Filozofia Nauki
Rok XXII, 2014, Nr 2(86)

Eugeniusz Żabski

Tablice semantyczne Betha dla pewnych nieklasycznych rachunków zdań

1. Klasyczny rachunek zdań (krz) zbudowany w III w. p.n.e. przez stoików — jak wiadomo — jest teorią (systemem, logiką) następujących spójników (funktorów): *nieprawda, że*; *i*; *lub*; *jeśli ..., to*; *wtedy i tylko wtedy, gdy*. Funktory te nazywa się spójnikami odpowiednio: negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności. Przyporządkowuje się im zwykle odpowiednio następujące symbole: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$. Sens (znaczenie) owych spójników ustalają następujące tabelki (matryce):

A	~A
0	1
1	0

$A \wedge B$	0	1
0	0	0
1	0	1

$A \vee B$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \rightarrow B$	0	1
0	1	1
1	0	1

$A \equiv B$	0	1
0	1	0
1	0	1

w których litery A i B reprezentują dowolne zdania, a cyfry 1 i 0 symbolizują odpowiednio prawdę i fałsz. Prawda i fałsz są dwiema tzw. wartościami logicznymi. Krz jest w tym sensie logiką dwuwartościową.

2. Także pierwszy nieklasyczny (trójwartościowy) rachunek zdań £3 zbudowany przez Jana Łukasiewicza w 1920 r. jest teorią spójników negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności (Łukasiewicz 1920, por. Porębska, Suchoń 1991). Znaczenie ich można ustalić następującymi tabelkami:

A	~A
0	1
½	½
1	0

$A \wedge B$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$A \vee B$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$A \rightarrow B$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

$A \equiv B$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

w których 1 i 0 są — jak w krz — symbolami odpowiednio prawdy i fałszu, natomiast ½ jest symbolem możliwości (prawdopodobieństwa). Możliwość jest ową trzecią wartością logiczną.

3. Innym trójwartościowym rachunkiem zdań jest logika paradoksu (LP) zbudowana przez australijskiego logika Grahama Priesta (Priest 1979, por. Poczobut, 2000). Również ta logika jest teorią spójników negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności. Ich znaczenie można ustalić następującymi tabelkami:

A	~A
0	1
½	½
1	0

A ∧ B	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

A ∨ B	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

A →B	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

A ≡ B	0	½	1
0	1	½	0
½	½	½	½
1	0	½	1

w których 1, 0, ½ są symbolami odpowiednio prawdy, fałszu i paradoksalności. Paradoksalność jest ową trzecią „wartością" logiczną w LP.

4. Dwiema innymi logikami trójwartościowymi są nihilistyczne rachunki zdań (nrz): n'2 i n'3. Również te logiki są teoriami spójników negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności, a nadto funktorów: *prawdą jest, że*; *fałszem jest, że*, a pierwsza dodatkowo teorią spójnika *nieokreślone jest, że*, druga zaś — spójnika *niejednoznaczne jest, że*.

Dla czterech ostatnich spójników przyjmuje się odpowiednio symbole: T, F, N, M. Ową trzecią wartością logiczną są więc: w nrz n'2 — nieokreśloność, a w nrz n'3 — niejednoznaczność.

Sens spójników ~, ∧, ∨, →, ≡, T, F, N w nrz n'2 jest ustalony przez następujące matryce:

A	~A	TA	FA	NA
-1	-1	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0

A ∧ B	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0
1	-1	0	1

A ∨ B	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

A→B	-1	0	1
-1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1

A ≡ B	-1	0	1
-1	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

w których 1, 0, -1 są symbolami odpowiednio: prawdy, fałszu i nieokreśloności.

Sens zaś spójników: ~, ∨, ∧, →, ≡, T, F, M w nrz n'3 jest ustalony przez następujące tabelki:

A	~A	TA	FA	MA
0	1	0	1	0
½	½	1	0	1
1	0	1	0	0

A ∧ B	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

A ∨ B	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

A→B	0	½	1
0	1	1	1
½	0	1	1
1	0	1	1

A≡B	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	1
1	0	1	1

w których 1,0, ½ są symbolami odpowiednio prawdy, fałszu i niejednoznaczności.

5. Dwoma innymi rachunkami zdań, które teraz pokrótce omówimy, są czterowartościowe logiki nrz n'4 i nrz n'5. Wartościami logicznymi są w nich oprócz prawdy i fałszu także nieokreśloność i niejednoznaczność.

Nrz n'4 jest teorią spójników: nieprawda, że; i; lub; jeśli…, to; wtedy i tylko wtedy, gdy; prawdą jest, że; fałszem jest, że; nieokreślone jest, że; niejednoznaczne jest, że, a nrz n'5 nadto spójników: tylko prawdą jest, że; tylko fałszem jest, że. Symbolami ostatnich dwóch spójników są znaki: T' i F'.

Sens spójników w nrz n'4 jest ustalony przez następujące matryce:

A	~A	TA	FA	NA	MA
-1	-1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
½	½	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0

A ∧ B	-1 0 ½ 1
-1	-1 -1 -1 -1
0	-1 0 0 0
½	-1 0 ½ ½
1	-1 0 ½ 1

A ∨ B	-1 0 ½ 1
-1	-1 0 ½ 1
0	0 0 ½ 1
½	½ ½ ½ 1
1	1 1 1 1

A→B	-1 0 ½ 1
-1	1 1 1 1
0	1 1 1 1
½	0 0 1 1
1	0 0 0 1

A ≡ B	-1 0 ½ 1
-1	1 1 0 0
0	1 1 0 0
½	0 0 1 1
1	0 0 1 1

Sens dziewięciu pierwszych spójników nrz n'5 jest ustalony tak, jak nrz n'4. Znaczenie ostatnich dwóch funktorów jest ustalone przez tabelki:

A	T’A	F’A
-1	0	0
0	0	1
½	0	0
1	1	0

Nrz dokładniej omówione są w (Żabski 2001).

Łatwo zauważyć, że sens niektórych spójników we wszystkich omówionych wyżej logikach jest taki sam lub „prawie” taki sam, a znaczenie niektórych innych (szczególnie implikacji) w różnych logikach jest inny lub „nieco” inny. Jeśli znaczenie spójników jakiejś logiki ustalone jest za pomocą tabel, to system taki nazywa się rachunkiem budowanym metodą matrycową.

6. Zauważmy teraz, że krz zbudowany jest na co najmniej dwóch założeniach (zasadach): dwuwartościowości i niesprzeczności. Zasada dwuwartościowości zakłada, że każde zdanie tej teorii jest prawdziwe lub fałszywe, a zasada niesprzeczności przyjmuje, iż żadne zdanie tej teorii nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe.

W £3 odrzuca się pierwsze z tych założeń i przyjmuje się, że zdaniami tej teorii oprócz prawdziwych i fałszywych mogą być także takie zdania, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, a jedynie możliwe (prawdopodobne).

LP oprócz zdań prawdziwych i fałszywych dopuszcza z kolei zdania paradoksalne, tj. takie, które są zarazem prawdziwe i fałszywe. W LP odrzuca się więc zasadę niesprzeczności.

W nrz n'2, n'3, n'4 i n'5 także odrzuca się co najmniej jedną z zasad przyjmowanych w krz: w nrz n'2 — dwuwartościowości, w nrz n'3 — niesprzeczności, a w nrz n'4 i n'5 — obie te zasady. Krz jest więc teorią zdań wyłącznie: prawdziwych (i tylko prawdziwych) oraz fałszywych (i tylko fałszywych). £3 oraz nrz n'2 to teorie zdań wyłącznie: prawdziwych (i tylko prawdziwych), fałszywych (i tylko fałszywych) oraz takich, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. LP oraz nrz n'3 to z kolei teorie zdań wyłącznie: prawdziwych (i tylko prawdziwych), fałszywych (i tylko fałszywych) oraz prawdziwych i fałszywych zarazem. Nrz n'4 to teoria zdań prawdziwych (niekoniecznie tylko prawdziwych), fałszywych (niekoniecznie tylko fałszywych), ani prawdziwych, ani fałszywych oraz prawdziwych i fałszywych zarazem. Nrz n'5 wreszcie to teoria zdań: prawdziwych (niekoniecznie tylko prawdziwych), fałszywych (niekoniecznie tylko fałszywych), ani prawdziwych, ani fałszywych oraz prawdziwych i fałszywych zarazem, a także prawdziwych (i tylko prawdziwych) oraz fałszywych (i tylko fałszywych).

Zdaniami możliwymi (prawdopodobnymi) dopuszczonymi w £3 są np. niektóre zdania dotyczące przyszłości, takie jak *Następnym papieżem zostanie Murzyn*. Zdaniem paradoksalnym dopuszczonym w LP jest np. wyrażenie: (e) *Zdanie (e) jest fałszywe*. Zdaniem paradoksalnym — na gruncie obecnych teorii światła — wydaje się też zdanie: (s) *Światło ma naturę korpuskularną (falową)*. „Operowanie" zatem zdaniami możliwymi lub paradoksalnymi na gruncie krz jest nieuprawnione. Równie nieuprawnione jest „operowanie" zdaniami możliwymi (*resp*. paradoksalnymi) na gruncie np. LP (*resp*. £3). „Operowanie" tymi wszystkimi rodzajami zdań jest dopuszczalne (spośród omówionych teorii) jedynie w nrz n'4 i nrz n'5. A więc „operowanie" na gruncie krz np. zdaniem (e) jest nieuprawnione. To dlatego „operowanie" nim na gruncie krz w znanym rozumowaniu zwanym antynomią kłamcy prowadzi — jak wiadomo — do sprzeczności. Zdanie to wydaje się bowiem albo nieokreślone, albo paradoksalne. Jeśli uznamy, że (e) jest nieokreślone, to „właściwym" dla niego rachunkiem wydaje się nrz n'2. Jeśli zaś przyjmiemy, że (e) jest paradoksalne, to „właściwą" dla niego teorią jest bądź LP, bądź nrz n'3. Jeśli zaś nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, czy (e) jest nieokreślone, czy paradoksalne, to „właściwym" dla niego systemem wydaje się bądź nrz n'4, bądź nrz n'5. Uwagi te odnoszą się, jak się zdaje, także do zdania (s).

7. Wśród wszystkich „wartości" logicznych przyjmowanych przez różne logiki niektóre z nich są tzw. wartościami wyróżnionymi w tych logikach. Mianowicie w krz, £3 i nrz n'2 jest nią prawda (1), w LP takimi „wartościami" są prawda (t) i paradoksalność (½), w nrz n'3, n'4 i n'5 zaś prawda (1) i niejednoznaczność (½).

Tautologią jakiegoś rachunku jest każde i tylko takie wyrażenie języka tego rachunku, które przy dowolnym wartościowaniu przybiera jedną z wartości wyróżnionych w tymże rachunku.

Badając tautologiczność w krz, Beth — jak wiadomo — posługiwał się następującym dwukolumnowym diagramem (tablicą):

1	0

Badając tautologiczność w £3, w LP i w nrz n'3, będziemy się posługiwać następującym trzykolumnowym diagramem:

1	0	½

Badając zaś tautologiczność w nrz n'2, n'4, n'5, posługiwać się będziemy odpowiednio trzy i czterokolumnowymi diagramami:

1	0	-1

1	0	-1	½

Kolejność kolumn w każdej tablicy może być dowolna. Jeśli któraś z kolumn jakiejś tablicy nie będzie wykorzystana, to zwykle będziemy ją pomijać.

W kolumnach pod symbolami wartości logicznych 1, 0, -1, ½ podpisywać będziemy formuły odpowiednio: prawdziwe, fałszywe, nieokreślone, niejednoznaczne (paradoksalne).

8. W poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o tautologiczność jakiegoś wyrażenia w jakiejś logice pomogą nam — oprócz dostosowanej do tego rachunku tablicy — odpowiednie dla każdego z owych systemów reguły rozkładu formuł, które są „wnioskami" z matryc ustalających sens spójników języka tego rachunku. I tak reguły rozkładu formuł języka krz są, jak wiadomo, następujące:

(~1)

1	0
~A	
	A

(~0)

1	0
	~A
A	

(∧1)	1	0
	A ∧ B	
	A	
	B	

(∧0)	1	0
1		A ∧ B
		A
2		B

(∨1)	1	0
1	A ∨ B	
	A	
2	B	

(∨0)	1	0
		A ∨ B
		A
		B

(→1)	1	0
1	A → B	
		A
2	B	

(→0)	1	0
		A → B
	A	B

(≡1)	1	0
	A ≡ B	
	A → B	
	B → A	

(≡0)	1	0
1		A ≡ B
		A → B
2		B → A

Reguły te podał Beth w pracy (Beth 1955). Omówione są one także w (Porębska, Suchoń 1991).

Przyjmuję następujące reguły rozkładu formuł w £3: (~1), (~0), (∧1), (∧0), (∨1), (∨0), (→0), (≡1), (≡0), a ponadto:

(~ ½)	½
	~A
	A

(∧½)	½	1
	A ∧ B	
1	A	
	B	
2	A	B
3	B	A

(∨½)	½	0
1	A ∨ B	
	A	B
2	B	A
3	A	
	B	

(→1) £	1	0	½
1	A → B		
		A	
2	B		
3			A
			B

(→½)	½	0	1
1	A → B		
	A	B	
2	B		A

(≡½)	½	0	1
1	A ≡ B		
	B	A	
2	A	B	
3	A		B
4	B		A

Podam teraz reguły rozkładu formuł w LP. Są one następujące: (~1), (~0), (~½), ($\wedge$1), ($\vee$0), ($\wedge$½), ($\vee$1), ($\vee$0), ($\vee$½), ($\to$1), ($\to$0), ($\equiv$1), ($\equiv$0), a ponadto:

($\to$½)P	½	1	0
1	$A \to B$		
	B	A	
2	A		
	B		
3	A		B

($\equiv$½)P	½
1	$A \equiv B$
	$A \to B$
2	$B \to A$

Podam teraz reguły rozkładu formuł w nrz n'2. Są one następujące: (~1), (~0), ($\wedge$1), ($\vee$1), ($\equiv$1), ($\equiv$0). Ponadto:

(~ -1)	-1
	~A
	A

(T1)	1
	TA
	A

(T0)	0	-1
1	TA	
	A	
2		A

(F1)	1	0
	FA	
		A

(F0)	0	1	-1
1	FA		
		A	
2			A

(N1)	1	-1
	NA	
		A

(N0)	0	1
1	NA	
	A	
2		A

($\wedge$0)2	0	1
1	$A \wedge B$	
	A	
	B	
2	A	B
3	B	A

($\wedge$-1)	-1
1	$A \wedge B$
	A
2	B

($\vee$0)2	0	-1
	$A \vee B$	
1	A	
	B	
2	A	B
3	B	A

($\vee$-1)	-1
	$A \vee B$
	A
	B

($\to$1)2	1	0	-1
1	$A \to B$		
	B		
2		A	
3			A

($\to$0)2	0	1	-1
1	$A \to B$		
	B	A	
2		A	B

W nrz n'3 reguły rozkładu formuł są następujące: (~1), (~0), (~½), (∧1), (∧0), (∧½), (∨1), (∨0), (∨½), (≡1), (≡0), (F1). Nadto:

(→1)3	1	0	½
1	A → B		
		A	
2			B
3	B		

(→0)3	0	1	½
1	A → B		
	B	A	
2	B		A

(T1)3	1	½
1	TA	
	A	
2		A

(T0)3	0	
	TA	
	A	

(F0)3	0	1	½
1	FA		
		A	
2			A

(M1)	1	½
	MA	
		A

(M0)	0	1
1	MA	
		A
2	A	

Reguły rozkładu formuł w nrz n'4 są następujące: (~1), (~0), (~ -1), (~ ½), (T1)3, (T0)2, (F0), (N1), (M1), (∧1), (∨1), (∧ -1), (∨ -1), (∨0)2 , (∨½), (≡1), (≡0). Nadto:

(F1)4	1	0	½
1	FA		
		A	
2			A

(N0)4	0	1	½
1	NA		
	A		
2		A	
3			A

(M0)4	0	1	-1
1	MA		
	A		
2		A	
3			A

(∨½)4	½	-1	0
1	A∨B		
	A	B	
2	B	A	
3	A		B
4	B		A
5	A		
	B		

(∧0)4	0	½	1
1	A∧B		
	A		
	B		
2	A	B	
3	B	A	
4	A		B
5	B		A

(→1)4	1	0	-1	½
1	A→B			
		A		
2			A	
3				B
4	B			

(→0)4	0	1	-1	½
1	A→B			
	B	A		
2		A	B	
3	B			A
4			B	A

Jeśli do reguł rozkładu formuł obowiązujących w nrz n'4 dodamy cztery następujące:

(T'1)

1
T'A
A

(T'0)

	0	½	-1
1	T'A		
	A		
2		A	
3			A

(F'1)

1	0
F'A	
	A

(F'0)

	0	1	½	-1
1	F'A			
				A
2			A	
3		A		

to otrzymamy reguły rozkładu formuł obowiązujące w nrz n'5.

Posługując się odpowiednimi diagramami i regułami rozkładu formuł obowiązującymi w danym rachunku, sprawdzimy teraz, czy pewne formuły należące do każdego z języków każdego z omówionych w tej pracy systemów są czy nie są tautologiami tych logik. Dobór tych samych formuł pozwoli nam pokazać zarówno nieznaczne różnice w owym sprawdzaniu, jak i różne rozstrzygnięcia na gruncie różnych systemów. Posłużymy się trzema następującymi formułami:

(a) $p \vee \sim p$, (b) $\sim(p \wedge \sim p)$, (c) $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$, gdzie litera p jest tzw. zmienną zdaniową reprezentującą dowolne zdania proste.

Punktem wyjścia sprawdzania tautologiczności jakiejś formuły w danym rachunku jest założenie, iż formuła ta nie jest tautologią tego rachunku. Znaczy to, że istnieje wartościowanie, przy którym formuła ta przyjmuje wartość różną od wyróżnionej w tym systemie. Wnioskujemy stąd (choć nie zawsze jednoznacznie), jakie wartości przysługują jej podformułom (wyrażeniom składowym). Jeśli jest kilka ewentualności, rozważamy je wszystkie. Jeśli każda z tych ewentualności kończy się sprzecznością, tzn. przypisaniem pewnej formule różnych wartości logicznych, wnioskujemy stąd, że dla badanej formuły nie istnieje wartościowanie potwierdzające nasze założenie. A to znaczy, że badana formuła jest tautologią owego rachunku. Jeśli natomiast przynajmniej jedna z ewentualności nie kończy się sprzecznością, to nasze przypuszczenie jest słuszne, a więc rozpatrywana formuła nie jest tautologią tego rachunku.

9. Sprawdzanie tautologiczności formuł (a), (b) i (c) na gruncie krz pominiemy (wszystkie one są tautologiami krz). Przechodzimy od razu do sprawdzenia, czy wyrażenia te są tautologiami £3.

Zajmijmy się najpierw pierwszym z nich. Załóżmy, że nie jest ono tautologią £3. Zatem (a) jest bądź fałszywe (0), bądź możliwe (½). Rozważmy najpierw pierwszy przypadek. Wyrażenie (a) podpisujemy w kolumnie pod 0 i stosujemy reguły rozkładu formuł obowiązujące w £3. To, którą regułę stosujemy, zaznaczamy po prawej stronie każdej podformuły, która została na jej mocy uzyskana i — w zależności od wartości, którą przyjmuje przy danym założeniu — podpisana w odpowiedniej kolumnie.

1.

0	1	
p∨~p		
p		(∨0)
~p		(∨0)
	p	(~0)

Uzyskaliśmy sprzeczność (zaznaczoną strzałką), która jeszcze niczego nie przesądza, trzeba bowiem jeszcze rozważyć drugi przypadek. Wyrażenie (a) podpisujemy teraz w kolumnie pod ½ i stosujemy reguły rozkładu formuł przyjęte w Ł3.

2.

	½	0	1	
1	p∨~p			
	p	~p		(∨½)
			p	(~0)
2	~p	p		(∨½)
	p			(~½)
3	p			(∨½)
	~p			(∨½)
	p			(~½)

W ostatnim przypadku nie uzyskaliśmy sprzeczności. Wyrażenie (a) nie jest więc tautologią Ł3. Diagram ten ujawnia ponadto wartościowanie czyniące zadość naszemu założeniu. Mianowicie wyrażenie to przyjmuje wartość ½ (niewyróżnioną w tym rachunku), gdy za zmienną p wstawimy jakieś zdanie możliwe (½).

Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (b) jest tautologią Ł3. Załóżmy, że nie. Dalej postępujemy jak poprzednio.

1.

0	1	
~(p∧~p)		
	p∧~p	(~0)
	p	(∧1)
	~p	(∧1)
p		(~1)

Sprzeczność ta niczego jeszcze nie przesądza. Trzeba bowiem rozważyć przypadek drugi. Mianowicie:

2.

	½	1	0	
	~(p∧~p)			
	p∧~p			(~½)
1	p	~p		(∧½)
			p	(~1)
2	~p	p		(∧½)
	p			(~½)
3	p			(∧½)
	~p			(∧½)
	p			(~½)

W przypadku 3 nie natrafiliśmy na sprzeczność. Wyrażenie (b) nie jest więc tautologią £3. Z tego ostatniego diagramu wynika, że istnieje wartościowanie potwierdzające nasze przypuszczenie. Mianowicie, gdy za zmienną p wstawimy jakieś zdanie możliwe (½), wyrażenie (b) przyjmuje także wartość ½ (niewyróżnioną w tym rachunku).

Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (c) jest tautologią £3. Załóżmy, że nie. Znaczy to, że wyrażenie to przyjmuje wartość 0 lub ½. Zaczynamy od pierwszego przypadku. Postępujemy analogicznie jak poprzednio.

1.

	0	1	½	
	(p→~p)→~p			
	~p	p→~p		(→0)
		p		(~0)
1	p			(→1) £
2		~p		(→1) £
	p			(~1)
3			p	(→1) £
			~p	(→1) £

W każdym przypadku, który należało rozważyć, uzyskaliśmy sprzeczności. Niczego to jeszcze nie przesądza, musimy bowiem sprawdzić, czy wyrażenie to może przybierać wartość ½:

2.

	½	0	1	
1	(p→~p)→~p			
	p→p	~p		(→½)
a			p	(~0)
	P	~p		(→½)
b	~p		p	(→½)
	p			(~½)
2	~p		p→~p	(→½)
	p			(~½)
a		p		(→1) £
b			~p	(→1) £
		p		(~1)
c	p			(→1) £
	~p			(→1) £
	P			(~½)

We wszystkich przypadkach — z wyjątkiem 2c — uzyskaliśmy sprzeczności. Zatem wyrażenie to nie jest tautologią £3. Z diagramu tego wynika, że istnieje wartościowanie potwierdzające nasze przypuszczenie. Wyrażenie to przyjmuje wartość różną od wartości wyróżnionej; wystarczy za zmienną p wstawić jakieś zdanie możliwe.

Wydaje się, że podana przez nas metoda sprawdzania tautologiczności wyrażeń w £3 — mimo iż nie zawsze prosta — jest i tak o wiele prostsza i bardziej intuicyjna niż metoda opierająca się na oryginalnych dwukolumnowych tablicach Betha oraz dość skomplikowanych regułach konstrukcji diagramów, zaprezentowana w (Porębska, Suchoń 1991).

10. Sprawdzimy teraz, czy wyrażenia te są tautologiami LP. Sprawdźmy najpierw, czy wyrażenie (a) jest tautologią LP. Załóżmy, że nie jest; zatem (a) jest fałszywe. Podpisujemy je więc w kolumnie pod 0 i stosujemy reguły rozkładu formuł przyjęte w LP.

0	1	
p∨~p		
p		(∨0)
~p		(∧0)
	p	(~0)

Zaznaczona strzałką sprzeczność świadczy o tym, że wyrażenie to jest tautologią LP. Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (b) jest tautologią LP. Postępujemy z nim jak poprzednio.

0	1	
~(p.∧~p)		
	p∧~p	(~0)
	p	(∧1)
	~p	(∧1)
p		(~1)

Zaznaczona strzałką sprzeczność świadczy o tym, że wyrażenie to jest tautologią LP.

Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (c) jest tautologią LP. Postępujemy z nim jak poprzednio.

	0	1	
	(p→~p)→~p		
	~p	p→~p	(→0)
		p	(~0)
1	p		(→1)
2		~p	(→1)
	p		(~1)

W obu przypadkach, które należało rozważyć, otrzymaliśmy sprzeczności. Zatem wyrażenie (c) jest tautologią LP.

11. Sprawdźmy teraz, czy wyrażenia te są tautologiami nrz n'2. Zaczynamy od pierwszego z nich. Załóżmy, że wyrażenie to nie jest tautologią nrz n'2. Musimy rozważyć dwa przypadki: 1. wyrażenie (a) jest fałszywe, 2. (a) jest nieokreślone.

1.

	0	-1	1	
	p∨~p			
1	p			(∨0)2
	~p			(∨0)2
			p	(~0)
2	p	~p		(∨0)2
		p		(~ -1)
3	~p	p.		(∨0)2
			p	(~0)

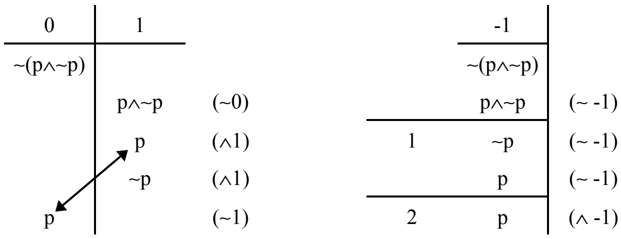
2.

-1	
p∨~p	
p	(∨ -1)
~p	(∨ -1)
p	(~ -1)

W przypadku 1. za każdym razem otrzymaliśmy sprzeczności, ale w przypadku 2. takiej sprzeczności nie otrzymaliśmy. Badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n'2, ponieważ istnieje wartościowanie, przy którym przyjmuje wartość różną od wyróżnionej w tym rachunku. Dzieje się tak, gdy za zmienną p wstawimy jakieś zdanie nieokreślone (pokazuje to diagram 2.).

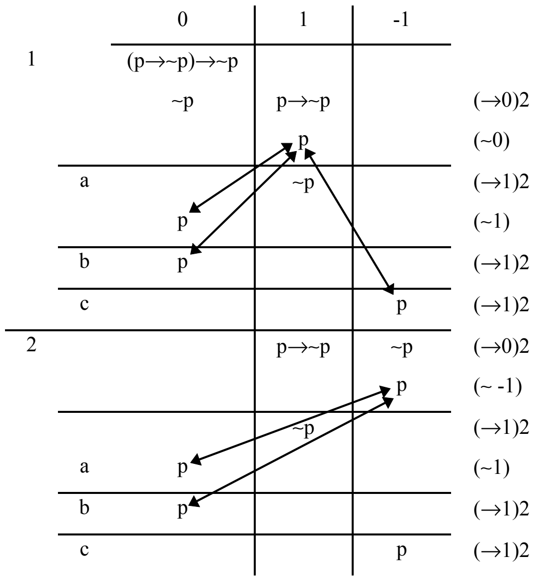
Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (b) jest tautologią nrz n' 2. Załóżmy, że nie. Znowu musimy rozważyć dwa przypadki: 1. gdy wyrażenie to jest fałszywe, 2. gdy jest ono nieokreślone.

1. 2.



W przypadku 2. nie uzyskaliśmy sprzeczności, zatem badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n'2. Diagram ten wskazuje ponadto, przy jakim wartościowaniu formuła ta nie przyjmuje wartości wyróżnionej. Dzieje się tak, gdy za zmienną p podstawimy dowolne zdanie nieokreślone.

Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (c) jest tautologią nrz n'2. Załóżmy, że nie. Ponieważ nie istnieje wartościowanie w tym rachunku, przy którym jakakolwiek implikacja przyjmuje wartość -1, wystarczy jeśli sprawdzimy, czy może być fałszywa. Załóżmy, że tak.



W przypadku 2c. nie otrzymaliśmy sprzeczności. Znaczy to, że badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n'2. Diagram ten ujawnia też, kiedy badane wyrażenie jest fałszywe. Dzieje się tak, gdy za zmienną p wstawimy jakieś zdanie nieokreślone.

12. Sprawdźmy teraz, czy wyrażenia te są tautologiami nrz n'3. Zacznijmy od (a) i załóżmy, że nie jest tautologią. Ponieważ prawda (1) i niejednoznaczność (½) są wartościami wyróżnionymi w nrz n'3, przy powyższym założeniu jest ono fałszywe. Sprawdźmy, czy istnieje wartościowanie je falsyfikujące.

0	1	
$p \vee {\sim}p$		
p		$(\vee 0)$
${\sim}p$		$(\vee 0)$
	p	$({\sim}0)$

Zaznaczona strzałką sprzeczność świadczy o tym, że nie istnieje wartościowanie falsyfikujące ową formułę. Jest więc ona tautologią nrz n' 3.

Sprawdźmy teraz, czy drugie z tych wyrażeń jest tautologią nrz n'3. Załóżmy, że nie. Wystarczy więc sprawdzić, czy istnieje wartościowanie je falsyfikujące.

0	1	
${\sim}(p \wedge {\sim}p)$		
	$p \wedge {\sim}p$	$({\sim}0)$
	p	$(\wedge 1)$
	${\sim}p$	$(\wedge 1)$
p		$({\sim}1)$

Zaznaczona strzałką sprzeczność świadczy o tym, że badana formuła jest tautologią nrz n'3.

Sprawdźmy teraz, czy trzecie z tych wyrażeń jest tautologią nrz n'3. Załóżmy, że nie jest. Wystarczy sprawdzić, czy istnieje wartościowanie falsyfikujące je. Załóżmy, że istnieje.

		0	½	-1	
1		(p→~p)→~p			
		~p	p→~p		(→0)3
2	a	~p		p→~p	(→0)3
				p	(~0)
		p			(→1)3
	b		~p		(→1)3
			p		(~½)
	c		p	~p	(→1)3
		p			(~1)

W przypadku 1., jako że nie istnieje wartościowanie w tym rachunku, przy którym jakakolwiek implikacja przybiera wartość ½, natrafiamy na sprzeczność. W każdym z pozostałych przypadków także mamy sprzeczności. Zatem wyrażenie to jest tautologią nrz n'3.

13. Sprawdźmy w końcu, czy wyrażenia te są tautologiami nrz n'4. Zajmijmy się najpierw pierwszym z nich. Załóżmy, że (a) nie jest tautologią nrz n'4. Znaczy to, że może przybierać jedną z dwu wartości niewyróżnionych w tym rachunku: 0 lub -1. Rozważmy obie możliwości.

1.

	0	-1	1	
	p∨~p			
1	p			(∨0)2
	~p			(∨0)2
		p	p	(~0)
2	p	~p		(∨0)2
		p		(~ -1)
3	~p	p		(∨0)2
			p	(~0)

2.

-1	
p∨~p	
p	(∨ -1)
~p	(∨ -1)
p	(~ -1)

W przypadku 1. natrafialiśmy za każdym razem na sprzeczność, ale w 2. jej nie ma. Znaczy to, że badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n'4. Łatwo też zauważyć, że (a) przyjmuje wartość -1, gdy za zmienną p wstawimy dowolne zdanie nieokreślone.

Sprawdźmy teraz, czy (b) jest tautologią nrz n'4. Załóżmy, że nie. Znaczy to, że istnieje wartościowanie, przy którym (b) jest bądź fałszywe, bądź nieokreślone. Sprawdźmy obie możliwości.

1.

0	1	
~(p∧~p)		
	p∧~p	(~0)
	p	(∧1)
	~p	(∧1)
p		(~1)

2.

	-1	
	~(p∧~p)	
	p∧~p	(~ -1)
1	p	(∧ -1)
2	~p	(∧ -1)
	p	(~ -1)

W przypadku 1. otrzymaliśmy sprzeczność, ale w 2. jej nie mamy. Znaczy to, że badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n' 4. Wyrażenie (b) jest nieokreślone, gdy za zmienną p wstawimy dowolne zdanie nieokreślone.

Sprawdźmy teraz, czy wyrażenie (c) jest tautologią nrz n'4. Załóżmy, że nie. Z uwagi na to, że nie istnieje wartościowanie w tym rachunku, przy którym jakakolwiek implikacja przybiera wartość -1, wystarczy sprawdzić, czy wyrażenie (c) jest fałszywe. Sprawdźmy to.

		0	1	-1	½	
		(p→~p)→~p				
1		~p	p→~p			(→0)4
			p			(~0)
	a			p		(→1)4
	b	p				(→1)4
	c		~p			(→1)4
		p				(~1)
	d				~p	(→1)4
					p	(~½)
2.	a		p→~p	~p		(→0)4
				p		(~ -1)
				p		(→1)4
	b	p				(→1)4
	c		~p			(→1)4
		p				(~1)
	d				~p	(→1)4
					p	(~½)

W przypadku 2a. nie ma sprzeczności. Wystarczy to, by stwierdzić, że badane wyrażenie nie jest tautologią nrz n' 4, mimo iż we wszystkich pozostałych przypadkach, także i tych, których nie rozpatrywaliśmy, natrafiamy na sprzeczności. Z diagramu tego daje się odczytać, kiedy badane wyrażenie jest fałszywe. Dzieje się tak, gdy za zmienną p wstawimy dowolne zdanie nieokreślone.

Oczywiście, każda tautologia nrz n'4 jest tautologią nrz n'5. Łatwo sprawdzić, że istnieją wyrażenia zapisane w języku nrz n'5 będące tautologiami nrz n'5, a niebędące tautologiami nrz n'4, np. następujące: $T'p \vee F'p \vee Np \vee Mp$, $T'p \equiv Tp \wedge \sim Fp$, $F'p \equiv Fp \wedge \sim Tp$. Te ostatnie wyrażenia nie są tautologiami nrz n'4 (ani żadnego innego omówionego tu rachunku) z tego względu, że nie są nawet formułami języka nrz n'4 (ani żadnego innego języka omówionego tu systemu).

14. Podsumujmy.

1. Wyrażenie (a) $p \vee \sim p$ jest tautologią: krz, LP, nrz n'3, a nie jest tautologią £3, nrz n'2, nrz n'4.

2. Wyrażenie (b) $\sim(p \wedge \sim p)$ jest tautologią: krz, LP, nrz n'3, a nie jest — £3, nrz n'2 , nrz n'4.

3. Wyrażenie (c) $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$ jest tautologią krz, LP, nrz n'3, a nie jest — £3, nrz n'2, nrz n'4.

Oczywiście, różnice w wynikach są konsekwencjami: 1. nieco innego rozumienia w tych rachunkach niektórych spójników, 2. przyjęcia (względnie odrzucenia) w tych logikach zasad dwuwartościowości i niesprzeczności oraz 3. uznania za wartości wyróżnione w pewnych logikach jednej tylko wartości (prawdy), a w innych — oprócz prawdy także paradoksalności (w LP) lub niejednoznaczności (w nrz n'3, n'4, n'5).

BIBLIOGRAFIA

Beth E. (1955), *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Amsterdam: Noord-Hollandsche.

Łukasiewicz J. (1920), *O logice trójwartościowej*, „Ruch Filozoficzny” 5, 170-171.

Poczobut R. (2000), *Spór o zasadę niesprzeczności*, Lublin: Towarzystwo Naukowe KUL.

Porębska M., Suchoń W. (1991), *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Priest G. (1979), *Logic of Paradox*, „The Journal of Philosophical Logic” 8(1), 219-241.

Żabski E. (2001), *Logiki nihilistyczne, czyli teorie prawd „powierzchownych” i „głębokich”*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.