, że moim celem nie jest rozstrzygnięcie, który z tych modeli jest lepszy. Najprawdopodobniej będzie to możliwe dopiero w przyszłości po skonstruowaniu i przeprowadzeniu eksperymentów, które wykluczałyby jeden z nich, a pokazywały poprawność drugiego.

1. MODEL DEHAENE’A

Zdaniem Dehaene’a podstawą rozwoju kompetencji arytmetycznych jest posiadanie pierwotnej intuicji matematycznej, czyli tzw. zmysłu liczb. Intuicją tą dysponują zarówno niektóre zwierzęta, jak i ludzie. Dzięki niej już noworodki są w stanie odróżnić zbiór dwuelementowy od zbioru trójelementowego (Starkey, Cooper 1980, Strauss, Curtis 1981). Kilkumiesięczne dzieci potrafią dodawać do siebie dwa obiekty lub je odejmować (Wynn 1992). Operacje te są jednak ograniczone do kilku pierwszych liczb, a większość eksperymentów pozwala przypuszczać, że reprezentacja liczbowa, która jest dostępna dzieciom oraz przynajmniej niektórym zwierzętom, ma charakter przybliżony i ciągły. Pierwotna intuicja matematyczna pozwala na wykształcenie się w trakcie rozwoju dyskretnej reprezentacji liczb naturalnych:

> In essence, the number sense that we inherit from our evolutionary history plays the role of a germ favoring the emergence of more advanced mathematical abilities (Dehaene 1997: 40).

Dehaene zauważa też, że u podstaw wykonywania prostych operacji arytmetycznych przez dzieci leży założenie, zgodnie z którym świat składa się z przedmiotów dyskretnych i umiejscowionych w przestrzeni fizycznej: „The maxim »Number is a property of sets of discrete physical objects« is deeply embedded in their brains” (Dehaene 1997: 61)[6]. W tym kontekście można powiedzieć, że operacje na zbiorach są jednymi z pierwszych czynności arytmetycznych dzieci. Najprawdopodobniej to właśnie te operacje leżą u podstaw wykształcania się intuicji liczb naturalnych.

Zdaniem Dehaene’a proces powstawania w umyśle bardziej złożonej reprezentacji liczbowej zachodzi spontanicznie, a przejście od pierwotnej, ciągłej reprezentacji liczb do dyskretnej reprezentacji liczb naturalnych jest widoczne między innymi w zapisie liczb. W wielu kulturach trzy pierwsze liczby oddawane są przez zastosowanie serii identycznych znaków, dopiero większe liczby zapisywane są w bardziej skomplikowany symbolicznie sposób (Dehaene 1997: 64-66). Ponadto również struktura większości języków odzwierciedla szczególną rolę początkowych liczebników: pierwszy, drugi, trzeci.

---

[6] Pogląd ten podziela m.in. Carey (2009). Choć w przeciwieństwie do Dehaene’a wyróżnia nie jeden, lecz dwa systemy poznania rdzennego liczb, podkreśla, że oba zależą od reprezentacji zbiorów (2009: 150).

Kolejnych argumentów na rzecz istnienia związku między pierwotną reprezentacją liczbową a nabytą w trakcie rozwoju osobniczego wtórną reprezentacją liczb naturalnych dostarczają obserwacje kompetencji obliczeniowych dorosłych (Mandler, Shebo 1982, Dehaene, Dupoux, Mehler 1990). Po pierwsze, już pod koniec XIX wieku eksperyment przeprowadzony przez Jamesa McKeena Cattela pokazał, że dorośli potrafią bardzo szybko określić liczność zbiorów składających się z maksimum trzech elementów, a powyżej tej liczby i wraz ze wzrostem liczby elementów prędkość ich odpowiedzi drastycznie spada (Dehaene 1997: 66-67). Dehaene zauważa, że:

> It takes an adult about 200 or 300 milliseconds to identify each dot beyond three. This slope of 200 to 300 milliseconds corresponds roughly to the time it takes an adult to recite numbers when counting aloud as fast as possible. […] But then why is the enumeration of numbers 1, 2 and 3 so fast? The flattening of the response time curve within this region suggests that the first three dots do not have to be counted one by one. The numbers 1, 2 and 3 seem to be recognized without any appearance of counting (Dehaene 1997: 68).

Po drugie, badania te wykazały, że w wypadku percepcji liczebności istnieje wiele podobieństw między dorosłymi a dziećmi i zwierzętami[7]. Co więcej, okazało się, że również zdolność ludzi do porównywania liczb zapisanych w postaci symbolicznej jest ograniczona przez te same czynniki[8]. Pierwszy z nich związany jest z tzw. efektem odległości (*distance effect*): dwie liczby, które są od siebie odległe, jak np. 20 i 60, są szybciej porównywane niż dwie bliskie liczby np. 54 i 55. Drugi ujmowany jest przez tzw. efekt wielkości (*magnitude effect*): jeśli odległość między porównywanymi liczbami jest taka sama, to trudniej porównać liczby, które są większe np. czas porównania 110 i 130 jest dłuższy niż 10 i 30. Przy operacjach wykonywanych na liczbach ujawnia się też tzw. efekt skali (*compression effect*): mniejsze liczby są dla ludzi mniej „podejrzane". Widać to na przykład, gdy poprosi się dorosłych o utworzenie ciągu losowych liczb z przedziału 1-50. Okazuje się, że za każdym razem osoby takie wybierają więcej małych liczb niż dużych. Otrzymane wyniki wspierają hipotezę, że reprezentacje liczb, które powstają na skutek percepcji cyfr, są powiązane z pierwotnie zakodowaną w mózgu ciągłą reprezentacją przybliżonych wartości liczb. Według Dehaene'a powiązanie to polega na przełożeniu reprezentacji dokładnej liczby na jej wartość przybliżoną:

> The only explanation I can come up with is that our brain apprehends a two-digit numeral as a whole and transforms it mentally into an internal quantity or magnitude. At this stage, it forgets about the precise digits that led to this quantity. The comparison operation is concerned only with numerical quantities, not the symbols that convey them (Dehaene 1997: 76).

---

[7] W tym celu badano, w jaki sposób dorośli określają liczność zbiorów złożonych z kropek. Przede wszystkim mierzono przy tym czas potrzebny na porównanie dwóch zbiorów.

[8] Jedno z zadań polegało na jak najszybszym określeniu, czy wyświetlona dwucyfrowa liczba jest większa, czy mniejsza od liczby 65. Mierzono czas reakcji oraz trafność udzielanych odpowiedzi (Dehaene, Dupoux, Mehler 1990).

Przeprowadzone eksperymenty pokazały istnienie jeszcze jednej zależności, nazwanej efektem SNARC (*Spatial-Numerical Association of Response Codes*): przy porównywaniu liczb, im większe liczby, tym szybsza okazuje się reakcja osoby, która używa prawej ręki do udzielenia odpowiedzi, w porównaniu z reakcją osoby używającej lewej ręki, a im mniejsze liczby, tym szybsza jest reakcja lewej ręki od reakcji ręki prawej. Wyniki te można wyjaśnić, przyjmując założenie, że w jakiś sposób utożsamiamy małe liczby z lewą stroną przestrzeni, a duże z prawą. W późniejszych doświadczeniach zaobserwowano kolejny efekt nazwany SOAR (*Space-Operation Association of Responses*), który polega na tym, że podczas dodawania ludzie mają tendencję do przeszacowywania wyniku wykonywanej operacji, a podczas określania wyniku odejmowania udzielane odpowiedzi są regularnie zaniżane (Knops, Viarouge, Dehaene 2009, McKrink, Dehaene, Dehaene-Lambertz 2007).

Według Dehaene'a zaobserwowany związek między liczbami i przestrzenią jest argumentem za rozumieniem umysłowej reprezentacji liczb za pomocą metafory linii. Linia ta może być przedstawiona jako półprosta, która ma początek skrajnie po lewej stronie i rozciąga się w prawą stronę, gdzie znajdują się coraz większe liczby. Wartością początkową tej półprostej jest zero. Badania porównawcze osób wychowanych w różnych kulturach wykazały, że zwrot półprostej jest uwarunkowany kulturowo i odzwierciedla sposób zapisu liczb w danym języku: w większości języków europejskich wzrastający ciąg liczbowy zapisuje się od strony lewej do prawej np. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 itd., ale np. w Iraku liczby zapisuje się odwrotnie, czyli 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2.

Reprezentacja umysłowej osi liczbowej wykształcona na bazie najbardziej pierwotnej intuicji liczbowej również podlega istotnym ograniczeniom: reprezentuje jedynie dodatnie liczby naturalne oraz proste relacje między nimi. Nie pozwala natomiast w żaden sposób wyjaśnić, jak powstają bardziej złożone pojęcia matematyczne, takie jak ułamki, liczby niewymierne czy liczby urojone. Według Dehaene'a to ograniczenie najprawdopodobniej związane jest bezpośrednio z budową ludzkiego mózgu:

> I would like to suggest that these mathematical entities are so difficult for us to accept and so defy intuition because they do not correspond to any preexisting category in our brain. Positive integers naturally find an echo in the innate mental representation of numerosity; hence a four-year-old can understand them. Other sorts of numbers, however, do not have any direct analogue in the brain. To really understand them, one must piece together a novel mental model that provides for intuitive understanding (Dehaene 1997: 87-88).

Według Dehaene'a powstawanie złożonych kompetencji obliczeniowych jest nierozerwalnie związane z rozwijaniem kompetencji językowych oraz z zapamiętywaniem wyników pewnych operacji symbolicznych, np. tabliczki mnożenia. Wiele osób potrafi bardzo szybko liczyć dzięki opanowaniu pewnych sztuczek matematycznych. Dehaene podkreśla też istotną rolę emocjonalnego zaangażowania w proces rozwijania kompetencji arytmetycznych[9]. Na przykład, opanowanie rachunku

---

[9] Por. spostrzeżenia Damasia (2005) na temat roli emocji w procesie decyzyjnym.

różniczkowego wymaga współpracy wielu ośrodków w mózgu i jest nierozerwalnie związane z umiejętnością posługiwania się symbolami.

Na koniec warto podkreślić różnice między zmysłem liczby a umysłową osią liczbową. Ten pierwszy dostępny jest zarówno dorosłym, jak i noworodkom oraz przynajmniej niektórym zwierzętom. Ta druga najprawdopodobniej dostępna jest jedynie ludziom i wykształca się w trakcie rozwoju osobniczego. Zmysł liczby może być opisany przez półprostą, której wartości są tylko przybliżone i przechodzą płynnie jedne w drugie. Wyniki wielu badań wspierają hipotezę, że wartości na tej półprostej wzrastają logarytmicznie (Dehaene 2003, 2007, 2009)[10]. Jest to wynik zgodny z tzw. prawem Webera-Fechnera, zgodnie z którym wszystkie jakości fizyczne, takie jak dźwięk, jasność czy rozmiar reprezentowane są w umyśle w skali logarytmicznej[11]. Z kolei reprezentacja umysłowej osi liczbowej zawiera dokładne wartości liczb naturalnych i najprawdopodobniej uporządkowana jest w sposób liniowy, a nie logarytmiczny. Podsumowując badania neurobiologiczne, Dehaene (2001) dochodzi do wniosku, że przejście od skali logarytmicznej do liniowej najprawdopodobniej zachodzi w trakcie edukacji dzieci, między pierwszą a czwartą klasą szkoły podstawowej (Dehaene 2009). Nie dochodzi do niego spontanicznie wśród plemion takich jak wspomniane wcześniej plemię Mundurucú. Ponadto otrzymywane wyniki wspierają hipotezę, że do przejścia między tymi dwiema reprezentacjami na poziomie biologicznym dochodzi w lewym dolnym obszarze ciemieniowym mózgu, a w prawym dolnym obszarze ciemieniowym proces ten nie zachodzi (Dehaene 2009: 252). Zgodnie z tą hipotezą w mózgu dorosłego człowieka logarytmiczna oraz liniowa reprezentacja liczb współistnieją ze sobą. Zaproponowana przez Dehaene'a hipoteza wyjaśnia między innymi zachodzenie wspomnianych efektów, takich jak efekt skali.

Podsumowując perspektywę neurobiologiczną — istnieją obszary mózgu, które uaktywniają się w trakcie wykonywania najbardziej podstawowych operacji matematycznych, takich jak porównywanie dwóch liczb czy dodawanie lub odejmowanie liczb naturalnych; z kolei posługiwanie się złożonymi pojęciami matematycznymi wymaga współpracy wielu obszarów mózgu. Liczby towarzyszą nam w wielu codziennych sytuacjach życiowych: odczytujemy godzinę, datę, odliczamy resztę w sklepie, kupujemy określoną ilość towaru. Najprawdopodobniej również w tych wypadkach umiejętności arytmetyczne łączą się z innymi kompetencjami umysłu.

---

[10] W świetle najnowszych badań skalowanie logarytmiczne bywa kwestionowane. Problem ten jest szczegółowo opisany między innymi w pracy (Stapel, Hunnius, Bekkering, Lindemann 2015 oraz referencje tamże). Autorzy tego artykułu, powołując się na najnowsze wyniki badań nad kompetencjami arytmetycznymi 5 i 8-letnich dzieci, przedstawiają argumenty na rzecz tezy, że w trakcie rozwoju kompetencji arytmetycznych dzieci nie dochodzi do przejścia od logarytmicznej do liniowej osi liczbowej, lecz raczej wartości liczb od początku są reprezentowane przez umysł na osi liniowej, a z czasem zakres tej osi ulega coraz większemu rozszerzeniu.

[11] Prawo to znajduje odzwierciedlenie między innymi w skali wielkości gwiazdowych używanej w astronomii, gdzie różnica między jasnością dwóch gwiazd może być zdefiniowana jako 2.5 $\log(L_1/L_2)$, a L_i oznacza dzielność promieniowania.

Czy jednak zebrane dane empiryczne rzeczywiście pozwalają opisać umysłową reprezentację liczb jako umysłową oś liczbową? Dehaene przedstawia następujące argumenty na rzecz swojego modelu:

> The number line metaphor is appropriate, however, because the spatial concepts of distance and proximity readily apply to the metric structure of semantic similarities between numbers; because multidimensional scaling shows that this similarity matrix is best captured by a one-dimensional line [(Shepard, Kilpatrick, Cunningham 1975)]; because naive subjects as well as professional mathematicians spontaneously use spatial words when speaking about numbers; because a few subjects even claim to experience 'number forms', spatial images of number lines that have no obvious cultural origins [(Galton 1880, Seron, Pesenti, Noël, Deloche, Cornet 1992)]; and because, as discussed by Giaquinto as well as by Pesenti and Seron, the SNARC effect reveals that Arabic numeral automatically evoke a spatial left-to-right bias congruent with their quantity [(Dehaene, Bossini, Giraux 1993)] (Dehaene 2001: 3).

2. MODEL KRYSZTOFIAKA

Krysztofiak odrzuca przyjmowany powszechnie schemat rozwoju kompetencji arytmetycznej, zgodnie z którym w pierwszej fazie tego procesu dochodzi do zakodowania zintegrowanej pojedynczej listy liczebników, a w drugiej — z jej elementów konstruowane są rekurencyjnie złożone liczebniki i techniki obliczeniowe. W zamian przedstawia konkurencyjną hipotezę, zgodnie z którą „punktem wyjścia w rekurencyjnym generowaniu wyrafinowanych algorytmów obliczeniowych przez »dojrzały« umysł jest akwizycja przezeń systemu zintegrowanego pęku list liczebników (a nie: jednej listy)" (Krysztofiak 2010: 26). System ten można opisać za pomocą arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych (INA), będącej uogólnieniem arytmetyki Peana (Krysztofiak 2008).

Pod względem graficznym przedstawiona przez Krysztofiaka podstawowa reprezentacja liczbowa ma postać wiązki półprostych (osi) o wspólnym początku, w którym reprezentowana jest liczba zero. Jedna z osi jest wyróżniona, jest to oś liczebników: *zero*, *jeden*, *dwa* itd. Na pozostałych osiach reprezentowane są kategorie obiektów, które umysł może liczyć. W czasie wykonywania prostych zadań arytmetycznych — np. dodawania dwóch zajączków do trzech misiów, aby otrzymać liczbę zwierzątek — w umyśle dziecka aktywowane są odpowiednio: oś wyróżniona, oś uszeregowanej kategorii zajączków, oś uszeregowanej kategorii misiów oraz oś uszeregowanej kategorii zwierzątek. Następnie umysł sprawdza relację dostępności między tymi osiami oraz wykonuje operacje arytmetyczne polegające na odłożeniu na osi zwierzątek liczby zajączków i misiów, a następnie podania otrzymanej w ten sposób sumy. W modelu tym posługiwanie się wyłącznie jednoosiową reprezentacją jest szczególnym przypadkiem, który zachodzi np. podczas wykonywania operacji czysto formalnych, takich jak symboliczne dodawanie 2+7, co wymaga jedynie aktywacji wyróżnionej osi liczebników.

Omawiana struktura może zostać formalnie zapisana w następującej postaci: <***INA***, ***U***, **I**, ***Acc***, ***COR***>, gdzie ***INA*** jest semantycznym modelem arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych, ***U*** jest zbiorem pewnych osi należących do ***INA***, **I** jest osią wyróżnioną, nazwaną „językową linią liczb", ***Acc*** jest relacją dostępności między elementami ***U***, a ***COR*** jest zbiorem wszystkich funkcji zależności między indeksowanymi liczbami na osiach należących do ***U*** (por. Krysztofiak 2008, 2011).

Krysztofiak podkreśla, że w proponowanym przez niego modelu można wyjaśnić, bez odwoływania się do operacji teoriomnogościowych, w jaki sposób siedmioletnie dzieci rozwiązują następujące zadania z treścią[12]:

(1) Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała mu dwie gruszki. Ile Jaś ma owoców?

(2) Jaś miał dwie śliwki. Przyszedł tata z pracy i dał mu dwa jabłka. Potem mama dała mu jeszcze trzy cukierki. Ile Jaś ma owoców?

(3) Jaś miał dwa jabłka. Mama dała mu trzy cukierki. Przyszedł tata i dał mu jeszcze dwa batony. Małgosia, siostra Jasia, miała dwie gruszki i dwa cukierki. Ile owoców razem mieli Jaś i Małgosia? (Krysztofiak 2010: 28)

(4) Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała mu dwa jabłka. Ile Jaś ma jabłek? (Krysztofiak 2010: 32)

(5) Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała Jasiowi dwa jabłka. Ile Jaś ma cukierków? (Krysztofiak 2010: 37)

Co więcej, w modelu tym można określić tempo rozwiązywania takich zadań: najszybciej powinno zostać rozwiązane zadanie (4), następnie zadania (5) i (1), potem zadanie (2), a najwolniej zadanie (3). Przewidywania te pozwalają sprawdzać eksperymentalnie poprawność zaproponowanego modelu.

[12] Krzysztofiak często podkreśla, że w jego modelu reprezentacja liczb naturalnych oraz operacje dodawania, odejmowania i mnożenia nie wymagają odwołania do operacji teoriomnogościowych. Tymczasem wielu badaczy, na przykład Dehaene i Carey, wskazuje, że u podłoża wykształcenia się w umyśle dziecka pierwotnej reprezentacji liczb znajduje się między innymi pojęcie zbioru. Krysztofiak odrzuca jednak ten pogląd, argumentując, że gdyby zdolność operowania na zbiorach należała do jakiegoś rodzaju wiedzy rdzennej, to późniejsze nauczanie teorii mnogości stanowiłoby jedynie „wydobywanie" tej nieuświadomionej wiedzy. Tymczasem praktyka dydaktyczna pokazuje, że studenci z trudem opanowują wiedzę z zakresu teorii mnogości. W tym miejscu można mieć jednak dwa zastrzeżenia. Po pierwsze, czy pojęcie zbioru u dziecka jest tożsame z formalnym pojęciem zbioru? Carey (2009) zwraca uwagę, że na przykład pojęcie liczby zmienia dla dziecka znaczenie, gdy zaczyna ono rozumieć, czym są liczby rzeczywiste. Po drugie, warto się zastanowić, czy problem nie jest związany z tym, że uczący się teorii mnogości nie są przyzwyczajeni na wcześniejszym etapie edukacji do rozumienia języka formalnego. Wówczas prawdziwym problemem przy nauce nie byłoby rozumienie pojęcia zbioru i operacji na nim, lecz posługiwanie się językiem formalnym, co należy do szerszych kompetencji niż kompetencje matematyczne.

Z kolei w artykułach poświęconych logicznej składni liczebnika Krysztofiak, nawiązując do gramatyki generatywnej Chomsky'ego, analizuje przetwarzanie struktur głębokich liczebników w celu wyjaśnienia, na czym polegają akty referencji liczebnikowej (Krysztofiak 2012, 2015)[13]. Przebieg tych procesów regulowany jest przez dwa moduły: moduł cyfrowy oraz moduł liczebników werbalnych, dlatego też Krysztofiak proponuje odróżnić dwa typy struktur powierzchniowych liczebników: struktury powierzchniowe cyfr oraz struktury powierzchniowe liczebników w sensie werbalnym.

Aby wyjaśnić, w jaki sposób umysł ujmuje cyfry, Krysztofiak proponuje przyjęcie hipotezy, zgodnie z którą języki cyfrowe są językami typu *Jumblese*, tzn. są językami, w których funktory stanowią jedynie przestrzenną aranżację nazw-napisów (czyli nie są *explicite* wyrażone za pomocą słów-napisów)[14]. Oznacza to, że na przykład w wypadku cyfry złożonej 583 funktor nie występuje jako osobny znak (jak jest w języku naturalnym, gdzie rolę funktorów pełnią konkretne wyrazy w zdaniu), lecz jest on związany z pozycją każdej z cyfr elementarnych: 5 jest związane z pozycją „setek", 8 jest związane z pozycją „dziesiątek", a 3 jest związane z pozycją „jedności".

W percepcyjnym ujęciu cyfry umysł najpierw rozpoznaje strukturę powierzchniową, następnie oblicza liczbę cyfr elementarnych, które składają się na percypowaną liczbę (w wypadku 583 — 5, 8 i 3). Następnie umysł wykonuje pewne operacje na strukturze głębokiej liczby (czyli określa pozycję każdej z cyfr elementarnych, przyporządkowując je do odpowiedniego rzędu wielkości), a w końcu dochodzi do syntezy struktury głębokiej reprezentacji umysłowej danej cyfry złożonej, dzięki czemu umysł „czyta cyfrę na papierze" — w wypadku liczby 583 rozpoznaje liczbę „pięćset osiemdziesiąt trzy" (Krysztofiak 2012: 70-71).

> Podsumowując, percepcja cyfr wymaga aktywacji oraz syntezy w umyśle określonych reprezentacji mentalnych. […] Ponadto, w umyśle muszą być zakodowane reprezentacje funktorów pozycji cyfrowych w postaci wielu mentalnych linii (osi) liczbowych (*mental number lines*) […]. Z reprezentacji leksykalnych oraz reprezentacji funktorów pozycji cyfrowych (czyli mentalnych osi liczbowych) umysł w procesie ujęcia cyfry syntetyzuje — przy pomocy pewnego mechanizmu, reprezentującego plan pozycyjny cyfry — reprezentację danej cyfry o określonej strukturze głębokiej (Krysztofiak 2012: 73-74).

Zaproponowana przez Krysztofiaka logika liczebników pozwala wyjaśnić wiele codziennych czynności obliczeniowych umysłu. Na przykład, gdy ekspedientka ma wydać pięć złotych reszty, może to zrobić na bardzo wiele sposobów: możemy otrzymać pięć jednozłotówek, dwie dwuzłotówki i jedną jednozłotówkę itd. Jest to związane z faktem, że danej liczbie można przypisać wiele struktur głębokich, np. liczba 24 może być reprezentowana jako dwa tuziny lub jako dwie dziesiątki i 4 jed-

---

[13] Chomsky przez strukturę głęboką rozumiał zbiór warunków, które muszą zostać spełnione, aby dane zdanie było poprawnie zbudowane pod względem gramatycznym. Jest to formalna struktura, która dzięki transformacji przekształcana jest w strukturę powierzchniową zdania rozumianą w kategoriach fonologicznych. Zob. np. Chomsky 1965: 128-147.

[14] Język *Jumblese* jest językiem, w którym nie występują predykaty (Sellars 1963).

ności. W takich wypadkach to, do jakiej struktury głębokiej odniesie się umysł, zależy najczęściej od sytuacji komunikacyjnej[15]. Model Krysztofiaka dość dobrze ujmuje dynamiczny charakter powstawania reprezentacji liczbowych. Jednocześnie, wprowadzając do logiki liczebników aksjomaty opisujące dodawanie oraz mnożenie na strukturach głębokich liczebników oraz relację większości zachodzącą między strukturami głębokimi, Krysztofiak pokazuje, jak wyjaśnić poprawność algorytmu pisemnego dodawania liczebników zapisywanych za pomocą cyfr oraz fakt trafnego porównywania dwóch liczebników ze względu na to, który z nich denotuje większą liczbę lub liczność (Krysztofiak 2015).

Pokazano też, jak za pomocą omówionego modelu formalnego można wyjaśniać wykształcanie się dojrzałej kompetencji arytmetycznej (Patro, Krysztofiak 2013). Przedstawiony model ma strukturę hierarchiczną, na którą składają się, po pierwsze, analogowe (akumulatorowe) umysłowe osie liczbowe będące podstawą wykształcenia się punktowo-miejscowych umysłowych osi liczb[16]. Po drugie, w trakcie doskonalenia kompetencji arytmetycznych wykształcane są coraz bardziej złożone i dokładne (rozpatrujące coraz mniejsze otoczenie punktu odnoszącego się do wartości danej liczby) punktowo-miejscowe osie liczb, aż w końcu wykształcają się „precyzyjne" (tzn. takie, w których otoczenie punktu sprowadza się do samego punktu) punktowo-osiowe umysłowe osie liczb. Zdaniem Patro i Krysztofiaka to właśnie one stanowią podstawę do wykształcenia się eksperckiej kompetencji arytmetycznej, która charakteryzuje się między innymi przekształceniem nieliniowej umysłowej skali liczb na skalę liniową. W tym procesie bardzo istotną rolę ma odgrywać nabywana przez dzieci umiejętność posługiwania się liczebnikami, dzięki czemu reprezentacje liczb zostają powiązane ze znacznikami lingwistycznymi (Patro, Krysztofiak 2013).

Podsumowując, zaproponowany przez Krysztofiaka model w formalny sposób poprawnie wyjaśnia wykonywanie takich operacji, jak rozwiązywanie prostych zadań z treścią oraz ujmowanie i operowanie liczebnikami. Warto jednak zauważyć, że rozwiązywanie zadań z treścią wymaga również aktywowania w umyśle pewnych kompetencji językowych. Przed wykonaniem operacji matematycznych umysł musi odczytać i zrozumieć treść zadania. Również większość aktów referencji liczebnikowej osadzonych jest w sytuacjach konwersacyjnych, przez co związane są z aktywowaniem pewnych kompetencji językowych. Krysztofiak wskazuje jednak, że jego

[15] Dynamiczny charakter aktywowania osi liczbowych jest też bardzo dobrze przedstawiony w pracy (Patro, Krysztofiak 2013), gdzie przytoczono szereg argumentów na rzecz tezy, że efekt SNARC nie jest stabilny i może podlegać manipulacji.

[16] Analogowa oś liczb charakteryzuje się tym, że kolejne liczby reprezentowane są przez dodanie dalszego odcinka na umysłowej osi liczb. Reprezentacja ta ma najprawdopodobniej charakter ciągły (od zera do reprezentowanej liczby) i często jedynie przybliżony. Z kolei punktowo-miejscowa oś liczb charakteryzuje się tym, że umysł odnosi się do danego punktu na osi liczbowej i do jej najbliższego otoczenia. Dlatego też, w przeciwieństwie do modelu analogowego w tym wypadku reprezentacja mniejszej liczby nie stanowi części reprezentacji liczby większej.

model, w przeciwieństwie do klasycznych rozwiązań, ściśle wyznacza granicę między analizą semantyczną treści zadania a procesem obliczeniowym. Ponadto opiera swój model na arytmetyce indeksowanych liczb naturalnych, dzięki czemu wyjaśnia proces rozwiązywania zadań z treścią bez odwoływania się do operacji teoriomnogościowych.

3. PORÓWNANIE MODELI

Model zaproponowany przez Dehaene'a jest spójny z powszechnie przyjmowanymi twierdzeniami kognitywistyki, do których należy między innymi przeświadczenie, że podstawową reprezentację liczbową można adekwatnie przedstawić za pomocą metafory pojedynczej linii liczb.

Model umysłowej osi liczbowej jest zgodny z wynikami wielu doświadczeń neurobiologicznych. Zazwyczaj doświadczenia te skonstruowane są w taki sposób, aby badać możliwie najprostsze operacje, ponieważ badanie złożonych procesów umysłowych utrudnia określenie, które struktury mózgowe stają się aktywne podczas wykonywania konkretnych operacji. Badania pokazują, że nawet w trakcie wykonywania podstawowych operacji matematycznych, takich jak dodawanie, odejmowanie czy porównywanie liczb lub liczności, w mózgu aktywne są rozmaite obszary. Oznacza to, że przeprowadzanie tych operacji nie tylko wymaga aktywności podstawowego zmysłu liczby, lecz także konieczne jest posiadanie szerszych kompetencji.

Model Dehaene'a nie odgranicza jednak wyraźnie kompetencji arytmetycznych od innych. Dehaene postanowił przyjąć hipotezę pojedynczej linii liczb głównie ze względu na metodologiczny postulat prostoty, zgodnie z którym, jeżeli wyniki doświadczeń nie wymagają skonstruowania bardziej skomplikowanego modelu, to lepiej przyjąć ten prostszy. Dotychczas nie został przeprowadzony żaden eksperyment, który obalałby model umysłowej osi liczbowej. Co jednak równie znaczące, nie został też przeprowadzony żaden eksperyment, który ostatecznie potwierdziłby słuszność tego modelu, wykluczając tym samym hipotezy alternatywne.

Krysztofiak koncentruje się na formalno-logicznych cechach modelu nabywania arytmetycznego systemu kompetencyjnego. Z formalnego punktu widzenia zaproponowany model, zgodnie z którym podstawowa reprezentacja arytmetyczna ma postać wiązki osi o wspólnym początku, poprawnie wyjaśnia wykonywanie takich operacji, jak rozwiązywanie zadań tekstowych czy odczytywanie oraz posługiwanie się liczebnikami. Model ten opisuje kompetencje szersze od tych uwzględnionych w modelu Dehaene'a. I w tym wypadku brak jednak empirycznego potwierdzenia.

Opisane modele zostały skonstruowane w odmiennych paradygmatach badawczych. Dehaene oparł swój model przede wszystkim na wynikach doświadczeń dotyczących postrzegania liczb i wykonywania na nich prostych operacji. Wyszedł przy tym z założenia, że liczby naturalne należą do pierwotnej reprezentacji liczbowej i w tym sensie są nam „dane przez ewolucję”[17]. Za sprawą znacznego uogólnienia faktów empirycznych propozycja Dehaene’a ma dość abstrakcyjny charakter. Z kolei Krysztofiak jako punkt wyjścia przyjął badania formalno-logiczne, w których starał się ująć model reprezentacji osi liczbowych za pomocą aksjomatów oraz twierdzeń. Rozważania zilustrował przy tym licznymi przykładami oraz opisał możliwe sprawdziany empiryczne poprawności proponowanego modelu. Te dwa fakty — abstrakcyjny charakter modelu Dehaene’a oraz empiryczne przewidywania modelu Krysztofiaka — umożliwiają ich porównywanie.

Warto wspomnieć o jeszcze jednej różnicy w podejściu badawczym obu autorów. Dehaene wiąże problem powstawania pojęć matematycznych z kategorią przestrzeni. Zwraca uwagę na to, że około 10% ludzi nie tylko postrzega liczby jako ułożone w jednej linii, lecz także przypisuje konkretnym liczbom pewne barwy (Dehaene 2009). Fakt ten może być wyjaśniony neurobiologicznie: obszar mózgu, który jest aktywny podczas wykonywania operacji arytmetycznych, położony jest w pobliżu obszaru odpowiedzialnego za percepcję przestrzeni oraz barw. Tymczasem Krysztofiak, przyjmując koncepcję arytmetyki Kanta, koncentruje się na kategorii czasu. Zgodnie z tą interpretacją umysłowa linia liczb może być interpretowana jako reprezentacja dyskretnego czasu. Przyjmując model umysłowej wiązki osi liczbowych, można między innymi wyjaśnić zjawisko używania przez ludzi metafory „podwójnego życia” podczas opisywania codziennych doświadczeń (Krysztofiak 2011)[18]. Oczywiście, wiązka osi obliczeniowych również wyraża pewien porządek przestrzenny.

Porównując obie koncepcje, należy przede wszystkim rozważyć, czy model Krysztofiaka można traktować jako rozszerzenie modelu Dehaene’a. Istnieje szereg argumentów za taką interpretacją. Po pierwsze, w szczególnym wypadku model Krysztofiaka przewiduje, że umysł aktywuje jedynie jedną półoś. Dzieje się tak na przykład podczas symbolicznego dodawania cyfr. Po drugie, w sytuacji analizy struktur głębokich tzw. dużych liczb, takich jak 1539, każdy rząd wielkości jest kodowany niejako niezależnie od pozostałych: jest to 1 tysiąc, 5 setek, 3 dziesiątki i 9 jedności. Propozycja Krysztofiaka nie wyklucza, że podczas analizy danego rzędu wielkości aktywowana jest pojedyncza oś. Dopiero ujęcie tego zestawu cyfr w całość wymaga połączenia czterech reprezentacji pojedynczych osi liczbowych. Po trzecie, również model przedstawiony przez Patro i Krysztofiaka (2013) zawiera pewien szczególny wypadek aktywowania tylko jednej osi. Po czwarte, Krysztofiak często odwołuje się do sytuacji, w których kompetencje arytmetyczne są silnie zależne od takiego kontekstu językowego, jak rozwiązywanie zadań z treścią czy badanie liczb w sytuacjach komunikacyjnych (np. wydawanie reszty w sklepie). Pozwala to przy-

[17] Z tym stwierdzeniem nie zgadza się na przykład Carey, która stara się pokazać, że przejście od najbardziej pierwotnej reprezentacji liczb do umysłowej reprezentacji liczb naturalnych jest procesem nieciągłym (Carey 2009).

[18] Tej metafory czasami używają ludzie, którzy inaczej odczuwają upływ czasu w zależności od tego, czy spędzili go w domu, czy w pracy.

puszczać, że Krysztofiak ujmuje w swoim modelu szerszy zakres kompetencji umysłu niż Dehaene.

Istnieją jednak co najmniej dwie różnice, które sprawiają, że model Krysztofiaka nie może być traktowany jako proste rozszerzenie modelu Dehaene'a. Po pierwsze, model Dehaene'a zakłada, że kolejne liczby konstruowane są rekurencyjnie (np. reprezentacja liczby 56 podczas zliczania zbioru kropek). Tymczasem Krysztofiak, wprowadzając relację dostępności między osiami liczbowymi, odrzuca rekurencję w tym procesie. Po drugie, w propozycji Dehaene'a umysłowa oś liczbowa nie jest aksjomatyzowalna. Krysztofiak podaje zaś pełną aksjomatyzację umysłowej wiązki osi liczbowych[19].

Warto też przyjrzeć się zakresom porównywanych modeli. Dehaene stara się wyjaśnić kompetencje matematyczne niemowląt i niektórych gatunków zwierząt (przez odniesienie do zmysłu liczby) oraz kompetencje matematyczne dzieci i dorosłych związane z percepcją liczb i wykonywaniem takich prostych operacji na liczbach naturalnych, jak dodawanie czy porównywanie liczb (przez odniesienie do umysłowej osi liczb). Próbuje również poddać analizie szczególne przypadki występowania dysfunkcji mózgu (w wyniku chorób lub urazów) związanych ze stratą pewnego rodzaju kompetencji arytmetycznych, np. utratą umiejętności posługiwania się dokładnymi wartościami liczb. Patro i Krysztofiak starają się wyjaśnić rozwój kompetencji matematycznych od okresu niemowlęcego do nabycia przez dzieci tzw. dojrzałej kompetencji arytmetycznej. W pozostałych tekstach Krysztofiak koncentruje się na opisaniu dojrzałej kompetencji arytmetycznej, do której należą między innymi umiejętność rozwiązywania prostych zadań z treścią oraz pisemne dodawanie i odejmowanie dużych liczb. Widać ponownie, że zakres modelu Krysztofiaka jest znacznie szerszy od modelu Dehaene'a.

Warto jeszcze rozważyć pytanie, czy omówione modele można porównać empirycznie. Innymi słowy, czy można skonstruować taki eksperyment, którego wynik pozwoli rozstrzygnąć, czy umysł aktywuje tylko jedną oś, czy też wiązkę półosi? Ze względu na omówione różnice w zakresie obu modeli, aby skonstruowanie takiego eksperymentu było w ogóle możliwe, najpierw powinno zostać wprowadzone jedno z dwóch rozwiązań:

(1) Uzupełnienie modelu Dehaene'a o analizę roli kompetencji językowych, na przykład podczas rozwiązywania prostych zadań z treścią.

(2) Uproszczenie modelu Krysztofiaka w taki sposób, aby sprawdzić, jak radzi sobie w sytuacjach, w których rola języka jest ograniczona, na przykład podczas percepcji zliczanych obiektów.

Pierwsze rozwiązanie wykracza poza ramy artykułu. Drugie zostanie poddane krótkiej analizie.

[19] Uwagi te zawdzięczam Michałowi Jarmocowi i Wojciechowi Krysztofiakowi.

Aby przekonać się, czy w czasie percepcyjnego ujmowania zliczanych przedmiotów uaktywnia się tylko jedna oś umysłowa, czy wiele, można pomyśleć o następującym doświadczeniu. Załóżmy, że mamy pomieszczenie, w którym jest 11 drzew oraz 58 kwiatów należących do różnych gatunków, np. 12 kwiatów należy do jednego gatunku, 8 do drugiego itd. Następnie prosimy botanika zafascynowanego kwiatami, aby policzył jak najszybciej liczbę roślin w pomieszczeniu. O wykonanie tej samej operacji należy prosić również laika, dla którego wszystkie kwiaty wyglądają tak samo, a następnie zmierzyć czas, który zajęło im liczenie roślin[20]. Gdyby czas zliczania roślin przez botanika był dłuższy od czasu laika, mogłoby to przemawiać za modelem umysłowej wiązki osi liczbowych. Jeśli jednak czasy zliczania będą takie same, to nie będzie to argument na rzecz modelu pojedynczej osi liczbowej, ponieważ można zasadnie zadać pytanie, w którym momencie umysł aktywuje nową półoś. Problem ten nie jest banalny. Rozpatrzmy na przykład sytuację, w której zadanie polega na policzeniu liczby królików. Załóżmy, że mamy 20 królików, z których 10 jest czarnych, a 10 białych, 6 ma krótką sierść, a 14 długą, 8 jest bardzo dużych, a 12 malutkich. Czy podczas liczenia królików umysł dokona jakiejkolwiek kategoryzacji zliczanych obiektów? Teoretycznie nie powinien, ponieważ w takiej sytuacji niepotrzebnie zużywałoby to tylko energię mózgu. Przyjmijmy jednak, że należy policzyć czarne króliki z długą sierścią. Czy wówczas umysł dokonuje tylko jednej kategoryzacji: czarne króliki z długą sierścią, czy dwóch — czarne króliki oraz króliki z długą sierścią i bada relację między nimi?

Przykład ten pokazuje również, że ze względu na dynamiczny charakter aktywowania umysłowych osi liczbowych badanie empiryczne modelu Krysztofiaka natrafia na wiele trudności. Kolejną z nich jest rozwiązywanie zadań z treścią, w których występują wyrażenia będące synonimami. Rozważmy zadanie:

Na stole leży 6 ziemniaków i 12 kartofli. Ile pyr leży na stole?

Skoro słowa „ziemniaki", „kartofle" i „pyry" są synonimami, to czy oznacza to, że umysł aktywuje tylko jedną oś odpowiadającą kategorii ziemniak-kartofel-pyra, czy trzy osobne osie (ponieważ są to trzy różne słowa)? W tym wypadku można sprawdzić czas rozwiązywania takiego zadania i porównać go z czasem wykonywania innych zadań z treścią. Można też spróbować znaleźć kogoś, kto nie wie, że słowa „ziemniak", „kartofel" i „pyra" są synonimami i sprawdzić czas rozwiązywania przez niego przedstawionego zadania.

Przedstawione przykładowe zadania pokazują, że badanie empiryczne dojrzałej kompetencji arytmetycznej nie jest proste. Jest to głównie spowodowane uwikłaniem pojęć matematycznych w język oraz dynamicznym charakterem aktywowania półosi. W teoretycznych rozważaniach nad pracą umysłu najsensowniej jest przyjąć hipotezę, że umysł posługuje się taką reprezentacją umysłową, która w danej sytuacji gwa-

[20] Dla poprawności badania należałoby również sprawdzić czas liczenia przez botanika i laika jakichś neutralnych obiektów, np. jednolitych kropek.

rantuje jak najmniejsze zużycie energii przez mózg. Przyjmując to założenie, należy spodziewać się, że umysł będzie dążył do tego, aby operować na jak najmniejszej liczbie osi liczbowych.

4. PODSUMOWANIE

Oba przedstawione modele są w stanie wyjaśnić, w jaki sposób w umyśle zakodowana zostaje reprezentacja liczb naturalnych, na której następnie oparte są bardziej złożone pojęcia i operacje matematyczne. Model Dehaene'a opiera się przede wszystkim na wynikach eksperymentów neurobiologicznych, których celem było badanie pracy mózgu podczas percepcji oraz posługiwania się liczbami lub licznościami. Model Krysztofiaka skonstruowany został w wyniku formalno-logicznej analizy operacji, które mogły zostać wykonane w umyśle w trakcie percepcji oraz odnoszenia się do liczebników, a także w trakcie rozwiązywania prostych zadań z treścią przez siedmioletnie dzieci. Mimo wyraźnych różnic oba modele stanowią istotny wkład do teorii opisujących rozwój kompetencji arytmetycznych w trakcie rozwoju osobniczego. Wydaje się jednak, że dopiero połączenie obu perspektyw badawczych, neurobiologicznej oraz formalno-logicznej, pozwoli w pełni zrozumieć problem powstawania pojęć matematycznych oraz wskazać, w jaki sposób skonstruować optymalny model nabywania arytmetycznego systemu kompetencyjnego.

BIBLIOGRAFIA

Carey S. (2009), *The Origin of Concepts*, Oxford: Oxford University Press.

Chomsky N. (1965), *Aspects of the Theory of Syntax*, Cambridge, MA: MIT Press.

Damasio A. R. (2005), *W poszukiwaniu Spinozy. Radość, smutek i czujący mózg*, Poznań: Dom Wydawniczy Rebis.

Dehaene S. (1997), *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Dehaene S. (2001), *Author's Response. Is Number Sense a Patchwork?*, „Mind and Language" 16(1), 89-100.

Dehaene S. (2003), *The Neural Basis of the Weber-Fechner Law. A Logarithmic Mental Number Line*, „Trends in Cognitive Science" 7(4), 145-147.

Dehaene S. (2007), *A Few Steps Toward a Science of Mental Life*, „Mind, Brain and Education" 1(1), 28-47.

Dehaene S. (2009), *Origins of Mathematical Intuitions. The Case of Arithmetic*, „Annals of the New York Academy of Sciences" 1156(1), 232-259.

Dehaene S., Bossini S., Giraux P. (1993), *The Mental Representation of Parity and Numerical Magnitude*, „Journal of Experimental Psychology: General" 122(3), 371-396.

Dehaene S., Dupoux E., Mehler J. (1990), *Is Numerical Comparison Digital. Analogical and Symbolic Effects in Two-Digit Number Comparison*, „Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance" 16(3), 626-641.

Galton F. (1880), *Visualised Numerals*, „Nature" 21, 252-256.

Harman G. (1974), *Identifying Numbers*, „Analysis" 35(1), 12.

Izard V., Pica P., Spelke E., Dehaene S. (2008), *Exact Equality and Successor Function. Two Key Concepts on the Path towards Understanding Exact Numbers*, „Philosophical Psychology" 21(4), 491-505.

Knops A., Viarouge A., Dehaene S. (2009), *Dynamic Representations Underlying Symbolic and Nonsymbolic Calculation. Evidence from the Operational Momentum Effect*, „Attention, Perception, & Psychophysics" 71(4), 803-821.

Krysztofiak W. (2008), *Modalna arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych. Możliwe światy liczb*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria" 17(2) [66], 79-107.

Krysztofiak W. (2010), *Multi-temporalne struktury obliczeniowe. Indeksowane liczby naturalne w świetle arytmetyki kognitywnej*, „Filozofia Nauki" 18(4) [72], 23-47.

Krysztofiak W. (2011), *Indexed Natural Numbers in Mind. A Formal Model of the Basic Mature Number Competence,* „Axiomathes" 22(4), 433-456.

Krysztofiak W. (2012), *Logiczna składnia liczebnika. Studium kognitywistyczne. Część I*, „Filozofia Nauki" 20(1) [77], 57-92.

Krysztofiak W. (2015), *Logiczna składnia liczebnika. Część II: Formatowanie i przetwarzanie liczebnikowych struktur głębokich*, „Filozofia Nauki" 23(3) [91], w druku.

Mandler G., Shebo B. J. (1982), *Subitizing. An Analysis of Its Component Processes*, „Journal of Experimental Psychology: General" 11, 1-22.

McCrink K., Dehaene S., Dehaene-Lambertz G. (2007), *Moving along the Number Line. Operational Momentum in Nonsymbolic Arithmetic*, „Perception & Psychophysics" 69(8), 1324-1333.

Patro K., Krysztofiak W. (2013), *Umysłowe osie liczbowe. Efekt SNARC. Aspekty filozoficzne*, „Filozofia Nauki" 21(3) [83], 45-98.

Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S. (2004), *Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group*, „Science" 306(5695), 499-503.

Sellars W. (1963), *Science, Perception and Reality*, New York, NY: Routledge & Kegan Paul.

Seron X., Pesenti M., Noël M. P., Deloche G., Cornet J. A. (1992), *Images of Numbers or When 98 is Upper Left and 6 Sky Blue*, „Cognition" 44(1), 159-196.

Shepard R. N., Kilpatrick D. W., Cunningham J. P. (1975), *The Internal Representation of Numbers*, „Cognitive Psychology" 7(1), 82-138.

Stapel J. C., Hunnius S., Bekkering H., Lindenmann O. (2015), *The Development of Numerosity Estimation: Evidence for a Linear Number Representation Early in Life*, „Journal of Cognitive Psychology" 27(4), DOI: 10.1080/20445911.2014.995668.

Starkey P., Cooper Jr. R. G. (1980), *Perception of Numbers by Human Infants*, „Science" 210(4473), 1033-1035.

Strauss M. S., Curtis L. E. (1981), *Infant Perception of Numerosity*, „Child Development" 52(4), 1146-1152.

Wynn K. (1992), *Addition and Subtraction by Human Infants*, „Nature" 358(6389), 749-750.