Filozofia Nauki
Rok II, 1994, Nr 3-4(7-8)

Józef Wajszczyk

Niedefiniowalność funktora zmiany na gruncie rachunków logiki temporalnej

W końcu pierwszej połowy naszego stulecia nastąpił renesans zainteresowań problematyką logicznych aspektów opisu zróżnicowania rzeczywistości, rozpatrywanych w aspekcie czasowym. Zagadnienia z tego kręgu problemowego absorbowały filozofów od zarania dziejów filozofii, by wspomnieć o subtelnych analizach opisu zjawiska zmiany zawartych w eleackich aporiach ruchu czy zaczątkach systemów logiki modalnej jako teorii kategorii konieczności i możliwości interpretowanych czasowo, dających się odnaleźć w rozważaniach filozofów ze Szkoły Megarejskiej, u stoików czy u Arystotelesa. Na przykład w rozumowaniu znanym pod nazwą *Argumentu Nauczyciela*, pochodzącym od stoika Diodorosa Cronosa, zawarta jest wnikliwa analiza związków znaczeniowych zachodzących między kategoriami modalnymi interpretowanymi czasowo. Pokrewne problemy dyskutowali średniowieczni filozofowie arabscy oraz niektórzy scholastycy. W późnych latach 40-tych naszego stulecia nastąpiło — jak wspomniano — istotne odrodzenie zainteresowań tą problematyką. Wybitny znawca przedmiotu N. Rescher (patrz [5], s. 12) dopatruje się trzech źródeł tego odrodzenia. Są to: (1) studia nad materiałem historycznym (głównie nad logiką stoików i logiką średniowieczną), (2) logiczna analiza czasów gramatycznych dokonana przez H. Reichenbacha ([4]) oraz (3) próby stworzenia przez polskiego logika J. Łosia formalnego systemu logiki temporalnej ([1]). Idee Łosia były rozwijane przez A.N. Priora (uważanego za głównego twórcę logik temporalnych), N. Reschera, E.J. Lemmona, B. Cocchiarellę, D. Scotta, R.A. Bella i innych. Efektem rozwoju tego nurtu zainteresowań jest wiele systemów tzw. logiki temporalnej, integrujących badania nad logiczną strukturą czasów gramatycznych z logiczną analizą związków czasowych podejmowaną na gruncie filozofii nauki. Integracja ta jest o tyle naturalna, że analiza czasu gramatycznego implikuje przyjęcie jakiegoś modelu czasu fizykalnego. Niejako na poboczu tego nurtu badań sytuują się różne próby konstruowania rachunków zdaniowych tzw. logiki zmiany, jak np. system G.H. von Wrighta, nazywany *Logic of Change* ([7]) lub *And Next* ([6]) czy *logika kierunkowa* L. S. Rogowskiego ([3]).

Celem tego artykułu jest wykazanie, że związki temporalne wyrażalne przy pomocy specyficznego dla logik zmiany funktora zmiany $\uparrow$ (*zmienia się to, że* ...) nie są wyrażalne przy pomocy spójników logik temporalnych, a sam funktor zmiany nie jest definiowalny na gruncie rachunków logiki temporalnej.

* * *

Niech J_k oznacza język klasycznego rachunku zdań rozumiany jako algebra formuł zbudowana nad alfabetem $A_k = V \cup F \cup P$, gdzie V jest identyczne ze zbiorem (przeliczalnym) symboli zmiennych zdaniowych $\{p, q, r, ...\}$, F jest zbiorem symboli klasycznych spójników zdaniowych $\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, a P jest zbiorem znaków pomocniczych (nawiasów) — $\{(,), [,], \{, \}\}$. Zbiory V, F, P są przy tym wzajemnie rozłączne. J_k jest przeto utożsamiany ze strukturą $\langle J_k, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\rangle$, gdzie J_k jest zbiorem formuł poprawnie zbudowanych nad alfabetem A_k, czyli najmniejszym ze zbiorów Z takich, że:

1° $V \subset Z$,

2° jeżeli $\alpha, \beta \in Z$, to: „$\sim\alpha$”, „$\alpha \wedge \beta$”, „$\alpha \vee \beta$”, „$\alpha \rightarrow \beta$”, „$\alpha \leftrightarrow \beta$” $\in Z$,

zaś $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ są interpretowane jako działania określone na zbiorze J_k w taki sposób, że dla $\alpha, \beta \in J_k$ wynikiem działania $\wedge(\alpha, \beta)$ jest wyrażenie „$\alpha \wedge \beta$” itp.

Klasyczny rachunek zdań (KRZ) to rachunek zdaniowy, rozumiany jako para $\langle J_k, Cn_k\rangle$, gdzie Cn_k jest operatorem konsekwencji rozumianej klasycznie, określonej na zbiorze 2^{J_k}. Operator Cn_k może być przy tym charakteryzowany syntaktycznie (przez taką czy inną aksjomatykę) lub semantycznie, jako tzw. konsekwencja matrycowa względem znanej matrycy dwuwartościowej. Formuły należące do J_k reprezentują zdania w sensie logiki pewnego języka (naturalnego, jak np. język polski, czy sztucznego, jak np. język pewnej sformalizowanej teorii naukowej), tzn. takie wypowiedzi tego języka, którym przysługuje dokładnie jedna z dwóch wartości logicznych: prawda albo fałsz. Wśród zdań języka naturalnego (oraz pewnych języków sztucznych) znajdują się również wypowiedzi opisujące pewne związki czasowe — w tym takie, które opisują zachodzenie zmian. Istnieje wiele terminów i zwrotów języka naturalnego, służących do opisania związków temporalnych czy dynamicznych jak np: *zawsze*; *niekiedy*; *teraz*; *kiedyś w przeszłości*; *kiedyś w przyszłości*; *zawsze w przyszłości*; *od kiedy*; *do czasu gdy*; *następnie*; *poprzednio*; *już*; *jeszcze*; *zaczyna być tak, że*; *przestaje być tak, że*; *zanika to, że*; *staje się to, że*; *zmienia się to, że* itp. Te i tym podobne terminy nie są odzwierciedlone w leksykonie języka klasycznego rachunku zdań i «z punktu widzenia» tego języka są terminami pozalogicznymi. Prawa KRZ nie odzwierciedlają żadnych specyficznych związków formalnych zachodzących między wyrażeniami zawierającymi takie zwroty. Próba systematycznego ujęcia związków tego rodzaju wymaga rozszerzenia języka J_k

poprzez dołączenie do komponenty F alfabetu A_k symboli pewnych specyficznych terminów temporalno-dynamicznych.

Niech $A_t = A_k \cup \{G, H, P, F\}$ stanowi alfabet języka $\mathbf{J}_t$. W języku tym jednoargumentowe funktory: G, H, P, F mają taką zamierzoną interpretację, przy której:

$G\alpha$ to tyle co *zawsze będzie tak, że* α,

$H\alpha$ to tyle co *zawsze było tak, że* α,

$F\alpha$ to tyle co *kiedyś będzie tak, że* α,

$P\alpha$ to tyle co *kiedyś było tak, że* α.

Istnieje cała klasa rachunków zdaniowych wyrażonych w języku $\mathbf{J}_t$, zwanych rachunkami *Tense Logic* czy *Temporal Logic*, pomyślanych jako systemy kodyfikujące rozumowania, w których występują odpowiednie zwroty temporalne. Różne rachunki tego rodzaju odpowiadają różnym własnościom formalnym, charakteryzującym relację porządku czasowego wcześniej-później. W języku $\mathbf{J}_t$, rozumianym jako algebra formuł $\langle J_t, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, G, H, F, P\rangle$, gdzie J_t jest zbiorem formuł nad alfabetem A_t, czyli najmniejszym ze zbiorów $\mathfrak{Z}$ takich, że:

1° $V \subset \mathfrak{Z}$,

2° jeżeli $\alpha, \beta \in \mathfrak{Z}$, to: „$\sim \alpha$", „$G\alpha$", „$H\alpha$", „$F\alpha$", „$P\alpha$", „$\alpha \wedge \beta$", „$\alpha \vee \beta$", „$\alpha \rightarrow \beta$", „$\alpha \leftrightarrow \beta$" $\in \mathfrak{Z}$,

a $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, G, H, F, P są interpretowane jako odpowiednie działania na J_t, są definiowalne zwroty modalne rozumiane czasowo zgodnie zarówno ze stoicką jak i megarejsko-arystotelesowską tradycją. Pojęciom „konieczności" i „możliwości" interpretowanym w stylu stoickim odpowiadają definicje:

$$\boxtimes\alpha \equiv_{def} \alpha \wedge G\alpha,$$

$$\diamond\alpha \equiv_{def} \sim \boxtimes \sim \alpha \equiv \alpha \vee F\alpha$$

(Funktor F jest w omawianych rachunkach definiowalny poprzez równoważność: $F\alpha \equiv_{def} \sim G \sim \alpha$)

Tym samym pojęciom modalnym interpretowanym w stylu megarejsko-arystotelesowskim odpowiadają definicje:

$$\Box\alpha \equiv_{def} H\alpha \wedge \alpha \wedge G\alpha,$$

$$\Diamond\alpha \equiv_{def} \sim \Box \sim \alpha \equiv P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$$

(Funktor P jest definiowalny następująco: $P\alpha \equiv_{def} \sim H \sim \alpha$).

W klasie rachunków logiki temporalnej podstawowym jest system E. J. Lemmona, zwany „minimalną logiką czasu", i oznaczany przez K_t. Jest to rachunek nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań. Jego aksjomatykę stanowią:

(1) wszystkie wyrażenia języka $\mathbf{J}_t$, będące podstawieniami dowolnych tez KRZ w języku $\mathbf{J}_t$;

(2) wszystkie wyrażenia języka $\mathbf{J}_t$, będące uszczegółowieniami jednego z następujących schematów:

A1. $G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$, A2. $H(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)$,

A3. $PG\alpha \rightarrow \alpha$,

A4. $FH\alpha \rightarrow \alpha$.

Regułami inferencji w $\mathbf{K}_t$ są:

RO: $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$,

RG: $\dfrac{\alpha}{G\alpha}$,

RH: $\dfrac{\alpha}{H\alpha}$.

Modalnym $\boxslash$-fragmentem $\mathbf{K}_t$ jest (patrz [2]) rachunek modalny Feysa - von Wrighta **T** o specyficznych aksjomatach:

M1. $\boxslash(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\boxslash\alpha \rightarrow \boxslash\beta)$,

M2. $\boxslash\alpha \rightarrow \alpha$,

i specyficznej regule inferencji:

R$\boxslash$: $\dfrac{\alpha}{\boxslash\alpha}$.

$\Box$-fragmentem $\mathbf{K}_t$ jest rachunek modalny S. Kripkego **B** (patrz [2]) o specyficznych aksjomatach:

M1′. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$,

M2′. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$,

M3′. $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$

i specyficznej regule inferencji:

R$\Box$: $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$.

$\mathbf{K}_t$ był pomyślany jako system formalny kodyfikujący rozumowania dotyczące dyskursu temporalnego w kategoriach funktorów: G, H, F, P, dotyczącego dowolnych struktur czasowych, tzn. niezależnie od jakichkolwiek założeń, dotyczących własności formalnych relacji porządku czasowego: wcześniej-później. Prawa rachunku $\mathbf{K}_t$ nie wyróżniają żadnych struktur czasowych; są obowiązujące w dowolnych takich strukturach. Żadne specyficzne własności relacji wcześniej-później nie są odzwierciedlone w prawach $\mathbf{K}_t$. Jednakże w języku $\mathbf{J}_t$ istnieją pewne formuły nie będące tezami $\mathbf{K}_t$, które wydają się (przynajmniej «na pierwszy rzut oka») prawdziwe logicznie. Rozważmy, dla przykładu, wyrażenie: $Gp \rightarrow Fp$, głoszące, że jeżeli zawsze w przyszłości będzie tak, że p, to kiedyś w przyszłości będzie tak, że p. Wyrażenie to nie jest tezą $\mathbf{K}_t$. Skłonność do uznawania go za prawdę logiczną bierze się z milcząco przyjmowanego założenia, że istnieją momenty późniejsze od momentu obecnego, inaczej, że teraźniejszość nie jest momentem ostatnim. Założenie to ma jednak wyraźnie pozalogiczną treść i odpowiada pewnemu wyobrażeniu o naturze czasu. Różne (choć nie wszystkie!) założenia dotyczące formalnych własności relacji wcześniej-później są — jak się okazuje (patrz [5]) — wyrażalne w języku $\mathbf{J}_t$, a związki logiczne zachodzące między wyrażeniami temporalnymi, odpowiadające takim czy innym założeniom dotyczącym własności formalnych tej relacji, mogą być ujmowane w języku J_t w sposób systematyczny. Niech ω będzie zmienną przebiegającą zbiór własności formalnych relacji wcześniej-później (oznaczanej od tego miejsca przez <) określonej na zbiorze momentów czasowych (oznaczanym od tego miejsca przez T). Do zbioru tego należą takie własności jak: zwrotność, przechodniość, gęstość itp. Do sprecyzowania znaczenia zwrotu „własność ω relacji < jest wyrażalna w języku J_t" będzie potrzebne przedstawienie pewnej semantyki algebraicznej dla języka J_t.

Niech $\langle T, <\rangle$ oznacza (jak dotychczas) strukturę, na którą składają się niepusty zbiór momentów czasowych T oraz określona na nim relacja binarna wcześniej-później < ($< \subset T^2$). Niech dalej $O = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ oznacza niepusty, lecz co najwyżej przeliczalny zbiór obiektów istniejących w czasie $\langle T, <\rangle$. Zakładamy przy tym, że zbiory O i T są rozłączne ($T \cap O = \emptyset$). Poza tym założeniem dotyczącym stosunku zbiorów T i O nie będziemy przyjmowali żadnych dodatkowych założeń, chociaż zdajemy sobie sprawę z istnienia egzystencjalnych zależności między zbiorem momentów czasowych a zbiorem obiektów istniejących w czasie. Analiza tych zależności wydaje się nie mieć znaczenia dla badania logicznych aspektów opisu zmiany. Okoliczność, że obiekty a_i istnieją w czasie $\langle T, <\rangle$ uzyskuje w naszej konstrukcji taki wyraz, że z każdym obiektem a_i kojarzymy konstrukt $\boldsymbol{a}_i = \{a_i\} \times T = \{\langle a_i, t\rangle : t \in T\}$, którego elementy będziemy nazywali „przekrojami czasowymi obiektu a_i". Relacja < indukuje odpowiednie relacje $<_i$ określone na zbiorach $\boldsymbol{a}_i$ w taki sposób, że dla każdego $i = 1, 2, 3, \ldots$ i dla dowolnych $t, t' \in T$:

$$\langle a_i, t\rangle <_i \langle a_i, t'\rangle \underset{def}{\equiv} t < t'.$$

Z definicji tej wynika wprost, że struktury $\langle T, <\rangle$ oraz $\langle \boldsymbol{a}_i, <_i\rangle$ są izomorficzne.

Niech $W_1, W_2, \ldots, W_n$ oznaczają pewne proste własności obiektów ze zbioru O. Z teoriomnogościowego punktu widzenia własności te można utożsamiać z funkcjami charakterystycznymi określonymi na zbiorze $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_i$. Dokładniej dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$, W_j jest funkcją $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_i \rightarrow \{0, 1\}$. Równanie $W_j(a_i, t) = 1$ opisuje przysługiwanie obiektowi a_i własności W_j w momencie t, zaś równanie $W_j(a_i, t) = 0$ opisuje nieprzysługiwanie obiektowi a_i własności W_j w momencie t. Oznaczmy przez $W_{j,i}$ funkcję W_j ograniczoną do zbioru $\boldsymbol{a}_i$ ($W_{j,i} = W_j/\boldsymbol{a}_i$). Zbiór funkcji $\{W_j : j = 1, \ldots, n\}$ można rozłożyć na zbiór $\{W_{j,i} : j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots\}$. Wobec izomorfizmu struktur $\langle T, <\rangle$ oraz $\langle \boldsymbol{a}_i, <_i\rangle$ funkcje $W_{j,i}$ można sprowadzić do pewnych funkcji określonych nie na zbiorach $\boldsymbol{a}_i$, lecz wprost na zbiorze T. Dowolnej funkcji charakterystycznej $W_{j,i}$ odpowiada pewna funkcja $\phi: T \rightarrow \{0,1\}$, określona jak następuje:

$$\phi(t) \underset{def}{=} W_{j,i}(a_i, t).$$

Dzięki temu, modelami fragmentów rzeczywistości, w których mają miejsce różnice stanów rzeczy w czasie, mogą być struktury typu $\langle A, D\rangle$, gdzie A jest podzbiorem zbioru $\mathbf{A} = \{\phi\colon T \to \{0, 1\}\}$, domkniętym ze względu na operacje ze zbioru D. Zbiór D jest przy tym zbiorem operacji określonych na zbiorze A, stanowiących w zamierzeniu semantyczne korelaty funktorów logicznych języka $\mathbf{J}_t$.

Definicja 1.

„Algebrą temporalną" nazywamy każdą strukturę $\mathbf{A} = \langle A, \overline{}, \cap, \mathbf{G}, \mathbf{H}\rangle$, gdzie A jest dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbf{A} = \{\phi\colon T \to \{0, 1\}\}$ domkniętym ze względu na operacje: $\overline{}$, $\cap$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, określone jak następuje ($\dot{\underset{\psi}{\iota}}$ czytamy — jedyne ψ takie, że):

dla dowolnych $\phi, \mu \in \mathbf{A}$:

$$\overline{}\phi \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = 1-\phi(t)]$$

$$\phi \cap \mu \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = \min[\phi(t), \mu(t)]],$$

$$\mathbf{G}\phi \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = 1 \Leftrightarrow \text{dla dowolnego } t'\colon \text{jeżeli } t < t' \text{ to } \phi(t') = 1],$$

$$\mathbf{H}\phi \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = 1 \Leftrightarrow \text{dla dowolnego } t'\colon \text{jeżeli } t' < t \text{ to } \phi(t') = 1].$$

Klasę wszystkich algebr temporalnych oznaczymy przez **KAT**. Jest widoczne, że do dziedziny każdej algebry temporalnej należą funkcje charakterystyczne **1**, **0**, określone jak następuje:

$$\mathbf{1} \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = 1],$$

$$\mathbf{0} \underset{def}{=} \underset{\psi}{\dot{\iota}}\,[\text{dla dowolnego } t \in T\colon \psi(t) = 0].$$

Relatywnie do każdej formalnej własności ω relacji $<$ określamy klasę ω-algebr temporalnych $\mathbf{K}_\omega$ jako podklasę **KAT** złożoną z wszystkich i tylko tych algebr temporalnych, których dziedziny stanowią zbiory funkcji charakterystycznych określonych na zbiorach T, na których relacja $<$ posiada własność ω. Symbolicznie:

$$\mathbf{K}_\omega \underset{def}{=} \{\mathbf{A} \in \mathbf{KAT}\colon \omega(<, T(\mathbf{A}))\}$$

gdzie $\omega(<, T(\mathbf{A}))$ czytamy — $<$ ma własność ω na zbiorze T stanowiącym dziedzinę funkcji charakterystycznych ϕ ze zbioru $\mathbf{A}$.

Dla dowolnej algebry temporalnej $\mathbf{A}$ „wartościowaniem zmiennych zdaniowych w $\mathbf{A}$" nazwiemy dowolną funkcję $v\colon V \to A$. Każdą funkcję wartościowania v w algebrze $\mathbf{A}$ można przedłużyć jednoznacznie do homomorfizmu $h^v\colon J_t \to A$ w taki sposób, że:

$$h^v(p_i) = v(p_i)$$

oraz

$$h^v(\sim\alpha) = \overline{}\,h^v(\alpha),$$
$$h^v(\alpha \wedge \beta) = h^v(\alpha) \cap h^v(\beta),$$
$$h^v(G\alpha) = \mathbf{G}(h^v(\alpha)),$$
$$h^v(H\alpha) = \mathbf{H}(h^v(\alpha))$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in J_t$.

Relatywnie do ustalonej własności formalnej ω relacji < definiujemy ω-tautologię języka J_t.

Definicja 2.

Dowolne wyrażenie $\alpha \in J_t$ nazywamy „ω-tautologią języka J_t" zawsze i tylko wtedy, gdy dla dowolnej ω-algebry temporalnej $\mathbb{A}$ i dla dowolnego wartościowania v w tej algebrze: $h^v(a) = 1$. Symbolicznie:

$$\vdash_{\omega} \alpha \underset{def}{\equiv} \bigwedge_{\mathbb{A} \in K_\omega} \bigwedge_{v: V \to A} h^v(\alpha) = 1.$$

Możemy teraz już uściślić znaczenie zwrotu „własność ω relacji < jest wyrażalna w języku J_t".

Definicja 3.

Własność formalna ω relacji < jest wyrażalna w języku J_t zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje taka formuła $\alpha \in J_t$, która jest ω-tautologią języka J_t, oraz dla dowolnej struktury $\langle T, <\rangle$, w której < nie ma własności ω, istnieje taka algebra temporalna $\mathbb{A} \in K_{non\omega}$ i takie wartościowanie v w tej algebrze, że $h^v(\alpha) \neq 1$.

Różne własności formalne relacji < są wyrażalne w języku J_t (patrz [5]). Na przykład przechodniość < jest wyrażana formułą: $FFp \to Fp$. Ponadto wyrażalne są: zwrotność, symetryczność, gęstość, brak początku, brak końca, linearność wsteczna, linearność przyszła. Natomiast nie jest wyrażalna niesymetryczność relacji <. Istnieje ścisły związek między zagadnieniem wyrażalności własności formalnych relacji < a kwestią syntaktycznej charakterystyki rachunków logiki temporalnej adekwatnych względem określonych struktur czasowych.

Niech PL oznacza koniunkcję następujących własności formalnych relacji <: przechodniość, gęstość, wsteczna linearność (z dowolnych dwóch różnych momentów przeszłych jeden jest wcześniejszy od drugiego), przyszła linearność, brak początku oraz brak końca. Adekwatnym względem takiej struktury $\langle T, <\rangle$ (inaczej mówiąc względem klasy $\mathbf{K}_{PL}$ algebr temporalnych jest rachunek *Tense Logic* A.N. Priora, oznaczany przez **PL**. Aksjomatykę tego rachunku stanowi układ aksjomatów dla $\mathbf{K}_t$ wzbogacony o następujące schematy aksjomatów:

A5. $FF\alpha \to F\alpha$,

A6. $(P\alpha \wedge P\beta) \to [P(\alpha \wedge \beta) \vee P(\alpha \wedge P\beta) \vee P(P\alpha \wedge \beta)]$,

A7. $(F\alpha \wedge F\beta) \to [F(\alpha \wedge \beta) \vee F(\alpha \wedge F\beta) \vee F(F\alpha \wedge \beta)]$,

A8. $G\alpha \to F\alpha$,

A9. $H\alpha \to P\alpha$,

A10. $F\alpha \to FF\alpha$.

A5 wyraża przechodniość, A6 — wsteczną linearność, A7 — przyszłą linearność, A8 — brak końca, A9 — brak początku, A10 — gęstość relacji < na zbiorze T.

Modalnymi fragmentami **PL** są odpowiednio: $S_{4.3}$ (styl stoicki) oraz S5 (styl megarejski).

Aksjomatykę $S_{4.3}$ stanowią: M1, M2 oraz

M3. $\boxtimes\alpha \to \boxtimes\boxtimes\alpha$, M4. $[\boxslash(\alpha \vee \beta) \wedge \boxslash(\alpha \vee \boxslash\beta) \wedge \boxslash(\boxslash\alpha \vee \beta)] \rightarrow (\boxslash\alpha \vee \boxslash\beta)$.

Specyficznymi schematami aksjomatów S5 są:

M1′. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$,

M2′. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$,

M4′. $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$,

M5′. $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha$.

Warto zauważyć, że interpretacja specyficznych funktorów języka $\mathbf{J}_t$ wiąże je znaczeniowo z «całą przeszłością» bądź «całą przyszłością» — zrelatywizowanymi do danej «teraźniejszości». W przeciwieństwie do tych funktorów — znaczenia terminów dynamicznych, takich jak: *zmienia się to, że*; *zaczyna być tak, że*; *przestaje być tak, że*; *staje się to, że*; *zanika to, że* itp. są takie, że do ich określenia nie jest potrzebny wgląd w «całą przeszłość» czy «całą przyszłość» lecz jedynie w «najbliższe otoczenie teraźniejszości», na które składają się trzy komponenty: «najbliższa przeszłość», «teraźniejszość» oraz «najbliższa przyszłość». Funktory języka $\mathbf{J}_t$ pozwalają na opis różnic stanów rzeczy w czasie ujmowanych z perspektywy «teraźniejszości». Jednak zainteresowanie różnorodnością świata związaną z upływem czasu nie ogranicza się do konstatowania faktu, że w różnych momentach czasu obiektom przysługują bądź nie przysługują pewne własności, czy zachodzą między nimi bądź nie zachodzą pewne relacje, lecz może się też skupiać na tym, co można nazwać „aktualnym aspektem różnicowania". Obiekty nie tylko bywają różne w różnych momentach lecz także zmieniają się w poszczególnych momentach. Niech zapis „ $\underset{t}{\uparrow}W(a)$" będzie symbolicznym odpowiednikiem zwrotu „obiekt a zmienia się w momencie t pod względem własności W". Jakie jest znaczenie zwrotu „ $\underset{t}{\uparrow}W(a)$ w odniesieniu do struktury czasowej $\langle T, < \rangle$, dla której zakładamy, że relacja $<$ posiada koniunkcję własności oznaczoną symbolem PL i czy zwrot ten jest definiowalny za pomocą terminów: G, H, F, P? Głównym zamierzeniem tego artykułu jest wykazanie, że funktor $\uparrow$ nie jest definiowalny przy pomocy funktorów języka $\mathbf{J}_t$ na gruncie rachunku **PL**. Rozumowanie, które zostanie tu przedstawione, pragniemy poprzedzić zwróceniem uwagi Czytelnika na to, że istnienie różnic w czasie nie musi oznaczać faktu zachodzenia zmian w jakimkolwiek momencie. Konstatacja różnic w czasie pewnego obiektu a (identycznego co do swojej tożsamości jednostkowej) pod względem pewnej własności W nie jest równoważna stwierdzeniu zachodzenia zmiany w pewnym momencie. Inaczej mówiąc wyrażenie:

$$[\bigvee_t W(a, t) \wedge \bigvee_t {\sim} W(a, t)] \leftrightarrow \bigvee_t \underset{t}{\uparrow}W(a)$$

nie jest prawdziwe przy wszystkich wyobrażalnych sposobach zróżnicowania stanów rzeczy w czasie w PL-strukturach. Jeżeli powyższą równoważność rozbijemy na dwie implikacje, jedna z nich, mianowicie

$$\bigvee_t \underset{t}{\uparrow}W(a) \rightarrow [\bigvee_t W(a, t) \wedge \bigvee_t {\sim} W(a, t)]$$

jest niewątpliwie prawdziwa w każdej PL-strukturze. Załóżmy bowiem, że jej następnik jest fałszywy. Znaczy to, że w każdym momencie $t \in T$ obiekt *a* jest taki sam pod względem własności W. To zaś wyklucza, by obiekt ten zmieniał się pod względem tej własności w jakimkolwiek momencie $t \in T$. Implikacja odwrotna:

$$[\bigvee_t W(a, t) \wedge \bigvee_t \sim W(a, t)] \rightarrow \bigvee_t \uparrow_t W(a)$$

wydaje się również prawdziwa «na pierwszy rzut oka». Jej treść jest następująca: jeżeli obiekt *a* jest różny pod względem własności W w pewnych dwóch momentach, to obiekt ten zmienia się pod względem tej własności w pewnym momencie. Przekonanie o prawdziwości powyższego twierdzenia bierze się z milcząco przyjmowanego założenia, że tezy: „obiekt jest różny pod danym względem w pewnych dwóch momentach" oraz „obiekt nigdy się nie zmienia" — wykluczają się logicznie. Założenie to nie zawsze jest jednak prawdziwe, a jego wartość logiczna może zależeć od specyficznych (nie objętych warunkami PL) własności struktury $\langle T, <\rangle$ oraz sposobu rozkładu w czasie przysługiwania obiektowi a własności W. To, że jest możliwa do pomyślenia sytuacja, w której mamy do czynienia z różnicami w czasie mimo niezachodzenia zmiany w żadnym momencie, pokazuje następujący przykład. Niech relacja $<$ wyznacza na zbiorze T porządek liniowy (jest asymetryczna, przechodnia i spójna), gęsty oraz z luką. Struktura $\langle T, <\rangle$ jest PL-strukturą, gdyż warunek spójności implikuje zarówno warunek linearności wstecznej, jak i warunek linearności przyszłej. Ponieważ jest to porządek z luką, zbiór T można podzielić na dwa podzbiory T_1 i T_2 ($T_1 \neq \emptyset \neq T_2$ i $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ i $T_1 \cup T_2 = T$) w taki sposób, że każdy moment należący do T_1 jest wcześniejszy od każdego momentu należącego do T_2 oraz, że w T_1 nie istnieje moment najpóźniejszy, a w T_2 nie istnieje moment najwcześniejszy. Załóżmy dalej, że w każdym momencie należącym do T_1 obiekt *a* nie posiada własności W, a w każdym momencie należącym do T_2 obiekt posiada własność W. W tym modelowym wypadku mają miejsce różnice w czasie i nie zachodzą zmiany w żadnym momencie. Rozważana implikacja nie jest więc prawdziwa w każdym wypadku. Istnienie różnic w czasie jest warunkiem koniecznym, ale nie jest warunkiem wystarczającym zachodzenia zmian. Jaka zatem powinna być poprawna definicja zwrotu $\uparrow_t W(a)$?

Sądzimy, że w odniesieniu do PL-struktur można stwierdzić, że w pewnym momencie $t_0 \in T$ obiekt *a* zmienia się pod względem własności W zawsze i tylko wtedy, gdy w dowolnie małym otoczeniu t_0 istnieje taki moment, w którym obiekt *a* jest różny niż w momencie t_0 pod względem własności W. Symbolicznie:

$$\uparrow_{t_0} W(a) \underset{def}{\equiv} \bigwedge_{t_1, t_2} [t_1 < t_0 \wedge t_0 < t_2 \rightarrow \bigvee_t (t_1 < t \wedge t < t_2 \wedge \sim (W(a, t) \leftrightarrow W(a, t_0)))]$$

Znaczenia funktorów G, H, F, P, precyzują zaś następujące definicje:

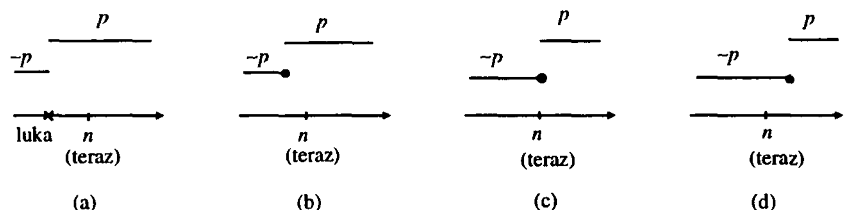
$$G_{t_0} W(a) \underset{def}{\equiv} \bigwedge_t [t_0 < t \rightarrow W(a, t)],$$

$$H_{t_0} W(a) \underset{def}{\equiv} \bigwedge_t [t < t_0 \rightarrow W(a, t)],$$

$$F_{t_0}W(a) \underset{def}{\equiv} \bigvee_{t} [t_0 < t \wedge W(a, t)],$$

$$P_{t_0}W(a) \underset{def}{\equiv} \bigvee_{t} [t < t_0 \wedge W(a, t)].$$

W języku J_t można wyrazić myśl o zróżnicowaniu stanów rzeczy w różnych momentach, ujmowanym z perspektywy przeszłość-teraźniejszość-przyszłość. Przykładowo formuły: $P{\sim}p \wedge Fp$, $PPp \wedge {\sim}p$, $F{\sim}p \wedge FFFp$ wyrażają takie zróżnicowania. Jednak — co już podkreślaliśmy — stwierdzenie różnicy stanów rzeczy w różnych momentach nie jest równoznaczne ze stwierdzeniem zachodzenia zmiany w jakimś momencie. Na przykład wyrażenie $P{\sim}p \wedge Fp$ opisuje prawdziwie każdy z czterech przypadków przedstawionych na rys. 1.



Rys. 1

Jednak w wypadku (a) (p stale nie zachodzi przed luką i stale zachodzi po luce) zmiana nie zachodzi w żadnym momencie, w wypadku (b) zmiana zaszła kiedyś w przeszłości, w wypadku (c) zmiana zachodzi aktualnie, a w wypadku (d) zmiana zajdzie kiedyś w przyszłości. Stwierdzenie różnic w czasie ani nie przesądza czy zmiana ma miejsce, ani (w wypadku, gdy zmiana ma miejsce) nie wskazuje na moment, w którym zachodzi.

Czy zwrot $\uparrow p$ jest definiowalny w języku J_t na gruncie rachunku **PL**? Pozytywna odpowiedź na to pytanie oznaczałaby możliwość ugruntowania rachunku *logiki zmiany* na bazie rachunku **PL**. Odpowiedź negatywna sugerowałaby, że próby konstrukcji *logiki zmiany* winny być prowadzone niezależnie od tego rachunku. Warto zauważyć, że wprowadzenie do rachunku **PL** funktora zmiany $\uparrow$ wyposażonego w znaczenie zgodne z wcześniej proponowanym sprawiłoby, że w tak rozszerzonym rachunku tezami powinny być wszystkie wymienione wyżej wyrażenia:

$$\uparrow p \rightarrow [p \wedge (P{\sim}p \vee F{\sim}p)] \vee [{\sim}p \wedge (Pp \vee Fp)],$$

$$(p \wedge G{\sim}p) \rightarrow \uparrow p,$$

$$(H{\sim}p \wedge p) \rightarrow \uparrow p,$$

$$[p \wedge (H{\sim}p \vee G{\sim}p)] \vee [{\sim}p \wedge (Hp \vee Gp)] \rightarrow \uparrow p$$

itp.

Implikacje odwrotne do powyższych nie powinny być tezami takiego rachunku, bowiem nie byłyby one PL-tautologiami. Wyżej wymienione formuły można by uznać za pewne postulaty wiążące znaczenia występujących w nich funktorów temporalnych z funktorem zmiany jedynie w sposób cząstkowy.

Obecnie pokażemy, że zwrot $\uparrow p$ nie jest definiowalny w $\mathbf{J}_t$ na gruncie rachunku **PL**. Gdyby był definiowalny, to istniałoby pewne wyrażenie definicyjne postaci:

$$\uparrow p \underset{def}{\equiv} \varepsilon(p),$$

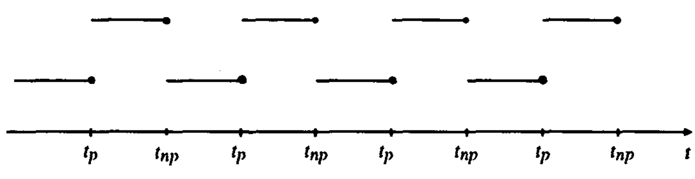
gdzie $\varepsilon(p)$ oznacza pewną formułę definiującą, zbudowaną jedynie ze zmiennej p i funktorów należących do zestawu: $\sim$, $\wedge$, G, H (pozostałe funktory języka $\mathbf{J}_t$ są definiowalne przy ich pomocy). Gdyby tak było, to dla każdej PL-algebry temporalnej **A**, dla każdego wartościowania v w tej algebrze i dla każdego $t_0 \in$ T zachodziłaby zależność:

(*) $h^v(\varepsilon(p)) = 1 \Leftrightarrow$ dla dowolnego otoczenia t_0 istnieje takie t należące do niego, że $[v(p)](t_0) \neq [v(p)](t)$

Pokażemy obecnie, że istnieje taka PL-algebra temporalna, że dla dowolnego wyrażenia $\alpha \in \mathbf{J}_t$ o postaci $\varepsilon(p)$ istnieje wartościowanie v w tej algebrze, dla którego zależność (*) nie zachodzi. Niech $\langle$T, $<\rangle$ będzie strukturą, w której $<$ jest porządkiem liniowym, gęstym oraz bez elementów końcowych (jest to też PL-struktura). Niech A będzie zbiorem identycznym ze zbiorem wszystkich funkcji charakterystycznych określonych na zbiorze T. W zbiorze T wyróżniamy podzbiory T_c, T_p, T_{np}, izomorficzne odpowiednio ze zbiorami: liczb całkowitych, liczb parzystych oraz liczb nieparzystych. Określamy funkcję $\phi_0 \in$ A jak następuje:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t_p < t \leq t_{np} \\ 0 & \text{dla } t_{np} < t \leq t_p, \end{cases}$$

gdzie $\langle t_p, t_{np}\rangle$, $\langle t_{np}, t_p\rangle$ oznaczają pary momentów całkowitych, w których drugi element jest bezpośrednim następnikiem pierwszego. Wykres funkcji ϕ_0 wygląda następująco:



Rys. 2

Niech **A** będzie PL-algebrą temporalną, której dziedziną jest zbiór A, a v_0 takim wartościowaniem w tej algebrze, dla którego $v_0(p) = \phi_0$. Spełnienie warunku (*) oznaczałoby, że $h^v(\uparrow p) = h^v(\varepsilon(p)) = \phi^*$, gdzie

$$\phi^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in T_c \\ 0 & \text{dla } t \notin T_c. \end{cases}$$

Otóż równość $h^v(\varepsilon(p)) = \phi^*$ nie zachodzi dla żadnego wyrażenia języka $\mathbf{J}_t$ o postaci $\varepsilon(p)$. Zachodzi bowiem twierdzenie:

Dla dowolnego wyrażenia języka $\mathbf{J}_t$ o postaci $\varepsilon(p)$: $h^v(\varepsilon(p)) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \phi_0, -\phi_0\}$

Dowód twierdzenia jest stosunkowo prosty, chociaż — ściśle rzecz biorąc — powinien być przeprowadzony indukcyjnie ze względu na strukturę wyrażenia $\varepsilon(p)$. Sprowadza się on do spostrzeżenia, że jeśli zmienna p w każdym występowaniu w wyrażeniu $\varepsilon(p)$ jest objęta jednym z funktorów temporalnych G lub H, to $h^{v}(\varepsilon(p)) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Jeżeli zaś w $\varepsilon(p)$ występuje zmienna p nie objęta żadnym funktorem temporalnym, to $h^{v}(\varepsilon(p))$ jest identyczne z ϕ_0, $-\phi_0$, $\mathbf{0}$ lub $\mathbf{1}$. Ponieważ ϕ^* jest różne od każdej z tych czterech funkcji, żadne wyrażenie języka $\mathbf{J}_t$ nie może definiować funktora $\uparrow$. C.b.d.o.

Literatura

1. J. Łoś, *Podstawy analizy metodologicznej kanonów Hilla*, Lublin 1947.
2. R. P. McArtur, *Tense Logic*, Boston 1976.
3. L. S. Rogowski, *Logika kierunkowa a heglowska teza o sprzeczności zmiany*, Toruń 1969.
4. H. Reichenbach, *Elements of Symbolic Logic*, New York 1947.
5. N. Rescher, A. Urquart, *Temporal Logic*, New York 1971.
6. G. H. von Wright, „And Next", *Acta Philosophica Fennica*, fasc. 18 (1965).
7. G. H. von Wright, *Norm and Action*, London 1963.