Filozofia Nauki
Rok XXIII, 2015, Nr 2(90)

Krzysztof Wójtowicz

Abstrakcyjna teoria modeli — semantyczne ujęcie logiki*

Celem artykułu jest przedstawienie głównych pojęć abstrakcyjnej teorii modeli (*abstract model theory*), stanowiącej uogólnienie klasycznej teorii modeli, oraz powodów skłaniających do jej uprawiania. Charakterystyczny dla tego podejścia jest *stricte* semantyczny charakter: na systemy logiczne patrzy się tu przez pryzmat interpretacji (modeli), natomiast aspekty składniowe stają się wtórne i nieistotne. Istnieje wiele prac technicznych przedstawiających zarówno podstawowe wyniki (np. twierdzenia Lindströma, które pozwalają na umiejscowienie logiki pierwszego rzędu w całym spektrum systemów logicznych, dostarczając jednocześnie ciekawych inspiracji filozoficznych), jak i bardzo wyrafinowane rezultaty dotyczące zaawansowanych matematycznie konstrukcji (zob. np. Barwise, Feferman 1985). W artykule zostaną omówione przede wszystkim motywacje leżące u podłoża tego podejścia oraz podstawowe pojęcia techniczne.

1. LOGIKA ELEMENTARNA A INNE LOGIKI

W klasycznych badaniach teoriomodelowych zdecydowanie najwięcej uwagi poświęcono logice pierwszego rzędu (niżej będę posługiwał się terminem „logika elementarna”). Teoria modeli dla logiki elementarnej stanowi dobrze zbadane terytorium, choć oczywiście nadal istnieją tu otwarte problemy. Znanych jest wiele wyników technicznych; niektóre z nich — jak twierdzenie o zwartości czy twierdzenia Skolema-Löwenheima — wchodzą w skład standardowego podstawowego kursu lo-

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/HS1/04023.

giki (i stanowią źródło inspiracji dla dyskusji filozoficznych, a także w pewien sposób je porządkują); inne mają charakter bardziej wyrafinowany (np. Chang, Keisler 1990). Badania dotyczące teoriomodelowych — a więc metalogicznych — własności logiki pierwszego rzędu mają istotne znaczenie z punktu widzenia dyskusji filozoficznej dotyczącej np. ograniczeń mocy wyrażeniowej pewnych systemów czy ogólniejszego problemu „granic logiczności" (czyli pytania o to, które pojęcia mają charakter logiczny).

Klasyczna teoria modeli koncentruje się na logice elementarnej, ale prowadzone są również systematyczne badania dotyczące innych systemów logicznych. Najbardziej chyba znanym przykładem logiki nieelementarnej jest logika drugiego rzędu, która jest o wiele silniejsza niż logika elementarna. W ramach logiki pierwszego rzędu kwantyfikacja dotyczy tylko obiektów należących do dziedziny przedmiotowej (czyli uniwersum modelu), natomiast w logice drugiego rzędu możemy formułować zdania mówiące o zbiorach obiektów (np. „każdy zbiór mający własność P, ma również własność Q" albo „istnieje zbiór, który ma własność P")[1]. W radykalny sposób zwiększa to moc wyrażeniową.

W historii logiki i matematyki toczyła się dyskusja na temat wyboru właściwej logiki do formalizacji rozumowań matematycznych. Dotyczyła właśnie wyboru między logiką pierwszego a drugiego rzędu (zob. Shapiro 1985, 1991). Jednym z argumentów pojawiających się w tym sporze jest pełność logiki elementarnej: występujące w niej pojęcia konsekwencji semantycznej i syntaktycznej są tożsame, czyli — swobodnie mówiąc — to, co jest semantycznym wnioskiem z danej teorii, da się też w ramach tej teorii udowodnić[2]. Natomiast w wypadku logiki drugiego rzędu musimy pogodzić się z faktem, że mogą istnieć takie semantyczne konsekwencje teorii, których nie da się udowodnić, a nawet takie, do których być może w ogóle nie będziemy mieli żadnego dostępu poznawczego[3]. Logika elementarna ma jednak stosunkowo niewielką moc wyrażeniową, a szereg naturalnych pojęć matematycznych wymyka się charakteryzacji w jej ramach. Nasuwa się pytanie, czy np. twierdzenie Skolema–Löwenheima

[1] W tym miejscu warto wyjaśnić pewne nieporozumienie, z którym niekiedy można się spotkać w dyskusjach. Otóż teoria mnogości ZFC jest teorią *pierwszego* rzędu. Jak to możliwe — przecież mówi o zbiorach? Jednak w ramach teorii mnogości ZFC mamy tylko jedno pojęcie pierwotne (intuicyjnie: należenie), a kwantyfikatory wiążą zmienne odnoszące się do elementów uniwersum. Teoria mnogości ZFC dotyczy struktur pewnego typu, określonych przez pewną relację dwuargumentową o szczególnych własnościach. My obiekty tej dziedziny nazywamy zbiorami, a ową relację należeniem (i oczywiście wiążemy z nimi nasze intuicje dotyczące pojęcia zbioru i należenia, kodując je w postaci aksjomatów).

[2] Oczywiście względem pewnego (standardowego) systemu dowodzenia.

[3] Ciekawym przykładem jest teoria mnogości drugiego rzędu ZFC^2. Okazuje się, że hipoteza kontinuum (CH) jest semantycznie rozstrzygnięta przez ZFC^2 (co ma związek ze strukturą modeli dla ZFC^2), nie wiemy jednak, w jaki sposób. Jest to inny wypadek niż teoria mnogości pierwszego rzędu, od której CH jest niezależna — co udowodnili Gödel (1938) i Cohen (1966; przy czym wynik Cohena został ogłoszony w 1963).

nie świadczy w pewien sposób o ułomności logiki pierwszego rzędu[4]. Niemniej tzw. teza o logice pierwszego rzędu (*first-order thesis*), w myśl której to właśnie logika elementarna jest „prawdziwą logiką", ma wielu zwolenników[5].

Fakt, że logika elementarna ma ograniczone możliwości wyrażeniowe, stanowi naturalną motywację do badania systemów dających pod tym względem większe możliwości. W semantykę takich silniejszych systemów niejako wbudowane byłyby pewne pojęcia matematyczne nieuchwytne w logice elementarnej. Mówiąc bardzo swobodnie, podejście to polega na tym, aby nie tyle próbować modelować dane pojęcie matematyczne w teorii sformułowanej w obrębie logiki elementarnej, ile raczej wbudować owo pojęcie już na poziomie samej logiki[6]. Nasuwa się przy tym pytanie o mechanizmy logiczne „zarządzające" pojęciami i własnościami matematycznymi. Przykładami ważnych pojęć matematycznych są na przykład: bycie obiektem skończonym, nieskończonym, nieprzeliczalnym, bycie zbiorem otwartym, bycie funkcją ciągłą, pojęcie prawdopodobieństwa, pojęcie podzielności itp. Znaczną część takich pojęć można wygodnie opisywać za pomocą logiki elementarnej (tj. klasycznej logiki predykatów), ale istnieją wyjątki. Okazuje się przy tym, że w wielu wypadkach odpowiednia modyfikacja logiki pozwala na bezpośrednie ujęcie pewnych interesujących nas pojęć bez sięgania do pełnej mocy logiki drugiego rzędu (czy ogólniej — logik wyższych rzędów). Stanowi to ważną pobudkę do podjęcia badań w tym zakresie.

2. PRZYKŁADY LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Zanim zajmiemy się ogólnym pojęciem (abstrakcyjnej) logiki, warto przywołać kilka konkretnych przykładów systemów logicznych stanowiących uogólnienie logiki elementarnej (najbardziej chyba znanym przykładem jest logika drugiego rzędu, o której wspomniano wcześniej). Tworzono je często z powodów czysto matematycznych, ale nie tylko. Należy pamiętać, że tym, co łączy owe abstrakcyjne logiki, jest klasa modeli: są to zwykłe, znane z logiki elementarnej struktury relacyjne.

---

[4] Przypomnijmy, że zgodnie z tym twierdzeniem, jeśli teoria (w języku przeliczalnym — ale takie są w zasadzie wszystkie języki znane nam z praktyki matematycznej) ma model nieskończony, to ma modele dowolnej mocy nieskończonej. W szczególności istnieją modele dowolnej mocy dla arytmetyki czy też, co wydaje się nieco zaskakujące, przeliczalny model dla teorii mnogości.

[5] Spór o to, czym są pojęcia logiczne, trwa od dawna (por. np. Tharp 1975, Barwise 1985, Shapiro 1985, 1991, Resnik 1988, Sher 1991, Jane 1993, Gomez-Torrente 2002). Za szerszym, niejako bardziej liberalnym rozumieniem logiki, opowiadają się np. Barwise, Shapiro i Sher. Restryktywne podejście reprezentuje Quine.

[6] Pewną niedoskonałą (lecz powszechnie znaną) ilustracją tej sytuacji jest np. logika modalna. Pojęcia modalne (możliwość i konieczność) są obecne już na poziomie samej aparatury logicznej: operatory modalne nie są predykatami, lecz operatorami wbudowanymi w logiczną strukturę języka. Podobnie jest w wypadku np. logik temporalnych, deontycznych czy epistemicznych. We wszystkich tych wypadkach odpowiedni system logiczny ma inną niż logika elementarna składnię i semantykę: modelowane pojęcie jest wbudowane w ów system na podstawowym poziomie.

W tym sensie systemy te mają wspólny fundament semantyczny. Jest to zatem inna sytuacja niż w wypadku logik modalnych, temporalnych, epistemicznych, deontycznych, logik programów itp., których modele różnią się od modeli dla logiki klasycznej. W interesującym nas wypadku klasa struktur, w których interpretujemy wypowiedzi w różnych językach, jest taka sama jak w wypadku logiki elementarnej. Zmieniają się jedynie moce wyrażeniowe logik (czyli możliwości charakteryzowania owych struktur)[7].

2.1. Logiki z dodatkowymi kwantyfikatorami[8]

W języku naturalnym występują zwroty kwantyfikujące, takie jak „jakiś", „żaden", „wszystkie", „co drugi", „niektóre", „prawie wszystkie", „zdecydowana większość", „co najwyżej połowa", „skończenie wiele". Niektóre z nich są definiowalne za pomocą zwykłych kwantyfikatorów[9]. Zdarzają się jednak wyjątki.

Przykładem kwantyfikatora o motywacji matematycznej, który nie jest definiowalny za pomocą klasycznych kwantyfikatorów, jest kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele". Logika ujmująca ten dodatkowy kwantyfikator (oznaczany standardowo przez Q_0) stanowi rozszerzenie logiki klasycznej. Na poziomie składniowym pojawia się tu nowa reguła tworzenia formuł:

Jeśli $\varphi(x)$ jest formułą, to $Q_0x\varphi(x)$ też jest formułą.

Zdanie $Q_0x\varphi(x)$ wyraża fakt, że istnieje nieskończenie wiele obiektów o własności φ (kwantyfikator Q_0 wiąże zatem jedną zmienną, podobnie jak klasyczne kwantyfikatory). Warunek semantyczny opisujący działanie owego kwantyfikatora brzmi zaś następująco:

$M \vDash Q_0x\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór elementów modelu M spełniających warunek $\varphi(x)$ (czyli zbiór $\{a \in M: M \vDash \varphi(a)\}$) jest nieskończony.

---

[7] Możliwe jest jeszcze bardziej abstrakcyjne ujęcie, w którym nie nakładamy w ogóle żadnych wstępnych warunków na klasę struktur, a jedynie mówimy o dwóch klasach: klasie zdań i klasie struktur oraz pewnej łączącej jej relacji (spełniania). W takim ujęciu można sformułować pewne metalogiczne własności (np. zwartości) i wpisać w tak ogólny schemat także wiele logik wykraczających poza te, które są tutaj rozważane (por. np. Matos, Väänänen 2005). W takim ogólnym schemacie mieszczą się np. logiki modalne, temporalne, deontyczne, logiki programowania oraz różne rachunki zdań. Jednak w celu uzyskania konkretnych wyników (np. wspomnianych niżej twierdzeń Lindströma) konieczne jest przyjęcie pewnych założeń ograniczających. W artykule przyjmuję ujęcie „umiarkowanie abstrakcyjne": modele to klasyczne struktury relacyjne.

[8] Szczegółowe omówienie tej problematyki można znaleźć np. w pracach (Sher 1991), (Westerståhl 2011).

[9] Za pomocą zwykłych kwantyfikatorów możemy zdefiniować np. kwantyfikatory takie, jak „istnieje dokładnie n obiektów o własności P" oraz „istnieje co najmniej n obiektów o własności P". Wiele jednak wyrażeń nie jest definiowalnych, np. „istnieje skończenie wiele obiektów o własności P", „istnieje parzysta liczba obiektów o własności P".

Kwantyfikator ten nie jest definiowalny w ramach logiki elementarnej, a więc logika $L(Q_0)$ stanowi wzmocnienie logiki klasycznej. Kwantyfikator Q_0 jest tzw. kwantyfikatorem mocy; jego naturalnym uogólnieniem są kwantyfikatory Q_α, wyrażające fakt, że istnieje przynajmniej $\aleph_\alpha$ (alef α) obiektów o pewnej własności[10].

Warto wspomnieć o ważnej grupie kwantyfikatorów, które nie tylko mają uzasadnienie matematyczne, lecz także są naturalnie zakorzenione w praktyce językowej. Są to kwantyfikatory rozgałęzione (*branching quantifiers*). Najprostszym z nich jest kwantyfikator Henkina. Zdanie z kwantyfikatorem Henkina ma postać: „Dla dowolnego x istnieje x' niezależne od y i y' oraz dla dowolnego y istnieje y' niezależne od x oraz x', takie że $\varphi(x,y,x',y')$". Kwantyfikator Henkina wiąże zatem cztery zmienne. Klasyczny przykład zdania z języka naturalnego z tego typu kwantyfikatorem nieliniowym to zdanie Hintikki: „Pewien krewniak każdego mieszkańca wsi i pewien krewniak każdego mieszkańca miasta nienawidzą się nawzajem". Nie jest możliwe podanie wiernej parafrazy formalnej tego zdania w postaci liniowej[11]. Dlatego naturalne jest zapisanie go w postaci nieliniowej:

$$\begin{matrix}\forall x \exists x' \\ \forall y \exists y'\end{matrix}\ \varphi(x,y,x',y')$$

Zapis taki ma wskazywać, że zmienna x' zależy tylko od zmiennej x, a zmienna y' — tylko od zmiennej y. Stosuje się też prostszy (pod względem edytorskim) zapis $Q_H x,y,x',y'\ \varphi(x,y,x',y')$ (Q_H symbolizuje kwantyfikator Henkina, wiążący zmienne x, y, x', y'). Przy podawaniu formalnej semantyki dla kwantyfikatora nieliniowego posługujemy się pojęciem funkcji. Sens tego zdania wyjaśniony jest przez równoważne mu zdanie:

$$\exists F,G \forall x,y\ \varphi(x,y,F(x),G(y)),$$

gdzie F oraz G są funkcjami prowadzącymi z uniwersum modelu w nie samo. Kwantyfikator Henkina jest najprostszym przykładem kwantyfikatora rozgałęzionego; nie będę jednak rozwijał tu tego tematu[12,13].

---

[10] Warunek semantyczny brzmi w tym wypadku następująco: $M \models Q_\alpha x \varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór elementów modelu M spełniających warunek $\varphi(x)$ ma moc przynajmniej $\aleph_\alpha$. Inne przykłady kwantyfikatorów tego typu to: kwantyfikator Reschera Q_R, który mówi, że większość obiektów w uniwersum ma własność P (tj. moc zbioru obiektów o własności P jest większa niż moc zbioru obiektów nieposiadających tej własności) i kwantyfikator Changa Q_C, który mówi, że moc zbioru obiektów o pewnej własności P jest taka jak moc całego uniwersum M (por. np. Ebbinghaus 1985).

[11] Zdanie to można próbować zapisać w postaci liniowej na kilka sposobów, np.:

(i) $\forall x \forall y \exists x' \exists y'\ \varphi(x,y,x',y')$ — nie jest to jednak dobry zapis, ponieważ zarówno x', jak i y' zależą tu od x oraz od y.

(ii) $\forall x \exists x' \forall y \exists y'\ \varphi(x,y,x',y')$ — także nie jest to dobra parafraza formalna: w tej wersji y' zależy od x' oraz od x.

Podobnie jest w pozostałych wariantach zapisu liniowego.

[12] Ciekawym przykładem jest też kwantyfikator Boolosa, który — w luźnym sformułowaniu — głosi: „istnieją takie x-y, że…". Nie jest on definiowalny elementarnie (por. np. Boolos 1984, 1985).

2.2. Logiki z wyrażeniami nieskończonymi

W językach z wyrażeniami nieskończonymi dopuszczamy koniunkcje nieskończonej liczby formuł. Intuicyjnie formuły takie są zrozumiałe. Oczywiście, w logice elementarnej formuły są zawsze skończone, jednak rozumiemy, co chcemy wyrazić za pomocą zdania o postaci przeliczalnej alternatywy:

> Istnieje jeden obiekt o własności P *lub* istnieją dwa obiekty o własności P *lub* istnieją trzy obiekty o własności P…

Intencją tego zdania jest stwierdzenie, że istnieje skończenie wiele obiektów o pewnej własności. Nie da się jednak zapisać go w języku pierwszego rzędu. Natomiast logika $L_{\omega 1 \omega}$ to logika, w której dopuszczalne są przeliczalne alternatywy (i koniunkcje). Zdanie $\bigvee\{\varphi_n: n\in\omega\}$ jest prawdziwe w modelu M, gdy prawdziwe jest w nim *przynajmniej jedno* ze zdań φ_n. Podobnie nieskończona koniunkcja $\bigwedge\{\varphi_n: n\in\omega\}$ jest prawdziwa w modelu M, gdy prawdziwe są w nim *wszystkie* zdania φ_n. Oczywiście logika taka ma większą moc wyrażeniową niż logika klasyczna: można w niej wyrazić chociażby właśnie fakt, że istnieje skończenie wiele obiektów o pewnej własności w modelu, co nie jest możliwe w logice elementarnej[14].

Na koniec tej krótkiej prezentacji przykładów podkreślmy jeszcze raz, że omówione logiki łączy to, że mają wspólny semantyczny fundament, tj. klasy modeli. Fakt ten stanowi punkt wyjścia do dalszych uogólnień.

3. RACJE PRZEMAWIAJĄCE ZA UJĘCIEM ABSTRAKCYJNYM

W badaniach logicznych jednym z podstawowych zagadnień jest relacja między językiem a jego interpretacjami. Zdania danego języka są interpretowane w modelach — i w tych modelach mogą być prawdziwe lub fałszywe. W logice elementarnej pojęcie spełniania zdania w modelu jest zdefiniowane *explicite* przez indukcyjną definicję spełniania Tarskiego. Z ogólnego punktu widzenia ważne dla nas będzie to, że mamy pewną klasę *S* — obiektów pełniących rolę zdań, klasę modeli *M* oraz pewną relację zachodzącą między obiektami z klasy *S* i obiektami z klasy *M* (zwaną relacją spełniania). Mówiąc swobodnie, mamy do czynienia z pewnymi „nośnikami informacji” (są to odpowiedniki zdań, lecz możemy całkowicie abstrahować od ich wewnętrznej struktury), ze „światami” (są to klasyczne struktury relacyjne) oraz wiedzą na temat tego, czy dana informacja trafnie odnosi się do danego świata (czyli wiemy, czy zachodzi relacja spełniania między „nośnikiem” α a „światem” M).

[13] Istnieje obszerna literatura na temat kwantyfikatorów Henkina, por. np. Barwise 1979, Sher 1991, Mostowski 1994, Krynicki, Mostowski 1995.

[14] W ogólnym wypadku rozważane są koniunkcje zbiorów formuł dowolnej mocy, w charakterze ilustracji wystarczy jednak przykład logiki z przeliczalnymi koniunkcjami.

Będziemy posługiwać się oznaczeniem $M \vDash \alpha$ dla wyrażenia faktu, że zdanie α jest prawdziwe (spełnione) w modelu M; aby zaś podkreślić, że relacja ta jest zrelatywizowana do określonego systemu logicznego, będziemy używać oznaczenia $M \vDash_L \alpha$. Oczywiście, na te obiekty nakładane są pewne warunki strukturalne, tak aby możliwe było uchwycenie najogólniejszych cech tego, co nazywamy systemem logicznym. W ramach tego ujęcia będziemy mogli dokonywać bezpośrednich porównań różnych systemów logicznych, korzystając z faktu, że wszystkie one bazują na tej samej klasie struktur (modeli). Abstrakcyjnie pojmowana relacja spełniania musi posiadać pewne ogólne cechy strukturalne, nie musi jednak podlegać szczegółowym ograniczeniom (np. składniowym) charakterystycznym dla logiki elementarnej. Samo też pojęcie zdania okaże się wtórne w stosunku do struktur.

Gdy rozważamy teorie sformułowane w języku pierwszego rzędu, zawsze określamy zbiór symboli pozalogicznych, tj. predykatów, symboli funkcyjnych i stałych. Mówimy tu o słowniku (sygnaturze). W ogólnym wypadku sygnatura ma postać: $\tau = (\{P_i: i \in I\}, \{g_j: j \in J\}, \{c_k: k \in K\})$, gdzie $\{P_i: i \in I\}$ to zbiór symboli predykatowych, $\{g_j: j \in J\}$ — zbiór symboli funkcyjnych, a $\{c_k: k \in K\}$ — zbiór stałych[15]. Danej sygnaturze odpowiada klasa klasycznych struktur relacyjnych postaci:

$$M = (U_M, \{R_i: i \in I\}, \{f_j: j \in J\}, \{a_k: k \in K\})$$

U_M to uniwersum modelu M, a $\{R_i: i \in I\}$, $\{f_j: j \in J\}$, $\{a_k: k \in K\}$ to relacje, funkcje i wyróżnione elementy, będące interpretacjami odpowiednio predykatów, symboli funkcyjnych i stałych. Klasę modeli danej sygnatury będziemy oznaczać przez $Str[\tau]$. Jeśli dane zdanie α jest sformułowane z użyciem symboli z sygnatury τ, to możemy je interpretować w modelach z klasy $Str[\tau]$. Oczywiście w ogólnym wypadku takie zdanie będzie prawdziwe w niektórych modelach, a fałszywe w innych. Każde zdanie α wyznacza więc klasę modeli $Mod(\alpha) \subseteq Str[\tau]$, w których jest prawdziwe (czyli $Mod(\alpha) = \{M \in Str[\tau]: M \vDash \alpha\}$). Klasę modeli definiowalną jednym zdaniem α (czyli klasę K postaci $K = Mod(\alpha)$) nazywamy klasą elementarną. W ogólnym wypadku będziemy mówić o szerokiej klasie logik i pojęcia te będą zawsze zrelatywizowane do określonej logiki. W szczególności będziemy mówić o klasach L-elementarnych (gdzie L jest interesującą nas logiką), czyli o klasach modeli definiowanych jednym zdaniem logiki L[16].

Każde zdanie α logiki L wyznacza pewną klasę modeli $Mod(\alpha)$. Niech więc dana będzie klasa modeli $K \subseteq Str[\tau]$. Naturalne jest pytanie, czy K jest klasą elementarną (tj. klasą postaci $K = Mod(\alpha)$ dla pewnego zdania α logiki elementarnej) lub ogólniej — klasą L-elementarną (tj. klasą postaci $K = Mod(\alpha)$ dla pewnego zdania α pewnej logiki L). W takim ujęciu konkretna budowa składniowa owego zdania α staje się

---

[15] Na przykład język teorii mnogości ZFC zawiera tylko jeden symbol — dwuargumentowy predykat $\in$. Język teorii grup zawiera jeden dwuargumentowy symbol funkcyjny (dla działania grupowego) i jedną stałą (dla elementu neutralnego).

[16] A zatem w tym wypadku $Mod(\alpha) = \{M \in Str[\tau]: M \vDash_L \alpha\}$.

poniekąd nieistotna i możemy od niej abstrahować, ważny staje się bowiem jedynie fakt, że zdanie to wyróżnia klasę modeli *K*. Będzie tu zachodziło niejako odwrócenie perspektywy: nie tyle będziemy identyfikować modele przypisane zdaniom, ile raczej zdania uznamy za korelaty modeli. W takim ujęciu to klasy modeli wyznaczają zdania, a nałożenie pewnej struktury na klasy modeli wyznacza abstrakcyjnie rozumiany „język", czyli logikę. Zdania uznamy tu za wtórne w stosunku do klas modeli, za syntaktyczne korelaty klas modeli, znajdujących się w centrum naszej uwagi.

Oczywiście, na tę abstrakcyjną konstrukcję musimy nałożyć pewne ograniczenia, aby tak scharakteryzowane pojęcie logiki miało cechy, które intuicyjnie chcielibyśmy logice przypisać. Np. oczywistym warunkiem jest to, że klasa modeli *K*, którą chcemy uznać za L-elementarną, musi być domknięta na izomorfizm. Naturalny jest też warunek, aby niezależnie od tego, jak ogólnie rozumielibyśmy pojęcie logiki, reprezentowane były w pewien sposób klasyczne spójniki logiczne[17]. Te warunki są „przetłumaczone" na język relacji między klasami modeli, abyśmy mogli abstrahować od językowych czy składniowych aspektów, zachowując jednocześnie podstawowe własności, których oczekujemy od logiki. To w naturalny sposób prowadzi do pomysłu, aby porównywać logiki za pośrednictwem ich klas L-elementarnych. Dzięki temu będziemy również mogli w naturalny sposób porównywać siłę wyrażeniową logik (które, jak się zdaje, na poziomie składniowym w ogóle porównywane być nie mogą) — choć mamy świadomość, że wyrażają tę samą treść. Przykładem jest teza, że istnieje nieskończenie wiele obiektów pewnego typu. Może ona zostać wyrażona w logice $L(Q_0)$ za pomocą zdania $Q_0xP(x)$, a w logice z nieskończonymi wyrażeniami za pomocą koniunkcji nieskończenie wielu zdań postaci „Istnieje przynajmniej *n* obiektów o własności P" (dla wszystkich *n* naturalnych).

4. PODSTAWOWE POJĘCIA ABSTRAKCYJNEJ TEORII MODELI[18]

4.1. Podstawowe pojęcia

Sygnatura (słownik) $\tau = (\{P_i: i\in I\}, \{g_j: j\in J\}, \{c_k: k\in K\})$ składa się z predykatów, symboli funkcyjnych i stałych (jest to zatem klasyczna definicja słownika). Każdej sygnaturze odpowiada klasa struktur relacyjnych $Str[\tau]$ postaci $M = \langle U_M, \{R_i: i\in I\}, \{f_j: j\in J\}, \{a_k: k\in K\}\rangle$ (gdzie relacje, funkcje i wyróżnione elementy w modelach są interpretacjami odpowiednio predykatów, symboli funkcyjnych i stałych). Mówimy zatem o klasycznych strukturach relacyjnych, takich samych jak w wypadku logiki elementarnej.

Logika L jest zadana za pomocą dwóch warunków:

---

[17] W bardziej abstrakcyjnym ujęciu można rozważać także przypadek logik, w którym spójniki nie są reprezentowane tak jak w logice klasycznej. Tej sytuacji tu nie rozważamy.

[18] Korzystam tutaj z ujęcia z pracy (Ebbinghaus 1985). Monografia (Barwise, Feferman 1985) zawiera szereg artykułów z technicznymi wynikami.

1. Każdej sygnaturze τ przypisana zostanie pewna klasa $L[\tau]$, którą będziemy rozumieć jako klasę L-zdań sygnatury τ. Należy pamiętać, że mowa tutaj o abstrakcyjnym pojęciu zdania, a więc *a priori* nie będzie z nim związana żadna konkretna forma składniowa. Zdania mogą być zatem rozumiane całkowicie abstrakcyjnie, przy czym naturalne jest utożsamienie ich z klasami modeli.

2. Zdefiniowana zostanie pewna relacja $\vDash_L$ zachodząca między strukturami i L-zdaniami (relacja L-spełniania). Można na tę relację L-spełniania patrzeć jak na uogólnienie relacji spełniania dla logiki elementarnej (lub innych wspomnianych wyżej logik zadanych w jawny sposób).

Z każdą sygnaturą τ związane są zatem:

i. klasa struktur $Str[\tau]$ (są to klasyczne modele);
ii. abstrakcyjnie określona klasa zdań $L[\tau]$ (gdzie zdanie α w sposób naturalny utożsamia się z pewną klasą struktur $Mod(\alpha)\subseteq Str[\tau]$);
iii. relacja $\vDash_L$ zachodząca między modelami a zdaniami.

Na ową relację $\vDash_L$ nakładamy następujące warunki (1)-(5):

(1) Jeśli $\tau\subseteq\sigma$, to $L[\tau]\subseteq L[\sigma]$.
(2) Jeśli zachodzi relacja $M\vDash_L\varphi$, to $\varphi\in L[\tau]$ (gdzie τ jest sygnaturą struktury M).
(3) Własność izomorfizmu: jeśli $M\vDash_L\varphi$, oraz $M^*\cong M$, to $M^*\vDash_L\varphi$.
(4) Własność reduktu: jeśli $\varphi\in L[\tau]$ oraz $\tau\subseteq\tau_M$ (gdzie τ_M jest sygnaturą modelu M), to zachodzi:

(*) $M\vDash_L\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M|\tau\vDash_L\varphi$ (gdzie $M|\tau$ jest reduktem modelu M do sygnatury τ)[19].

(5) Własność zmiany nazw (*renaming*): Niech $\rho\colon \tau\to\sigma$ będzie funkcją zmiany nazw[20]. W takiej sytuacji dla dowolnego $\varphi\in L[\tau]$ istnieje zdanie $\varphi^\rho\in L[\sigma]$, takie że dla wszystkich τ-struktur M: $M\vDash_L\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M^\rho\vDash_L\varphi^\rho$[21].

Za wymienionymi warunkami stoją określone intuicje. Warto rozważyć każdą z tych własności w odniesieniu do logiki elementarnej (gdzie jawią się nam jako absolutnie oczywiste). Będzie wtedy łatwo dostrzec, że warunki te stanowią uogólnienia pewnych fundamentalnych cech logiki elementarnej:

(1) Przejście do bogatszego słownika powoduje zwiększenie (a ściślej — niezmniejszenie) klasy zdań.
(2) Aby zdanie φ mogło być prawdziwe w danej strukturze M, musi należeć do odpowiedniego (dla tej struktury) języka.

---

[19] Redukt modelu M do słownika τ powstaje przez eliminację z modelu wszystkich relacji, funkcji i stałych wykraczających poza τ.

[20] Zmiana nazw jest bijekcją z sygnatury τ na σ.

[21] Gdzie M^ρ jest strukturą, w której dokonano stosownej zmiany interpretacji symboli — zgodnej z funkcją zmiany słownika.

(3) W izomorficznych modelach spełnione są dokładnie te same zdania (modele izomorficzne są nieodróżnialne — tzn. nie można ich rozróżnić za pomocą żadnego zdania danej logiki).

(4) Aby badać problem prawdziwości danego zdania φ w modelu M, wystarczy brać pod uwagę te terminy pozalogiczne, które występują w tym zdaniu.

(5) Zmiana nazw (wraz z towarzyszącą im stosowną zmianą interpretacji w modelach) nie zmienia znaczeń zdań. Intuicyjnie możemy wyobrażać sobie zmianę nazw jako sytuację, w której zaczynamy używać innego słownika, z innymi symbolami, ale o podobnej strukturze (na przykład nowy słownik powstaje ze starego w ten sposób, że do każdego symbolu dostawiamy gwiazdkę albo wszędzie zamieniamy miejscami literki „P" oraz „Q"). Własność zmiany nazw wyraża fakt, że (swobodnie mówiąc) konsekwentna zmiana nazw nic nie zmienia w treści.

Na abstrakcyjnie rozumiane logiki będziemy nakładać dalsze warunki, które mają nam zagwarantować między innymi to, że będzie je można traktować jako uogólnienie logiki elementarnej. Będą w nich zatem interpretowane terminy logiczne logiki elementarnej, a rozważane logiki będą miały nie mniejszą moc wyrażeniową niż logika elementarna[22]. Przyjmiemy symbol $Mod_{\mathrm{L}}(\varphi)$ na oznaczenie klasy tych struktur, w których spełnione jest zdanie φ logiki L (tzn. $Mod_{\mathrm{L}}(\varphi) = \{\mathrm{M}\in Str[\tau]\colon \mathrm{M}\models_{\mathrm{L}}\varphi\}$), logikę elementarną będziemy zaś oznaczać przez $L_{\omega\omega}$.

(1) Własność formuł atomowych: dla dowolnej sygnatury τ i atomowej formuły φ logiki elementarnej istnieje zdanie $\psi\in L[\tau]$ takie, że $Mod_{\mathrm{L}}(\psi) = Mod_{\mathrm{L}\omega\omega}(\varphi)$.

(2) Własność negacji: dla dowolnej sygnatury τ i wszystkich $\varphi\in L[\tau]$ istnieje zdanie $\psi\in L[\tau]$ takie, że $Mod_{\mathrm{L}}(\psi) = Str[\tau]\setminus Mod_{\mathrm{L}}(\varphi)$.

(3) Własność koniunkcji: dla dowolnej sygnatury τ i wszystkich φ, $\psi\in L[\tau]$ — istnieje zdanie $\gamma\in L[\tau]$ takie, że $Mod_{\mathrm{L}}(\gamma) = Mod_{\mathrm{L}}(\varphi)\cap Mod_{\mathrm{L}}(\psi)$.

(4) Własność kwantyfikatora: jeśli c jest stałą, $c\in\tau$, to dla dowolnego $\varphi\in L[\tau]$ istnieje zdanie $\psi\in L[\tau\setminus\{c\}]$ takie, że dla wszystkich $\tau\setminus\{c\}$-struktur M zachodzi:

(*) $\mathrm{M}\models\psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathrm{M},a)\models\varphi$ dla pewnego $a\in\mathrm{M}$.

Skomentujmy krótko wymienione warunki:

(1) Własność formuł atomowych mówi po prostu, że w logice L „imitowane" są zdania atomowe logiki elementarnej — oczywiście ta „imitacja" odbywa się za pomocą klas modeli. Należy pamiętać, że choć mówimy tutaj o zdaniach, to są one rozumiane abstrakcyjnie, w oderwaniu od składni[23].

---

[22] Wymienione dalej warunki to warunki zawarte w definicji 1.2.1 w pracy (Ebbinghaus 1985).

[23] A zatem — swobodnie mówiąc — dostęp do znaczenia danego zdania następuje przez klasy modeli. Dwa zdania (z dowolnych logik) definiujące tę samą klasę modeli (czy raczej zdefiniowane przez tę samą klasę modeli — wszak myślimy tutaj o ujęciu abstrakcyjnym) mają to samo znaczenie.

(2) Własność negacji mówi, że w każdej logice modelowana jest negacja. To modelowanie wykorzystuje dopełnienia klas modeli: skoro $Mod_L(\psi) = Str[\tau] \setminus Mod_L(\varphi)$, to zdanie ψ odgrywa rolę negacji zdania φ.

(3) Własność koniunkcji mówi o modelowaniu koniunkcji (przez przecięcia klas modeli): skoro $Mod_L(\gamma) = Mod_L(\varphi) \cap Mod_L(\psi)$, to klasa (zdanie) γ modeluje koniunkcję zdań (klas) φ oraz ψ.

(4) Własność kwantyfikatora mówi o modelowaniu zdań egzystencjalnych. Jej geneza staje się jasna, gdy rozważymy definicję spełniania zdania egzystencjalnego postaci $\exists x\varphi(x)$ w logice elementarnej: w danym modelu M spełnione jest zdanie $\exists x\varphi(x)$, jeśli istnieje taki obiekt $a \in$ M, że $(\mathrm{M},a) \vDash \varphi(c)$ — gdzie c jest *nową* stałą. Kwantyfikację można więc „modelować”, dodając nową stałą do języka: nowa stała c odgrywa rolę zmiennej wolnej, a wyróżniony element $a \in$ M (stanowiący interpretację nowej stałej c) jest świadkiem dla zdania egzystencjalnego $\exists x\varphi(x)$[24]. Można powiedzieć, że z punktu widzenia teorii sformułowanej w słowniku τ (czyli bez stałej c), treść zdania $\exists x\varphi(x)$ można wyrazić za pomocą zdania $\varphi(c)$ — dodawszy nową stałą do języka. Wynika to z faktu, że $\mathrm{M} \vDash \exists x\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element $a \in$ M taki, że $(\mathrm{M},a) \vDash \varphi(c)$. Ostatecznie można więc powiedzieć, że w przedstawionej definicji w warunku (4) zdanie ψ odgrywa rolę zdania $\exists x\varphi(x)$. Należy pamiętać, że warunek ten jest zadany w oderwaniu od składni, przez klasy modeli (a zatem napis „$\exists x\varphi(x)$” jest tutaj używany w sposób nieformalny).

Abstrakcyjnie zdefiniowane logiki możemy traktować jako uogólnienie logiki elementarnej. Klasa ta obejmuje w szczególności logiki z dodatkowymi kwantyfikatorami, logiki z wyrażeniami nieskończonymi — i wiele innych. Można w odniesieniu do tych logik badać odpowiedniki metalogicznych własności znanych z badań nad logiką elementarną. Przykłady takich klasycznych własności metalogicznych to: zwartość, własność Löwenheima, własność interpolacji czy własność Betha. Przypomnę tutaj dwie spośród nich: zwartość i własność Löwenheima — ponieważ odgrywają one istotną rolę w twierdzeniu Lindströma, które określa miejsce logiki elementarnej w spektrum semantycznie zdefiniowanych logik.

Def. 1. κ-zwartość. Logika L ma własność κ-zwartości (gdzie κ jest liczbą kardynalną nieskończoną) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej sygnatury τ i dowolnego zbioru zdań $\Sigma \subseteq L[\tau]$ o mocy $\leq \kappa$, jeśli każdy skończony podzbiór zbioru Σ ma model, to również Σ ma model.

[24] Rozważmy przykład: jeśli mamy do czynienia z grupą bezimiennych osób, to w owej grupie prawdziwe jest zdanie „Ktoś jest logikiem” dokładnie wtedy, gdy możemy do naszego języka dołączyć nową nazwę (np. „Gödel”) i znaleźć taką osobę w owej grupie, że po nadaniu jej nazwy „Gödel” zdanie „Gödel jest logikiem” będzie prawdziwe. Mówiąc swobodnie, zdanie egzystencjalne jest spełnione, jeśli da się znaleźć dla niego świadka. Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że można do języka dołączyć nową nazwę i owemu świadkowi nadać tę właśnie nazwę.

Def. 2. Zwartość. Logika L jest zwarta, jeśli jest κ-zwarta dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ.

Definicja ta stanowi uogólnienie pojęcia zwartości dla logiki elementarnej[25]. Oczywiście, sformułowanie „zbiór zdań A ma model" należy rozumieć w taki sposób, że zbiór zdań A ma niepuste przecięcie (w abstrakcyjnym ujęciu zdanie utożsamiamy z klasą modeli).

Def. 3. Własność Löwenheima. Logika L ma dolną własność Löwenheima, jeśli każde zdanie logiki L, które ma model, ma także model mocy co najwyżej przeliczalnej.

Własność Löwenheima stanowi uogólnienie klasycznej własności (przysługującej logice klasycznej), opisywanej przez dolne twierdzenie Skolema-Löwenheima[26].

4.2. Porównywanie siły wyrażeniowej logik. Twierdzenie Lindströma[27]

Klasa L-elementarna to klasa struktur $K \subseteq Str[\tau]$ postaci $K = Mod(\alpha)$, czyli klasa modeli definiowalna za pomocą jednego zdania logiki L. W zależności od siły logiki L klasy L-elementarne będą się różnić: pewna klasa modeli $K \subseteq Str[\tau]$ może być klasą L_1-elementarną, a nie być klasą L_2-elementarną (gdzie L_1, L_2 są logikami). Stwierdzenie, że logika L_2 ma większą moc wyrażeniową niż logika L_1, ma dość oczywisty sens intuicyjny: oznacza, że w logice L_2 możemy zdefiniować wszystkie te pojęcia, które są w logice L_1, oraz pewne nowe. Z punktu widzenia badania siły wyrażeniowej logik istotne będzie więc to, jak w danej logice definiowalne będą klasy modeli. W abstrakcyjnym ujęciu logika jest po prostu zadana przez klasy modeli. Dzięki temu możliwe będzie naturalne porównywanie siły wyrażeniowej: powiemy, że logika L_2 jest silniejsza od logiki L_1, jeśli definiuje (rozróżnia) więcej klas elementarnych. Mówiąc swobodnie, im silniejsza jest dana logika L, tym bardziej subtelnie potrafi różnicować klasy modeli, czyli definiować pewne klasy modeli jako L-elementarne[28]. Intuicja ta ujęta jest w postaci następujących definicji:

(a) Logika L_2 jest niesłabsza (nie mniej silna) od logiki L_1 ($L_1 \leq L_2$), jeśli każda L_1-elementarna klasa K jest również klasą L_2-elementarną[29].

---

[25] Przypomnijmy, że twierdzenie o zwartości dla logiki elementarnej głosi: jeśli każdy skończony podzbiór teorii T ma model, to teoria T ma model.

[26] Przypomnijmy, że twierdzenie to (dla logiki elementarnej) mówi: jeśli moc języka teorii T wynosi κ, to jeśli teoria T ma model mocy $\lambda > \kappa$, to ma model mocy κ. W najczęściej spotykanej wersji głosi ono: jeśli teoria w języku przeliczalnym ma model nieskończony, to ma model przeliczalny.

[27] Szczegółową prezentację techniczną można znaleźć w pracach (Ebbinghaus 1985), (Flum 1985).

[28] Np. klasa struktur skończonych jest $L(Q_0)$-elementarna, ale nie jest klasą $L_{\omega\omega}$-elementarną. W logice $L(Q_0)$ możemy jako klasę $L(Q_0)$-elementarną wyróżnić klasę struktur, w której jest skończenie wiele obiektów o pewnej ustalonej własności. Nie jest to możliwe w logice elementarnej.

[29] Każda klasa definiowalna w ramach logiki L_1 jest też definiowalna w ramach logiki L_2.

(b) Logiki L_1 oraz L_2 są równie silne (równoważne, $L_1 \equiv L_2$), jeśli żadna z nich nie jest słabsza od drugiej (tzn. zachodzą oba warunki (i) $L_1 \leq L_2$ oraz (ii) $L_2 \leq L_1$)[30].

(c) Logika L_2 jest silniejsza od L_1 ($L_1 < L_2$) gdy $L_1 \leq L_2$, lecz nie są równie silne (tj. nie zachodzi $L_1 \equiv L_2$)[31].

Nasuwa się pytanie o zależności między abstrakcyjnie rozumianymi logikami w sensie ich mocy wyrażeniowej oraz o jakieś charakterystyczne „punkty orientacyjne" w tym porządku. Otóż, odwołując się do metalogicznych własności logik, można precyzyjnie opisać miejsce logiki elementarnej w owym spektrum. Ta charakterystyka jest treścią twierdzeń Lindströma. Pierwsze z nich brzmi tak:

> (*) Niech L będzie logiką taką, że $L_{\omega\omega} \leq L$. Jeśli L jest zwarta i ma własność Löwenheima dla przeliczalnych zbiorów zdań, to $L \equiv L_{\omega\omega}$.

Logika elementarna to zatem najsilniejsza logika, która ma jednocześnie własność zwartości i własność Löwenheima. Jest to ciekawa charakterystyka systemu logicznego za pomocą jego własności metalogicznych. Może być ona interpretowana jako stwierdzenie, że logika elementarna stanowi swoiste optimum, jeśli brać pod uwagę maksymalizację mocy wyrażeniowej przy zachowaniu pewnych własności metalogicznych (lub jako stwierdzenie, że owe własności metalogiczne stanowią nieprzezwyciężalne ograniczenia owej mocy wyrażeniowej)[32].

5. UWAGI KOŃCOWE

Abstrakcyjne ujęcie logiki jest ciekawe samo w sobie z czysto technicznych powodów. Jest też bardzo interesujące z filozoficznego punktu widzenia: zachęca do dyskusji dotyczącej roli logiki i pewnych ważnych jej aspektów — np. tego, czy podstawowe są aspekty syntaktyczne (np. opis procedur dowodowych), czy też semantyczne (opis relacji konsekwencji w kategoriach teoriomodelowych). Rzucają też światło na dyskusję dotyczącą natury pojęć logicznych, „granicy logiczności", tezy o logice pierwszego rzędu czy problemu identyfikowania zobowiązań ontologicznych (Wójtowicz 2013).

BIBLIOGRAFIA

Barwise J. (1979), *On Branching Quantifiers in English*, „Journal of Philosophical Logic" 8(1), 47-80.
Barwise J. (1985), *Model-Theoretic Logics. Background and Aims* [w:] Barwise, Feferman 1985: 3-23.
Barwise J., Feferman S. (1985), *Model-Theoretic Logics*, New York, NY: Springer.

[30] Równie silne logiki wyróżniają te same klasy modeli.

[31] Każde zdanie L_1-elementarne jest też L_2-elementarne, ale nie na odwrót.

[32] Są też inne warianty takich twierdzeń charakteryzujących. Filozoficznie ciekawy jest na pewno fakt, że logika elementarna jest najsilniejszą logiką, która ma własność pełności i własność Löwenheima.

Boolos G. (1984), *To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)*, „Journal of Philosophy" 81(8), 430-450.

Boolos G. (1985), *Nominalist Platonism*, „Philosophical Review" 94(3), 327-344.

Chang C. C., Keisler H. J. (1990), *Model Theory*, Amsterdam: North-Holland.

Cohen P. J. (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York, NY: W.A. Benjamin.

Ebbinghaus H.-D. (1985), *Extended Logics. The General Framework* [w:] Barwise, Feferman 1985: 25-76.

Flum J. (1985), *Characterizing Logics* [w:] Barwise, Feferman 1985: 77-120.

Gödel K. (1938), *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*, „Proceedings of the National Academy of Sciences, USA" 24(12), 556-557.

Gödel K. (1940), *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Gómez-Torrente M. (2002), *The Problem of Logical Constants*, „Bulletin of Symbolic Logic" 8(1), 1-37.

Jane I. (1993), *A Critical Appraisal of Second-Order Logic*, „History and Philosophy of Logic" 14(1), 67-86.

Krynicki M., Mostowski M. (1995), *Henkin Quantifiers* [w:] *Quantifiers. Logics, Models, and Computation*, t. 1, Dordrecht: Kluwer, 193-262.

Matos M. G., Väänänen J. (2005), *Abstract Model Theory as a Framework for Universal Logic* [w:] *Logica Universalis*, J.-Y. Béziau (red.), Basel: Birkhäuser, 19-33.

Mostowski M. (1994), *Kwantyfikatory rozgałęzione a problem formy logicznej* [w:] *Nauka i język*, J. Pelc (red.), Warszawa: Wydawnictwa WFiS, 201-241.

Resnik M. D. (1988), *Second-Order Logic Still Wild*, „Journal of Philosophy" 85(2), 75-87.

Shapiro S. (1985), *Second-Order Languages and Mathematical Practice*, „Journal of Symbolic Logic" 50(3), 714-742.

Shapiro S. (1991), *Foundations without Foundationalism*, Oxford: Clarendon Press.

Sher G. (1991), *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint*, Cambridge, MA: MIT Press.

Tharp L. H. (1975), *Which Logic Is the Right Logic?*, „Synthese" 31(1), 1-21.

Westerståhl D. (2011), *Generalized Quantifiers* [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition), E. N. Zalta (red.), http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/generalized-quantifiers/

Wójtowicz K. (2013), *Logical Form and Ontological Commitments* [w:] *Between Philosophy and Science*, M. Heller, B. Brożek, Ł. Kurek (red.), Kraków: Copernicus Center Press, 61-67.