Filozofia Nauki
Rok XXI, 2013, Nr 1(81)

Ewa Piotrowska

Obraz i wizja matematyki Davida Hilberta

Wśród wielu matematyków i filozofów matematyki upowszechnione jest przekonanie, wyrastające wręcz na stereotyp, że matematyk wszechczasów — David Hilbert — twórca formalizmu w matematyce, traktował tę naukę jako wysoce wyidealizowaną, magicznie doskonałą i w swej istocie abstrakcyjną, jako zwykłą „grę znaków". W rzeczywistości to uproszczone i rutynowe określenie matematyki wypływa m.in. z tego, że pogłębiona rekonstrukcja poglądów Hilberta na sprawy filozoficzne i ogólnopoznawcze matematyki utrudniona jest brakiem odpowiednich wypowiedzi oraz analiz uczonego z Getyngi. Składająca się z kilku tomów twórczość Hilberta dotyczy niemal wyłącznie różnych dziedzin matematyki.[1]

Roman Murawski słusznie tymczasem zauważa, że dla Hilberta matematyka nie była tylko systemem formalnym bez zawartości treściowej, a sama formalizacja była natomiast „zabiegiem metodycznym, narzędziem mającym służyć realizacji programu ugruntowania matematyki klasycznej".[2]

Hilbert był jednym z ostatnich „encyklopedystów" w dziedzinie matematyki i częściowo nauk przyrodniczych, a zwłaszcza tych dyscyplin, które były powiązane z matematyką (np. fizyka matematyczna). Uczonego z Getyngi stać było na przedstawienie i uzasadnienie obrazu matematyki zintegrowanej oraz uniwersalnej. Przeciwstawiał się, być może świadomie, postępującej na przełomie XIX i XX wieku swoistej atomizacji matematyki. Rozporządzając ogromną wiedzą, stworzył, zgodnie z określeniem swego ucznia Richarda Couranta, matematykę „samą dla siebie" i dla-

---

[1] Próba rekonstrukcji poglądów Davida Hilberta z zakresu filozofii matematyki: E. Piotrowska, *Filozoficzne podstawy formalizmu matematycznego. Studium nad poglądami Davida Hilberta*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1990.

[2] Por. R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne", t. XXX (1993), s. 51-72, s. 57 (cytat).

tego ukształtował oryginalny obraz i wizję tego, co można by określić „kulturą matematyczną". Dla bliższego zatem scharakteryzowania takich szerokich wymagań interpretacyjnych matematyki hilbertowskiej, chociażby w ramach ogólnych, niezbędne jest przedstawienie dokonań matematyka jako człowieka, a nie tylko jego osiągnięć już ściśle matematycznych.

Biograf życia i twórczości Hilberta — Constantine Reid — podkreślała, że było to dzieło człowieka „szczupłego, żywego, niezależnego i oryginalnego z namiętnym poszukiwaniem prawdy".[3] Hilbert tworzył nie tylko epokowe dzieła naukowe, lecz był także wielką osobowością i zarazem organizatorem życia naukowego Niemiec w dziedzinie matematyki i nauk pokrewnych. Akademicki ośrodek w Getyndze był najbardziej aktywny w badaniach matematycznych na niemieckim obszarze etniczno-językowym. Poza Hilbertem szczególnie Felix Klein zabiegał o to, by Getynga zwana „mekką matematyki" była również ośrodkiem rozwoju fizyki matematycznej oraz innych nauk przyrodniczych.[4]

Hilbert uprawiał swoistą „kulturę matematyczną", w jego przekonaniu bowiem „cała nasza kultura współczesna, o ile polega na przenikaniu i usłużności przyrodzie swe podstawy znajduje w matematyce".[5] Matematyka zatem w powiązaniu z potrzebami ludzkimi oraz więzami ze środowiskiem przyrodniczym tworzy wspomniany kompleks kulturowy. Równocześnie Hilbert jako optymista wykluczał z nauki (także z matematyki i przyrodoznawstwa) zasadę niepoznawalności (ignorabimus). Z tej perspektywy obraz matematyki w jej aspekcie kulturowym zachęcał do dynamicznej wizji rozwoju poszczególnych dziedzin tej nauki.[6]

Matematyka wykazywała też, w przekonaniu uczonego getyńskiego, związek z określoną kulturą narodową, ale zarazem miała w swej istocie charakter ponadkulturowy, gdyż „dla matematyka cały świat kulturalny przedstawia się jako jeden kraj". Hilbert dostrzegał w poznaniu matematycznym ścisłe relacje zachodzące między tym, co kulturowe i narodowe. Nie wykluczał możliwości istnienia kultury narodowej, ale z drugiej strony, chociaż czuł się Niemcem, ganił wszelkie próby sztucznego „unarodowienia" matematyki. Tymczasem z inspiracji intelektualistów francuskich (także matematyków) w latach 20. XX wieku postanowiono uniemożliwić, wręcz bojkotować udział uczonych niemieckich (także matematyków) na konferencjach i kongresach międzynarodowych. Niemców obarczano bowiem winą za rozpoczęcie I wojny światowej.

[3] C. Reid, *Hilbert*, Springer, Berlin–New York 1970, s. 29.

[4] Por. C. Reid, *Richard Courant (1888-1971). Der Mathematiker als Zeltgenosse*, Springer, Berlin–Heidelberg 1979, s. 99, 103.

[5] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*: Przedruk artykułu: D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, Springer-Vorlag, Berlin 1935, s. 962 i n. Artykuł stanowi tekst wystąpienia Hilberta na Zgromadzeniu Towarzystwa Niemieckich Przyrodników i Lekarzy w Królewcu we wrześniu 1930 roku (Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Königsberg i. Pregel).

[6] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 963.

W 1928 roku doszło do poważnego sporu wewnętrznego pomiędzy matematykami niemieckimi co do ewentualnego udziału w Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii; ich udział oznaczał stopniowe wychodzenie z izolacji międzynarodowej. Środowisko matematyków getyńskich opowiadało się za uczestnictwem w tym kongresie, tymczasem matematycy berlińscy (np. Ludwig Bieberbach) byli temu przeciwni. Hilbert nawoływał do uczestnictwa, każda nauka bowiem (także matematyka) może i musi funkcjonować ponad podziałami narodowymi, a kontakty międzynarodowe są dla jej rozwoju niezbędne. Podkreślał, że matematyk może być Niemcem lub nie-Niemcem, ale matematyka jest ponadnarodowa z „charakterem humanistycznym" i właściwą jej „niezależnością ludzkiego ducha", zarazem nauka tak rozumiana inspiruje do „gotowości porozumienia" i „ludzkiej woli pokoju".

W kongresie bolońskim uczestniczyło 67 matematyków niemieckich, przewodniczył im Hilbert, biorąc udział naukowy i organizacyjny w pracach zjazdu, będąc zresztą jednym z głównych referentów. Tym samym jednoznacznie potępił skrajnie nacjonalistyczny światopogląd matematyków. Żył w trudnych czasach szalejącej ideologii nacjonalistycznej. W 1930 roku, w okresie napięć politycznych oraz ideologicznych (trendy autorytarne wśród rwących się do władzy hitlerowców), przeszedł na emeryturę. Ten schorowany uczony przez 10 lat żył (lata 1933-1943) w koszmarze nieprawości dyktatury nazistowskiej. Nie poszedł na żadne formy współpracy z nazistami, traktując siebie jako uczonego-matematyka, a nie polityka czy ideologa.

Przymusowa emigracja jego przyjaciół i kolegów z racji ich pochodzenia żydowskiego wywarła na wielkim matematyku przygnębiające wrażenie. W latach 1933-1934 narodowi socjaliści pozostawili Hilberta w spokoju, chociaż wiedzieli o jego dość liberalnym światopoglądzie i związkach ze środowiskiem matematyków pochodzenia żydowskiego. W semestrze zimowym 1933-1934 prowadził po raz ostatni wykłady z podstaw geometrii, władze hitlerowskie zmusiły go bowiem do zerwania jakichkolwiek związków ze środowiskiem akademickim. Naziści kontrolowali działalność uczonego, zwłaszcza natury politycznej, społecznej, a nawet towarzyskiej.[7]

W przekonaniu Hilberta każda ideologia ekstremalna wytwarza i kształtuje nacjonalizm, a wszelkie ograniczenia „zwłaszcza charakteru narodowego przeczą duchowi matematyki". W okresie III Rzeszy tymczasem część matematyków oddanych nowemu reżymowi, a wśród nich znawca analizy matematycznej — Ludwig Bieberbach — głosiła, że matematyka jest rasowa w swej istocie i charakterze poznawczym. W ich retoryce rasistowskiej matematycy żydowskiego pochodzenia (czyli

---

[7] Z czterech profesorów matematyki getyńskiej aż trzech zmuszono do emigracji z racji pochodzenia. Podobno zrozpaczony Hilbert w rozmowie prywatnej oświadczył: Matematyka w Getyndze? Nie istnieje już (Mathematik in Götingen? Gibt's nicht mehr). W hitlerowskich instytucjach rasistowskich z zakresu heraldyki (Ahnenerbe) skrzętnie badano jego drzewo genealogiczne. Tajni agenci niepokoili Hilberta nawet w prywatnym mieszkaniu, którego nie opuszczał, będąc w stanie psychicznego wyczerpania. Kontrolowano przede wszystkim jego kontakty, a zwłaszcza korespondencję z emigrantami–matematykami, szczególnie z terenu Stanów Zjednoczonych (por. Reid. *Richard Courant*, op. cit., s. 187-188).

tzw. niearyjscy) mieli uprawiać wyłącznie matematykę abstrakcyjną, zmistyfikowaną, pozbawioną związków z potrzebami rzeczywistymi człowieka. Natomiast tzw. matematycy aryjscy rozwijali i kształtowali te dziedziny matematyki (zwłaszcza geometrię), w których przeważa poglądowość i praktycyzm, a zatem uprawiali matematykę stosowaną (angewandte Mathematik).

Matematyka dla Hilberta miała charakter uniwersalny, a to oznaczało, że nie ma podziału na odrębne matematyki różnych narodów, a bardziej jeszcze ras. Uczony ten jednoznacznie głosił, iż „tylko absolutnie nie rozumiejąc naszej nauki można tworzyć różnice między ludźmi i rasami, a przyczyny dzięki którym to robimy są skrajnie marne. Matematyka nie zna ras”.[8]

Już w początkach XX wieku, a w szczególności po zakończeniu I wojny światowej Hilbert był zwolennikiem wprowadzenia nauk okołomatematycznych, a zwłaszcza filozofii matematyki na uniwersytetach niemieckich. W tej kwestii zyskał szczególne poparcie swego ucznia, a mianowicie Hermanna Weyla. W listopadzie 1915 roku Einstein ogłosił ogólną teorię względności, która wyraźnie pokazywała zachodzące wielorakie współzależności między rozwojem fizyki, matematyki i filozofii. Einstein uprzytomnił znaczenie metody badawczej wspólnej w naukach matematycznych, fizycznych i filozofii nauki. W tym samym czasie rangą i pozycją filozofii zajął się także kolejny uczeń Hilberta — Richard Courant. W lipcu 1918 roku w liście do Hilberta śmiało zaproponował, aby na uniwersytetach uprawiać filozofię, zwłaszcza dla potrzeb matematyki oraz nauk przyrodniczych, co powinno znaleźć powszechne zrozumienie środowisk akademickich.[9]

Nawiązując do tradycji akademickich Niemiec XIX wieku i pierwszej połowy XX wieku, Hilbert nie wykluczał przydatności filozofii w poznaniu matematycznym. Filozofia obowiązywała bowiem w promocjach doktorskich dla matematyków i była częścią tzw. ogłady humanistycznej, powszechnie rozumianego wykształcenia ogólnego (tzw. Bildung).

Uczony zwrócił nadto uwagę, że kontrowersyjne problemy badawcze w matematyce wymagają ciągłych dyskusji. Różnice wiekowe, stanowospołeczne i poli-

---

[8] Por. tekst wykładu Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku. Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, „Archiv der Mathematik und Physik”, 1 (1901), s. 44-63, 213-237. Przedruk: D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Springer-Verlag, Berlin 1935. Korzystałam z tekstu w internecie (online): *Mathematische Probleme: Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris*, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html. W kwietniu 1933 roku Hilbert oświadczył swojemu lekarzowi: “Es wird nicht lange dauern, bis das deutsche Volk Hitler durchschaut hat und dann wird man seinen Kopf ins Klosett Stecken” (por. C. Reid, *Richard Courant*, s. 165).

[9] Por. C. Reid, *Richard Courant*, s. 106. Courant we wspomnianym liście do Hilberta zaznaczał, że „olbrzymie dzieło” Einsteina dotyczy nie tylko matematyki i fizyki, a jego „najgłębsze znaczenie być może leży wprost w dziedzinie filozoficznej”. Courant uważał, że katedry z filozofii powinny stać bliżej myślenia matematyczno-przyrodniczego i koniecznie trzeba zlikwidować nieprzyjazne relacje „pomiędzy matematyką i filozofią” (tamże).

tyczne dla niego nie istniały i wyznawał zasadę: „powiedz to, co masz do powiedzenia, i jest nieważne kim jesteś”. Hilberta nie tyle wykłady (był zresztą kiepskim wykładowcą!), ile dyskusje matematyczne interesowały najbardziej. Wielość problemów matematycznych przewijała się w jego dyskusjach z asystentami i współpracownikami, szczególnie na spacerach w górzystych okolicach Getyngi. Faktycznie na przełomie lat 20. i 30. XX wieku matematycy w Getyndze tworzyli określoną wspólnotę, a w dyskusjach Hilbert ukazywał młodym adeptom nauki nowe dziedziny i pola działania. Reid informuje, że nawet sprawy polityczne były poruszane na tych „podmiejskich wycieczkach”. Matematyka stanowiła zaś część szeroko rozumianego światopoglądu uczonego.

Hilbert zwracał zarazem uwagę na to, iż nasze myślenie wypływa z jedności i próbuje tworzyć ową jedność naukowo-badawczą. Przypominał o jedności materii i jedności praw przyrody i że w kosmosie mamy potwierdzenie mniej lub więcej wiarygodne owej jedności. Zauważał wielorakie związki nauk matematycznych z „całkowitym fizykalno-astronomicznym kompleksem”, którego nie należy wyłącznie rozumieć w ramach mechaniki klasycznej.[10]

W świecie ruchu bezustannego i często tajemniczych zjawisk kosmicznych rządzą prawa fizykalne, a bynajmniej nie te przypadkowe i umowne. System praw natury obejmuje zatem „rzeczywistość w całości”, a myślenie przyrodnicze i matematyczne nie jest wyłącznie oparte o pojęciową dedukcję, na co szczególnie zwracał uwagę już Hegel. Hilbert w swoim wykładzie z 1930 roku na zjeździe niemieckich przyrodników w Królewcu potwierdzał, jednoznacznie przeciwstawiając się Heglowi, iż geneza praw rządzących światem (Weltgesetze) wypływa wyłącznie z doświadczenia (Erfahrung).[11] Jak sądził, z doświadczenia konstruowane są pojęcia fizykalne, a sama idea atomu była zarówno w czasach Demokryta, jak i współcześnie jest dowodzona przez fizykę eksperymentalną, a zatem „duch spekulacyjnego punktu widzenia musi być wyeliminowany”. Z eksperymentu wypływa również „myśl ogólnej teorii względności Einsteina”. Nie tylko przyroda, lecz także matematyka stanowi pewną całość i jedność, zarazem organiczny charakter matematyki „podlega ciągłemu rozwojowi, ulega pogłębieniu i staje się coraz bardziej jasny”.[12]

Odwołując się do poglądów matematyka norweskiego Sophusa Lie, a bardziej jeszcze Felixa Kleina opowiadał się za jednolitą konstrukcją dyscyplin matematycznych. Obawiał się następstw podziału matematyki na oddzielne dyscypliny badawcze, „których przedstawiciele mogą się z ledwością porozumieć nawzajem”. Hilbert przyznawał, że im matematyka w swych specjalnościach ulega pogłębionej atomizacji, tym więzi między matematykami są coraz słabsze lecz — jak podkreślał — w to

[10] D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 961.

[11] Tamże.

[12] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*. Szczegółowo o rozwoju programu Hilberta por. R. Murawski, *Rozwój programu Hilberta* (op. cit.). Także: W. Więsław (red.), *Problemy Hilberta w pięćdziesięciolecie śmierci ich twórcy*, Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa 1997.

„nie chcę wierzyć i nie życzę sobie tego". Konkludował zarazem, iż „nauka matematyczna w moim zrozumieniu jest niepodzielną całością, organizmem, którego żywotność jest warunkowana więzią jego części". Matematyka przypominała zatem Hilbertowi organizm, w którym poszczególne części są wzajemnie powiązane. Zarazem jasna była dla niego „zbieżność mechanizmów logicznych, wzajemny związek idei w matematyce jako całości i wielorakie analogie między jej różnymi dziedzinami". Dostrzegł nawet prawidłowość, że „im bardziej rozwija się teoria matematyczna, tym bardziej harmonijnie i jednorodnie rozwija się konstrukcja i między odległymi od siebie dziedzinami odkrywają się niewątpliwe więzi".[13]

Mówiąc o problemach matematycznych, Hilbert potwierdzał jednoznacznie, że „pierwsze i najstarsze problemy każdej dziedziny matematycznej powstały z doświadczenia i stawiane są ze świata zjawisk zewnętrznych". Zauważał przy tym, że reguły rachunku liczb całkowitych zostały odkryte na najwcześniejszym etapie rozwoju kulturalnego ludzkości i dziecko także poznaje stosowanie tych reguł metodą empiryczną.[14]

W zrozumieniu Hilberta bardziej już filozoficznym, rozwój dyscyplin matematycznych jest rozwojem samodzielności ducha ludzkiego, który stawia matematykowi nowe i twórcze zadania. Na wyższych etapach rozwoju matematyki wspomniany rozwój zachodzi bowiem już bez wpływu świata zewnętrznego, a jedynie dzięki „logicznej konfrontacji, uogólnienia, specjalizowania, udanego podziału oraz grupowania pojęć, a matematyk wstępuje na plan pierwszy jako reżyser zadań". Przy wykorzystaniu wspomnianej metody coraz bardziej abstrakcyjnej i niezależnej od wpływów zewnętrznych — zdaniem Hilberta — powstała kwestia liczb prostych oraz innych zagadnień arytmetyki, teoria Galois, teoria niezmienników algebraicznych, teoria abelowych i automorficznych funkcji oraz niemal wszystkie problemy współczesnej teorii liczb i teorii funkcji.[15]

Z powyższych refleksji uczonego getyńskiego nietrudno wnioskować, że:

a) Matematyka w swej istocie ma charakter rozwojowy, pozostając w relacji do zmieniającego się rozumu ludzkiego,

b) Na wyższych etapach już nie wyłącznie doświadczenie kształtuje świadomość matematyka, a na rozwój wysoce abstrakcyjnych dziedzin i problemów matematycznych wpływ ma m.in. logiczna konfrontacja, uogólnienie, specjalizacja, względnie udany podział i grupowanie pojęć.

Poglądy na istotę poznania matematycznego kształtował Hilbert pod wpływem Kanta, znając i wysoko ceniąc jego zainteresowania matematyką i naukami przyrodniczymi. Pod jego też wpływem istotę matematyki Hilbert pojmował w kategoriach epistemologicznych, tymczasem kwestie ontologiczne interesowały marginalnie zarówno Kanta, jak i Hilberta.

---

[13] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme* (online).

[14] Tamże.

[15] Tamże.

Wychodząc z założeń teoriopoznawczych, Hilbert odrzucał przekonanie, że matematycy są „płytkimi realistami", względnie „małostkowymi utylitarystami". Matematyka — jego zdaniem — powinna służyć nie tylko celom czysto praktycznym, lecz także „otwierać wrota" wiedzy bezinteresownej jako nauce „samej dla siebie".[16] Hilbert podkreślał bowiem, że poza doświadczeniem i logiką dla zrozumienia praw rządzących światem w naszym poznaniu matematycznym i przyrodniczym ważne jest również „aprioryczne zrozumienie".[17] Według getyńskiego matematyka, najbardziej ogólny i najbardziej wartościowy w teorii poznania Kanta jest problem filozoficzny sprowadzający się do przyjęcia intuicyjnego stanowiska *a priori* jako możliwości badania każdego poznania pojęciowego i przy tym każdego doświadczenia.[18] Aprioryczność — zdaniem Hilberta — to stanowisko zasadnicze, względnie wyrażenie potrzeby przyjmowania pewnych nieodzownych warunków wstępnych myślenia i doświadczenia.[19] Hilbert dostrzegał równocześnie, że granice między tym, co a priori a tym, co niezbędne dla zaistnienia doświadczenia inaczej należy wyznaczyć, niż czynił to Kant, ponieważ ten ostatni wydatnie przecenił zakres (Umfang) tego, co aprioryczne.[20]

Getyński matematyk zauważał też, że od czasów Kanta interpretacja czasu i przestrzeni znajduje zastosowanie w matematycznych przedstawieniach liczby, szeregu oraz wielkości. Równocześnie przedstawienie czasu i przestrzeni zarówno w geometrii, jak i arytmetyce poprzedza wiedzę przyrodniczą. Hilbert przyznawał, że geometria jest niczym innym jak częścią fizykalnych mechanizmów działania (Begriffsfachwerk). W tej geometrii relacje usytuowania wzajemnego ciał sztywnych „odbijają świat rzeczywistych rzeczy"[21].

Do tego, co Kant nazywał stanem apriorycznym — jak sądził getyński matematyk — należy podejść jednak z wyraźną ostrożnością, bo to, co wcześniej uznawano za wiedzę aprioryczną, nie jest dzisiaj już za takie uznawane. Newton i Kant powątpiewali już w „absolutność czasu", ale dopiero Einstein — zdaniem Hilberta — definitywnie uwolnił nas od przesądu, że istnieje czas absolutny, który może prowadzić wiedzę fizykalną *ad absurdum*.[22]

Hilbert przypominał, że już Gauss i Helmholtz głosili pogląd, że natura empiryczna geometrii jest pewnym wynikiem osiągnięć nauki, a to stanowi punkt oparcia we wszystkich filozoficznych spekulacjach o czasie i przestrzeni. Zarazem teoria

---

[16] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 963.

[17] Tamże, s. 961.

[18] Tamże, s. 961.

[19] Tamże, s. 961.

[20] Tamże, s. 961.

[21] Tamże, s. 961-962. Sprawą doświadczenia jest przede wszystkim to, jakie jest położenie sytuacyjne usztywnionych ciał. Odwołuje się Hilbert do twierdzenia Gaussa, że sprawą eksperymentu jest np. ustalenie względnie zbicie twierdzenia, że sumą kątów trójkąta są dwa kąty proste.

[22] Tamże, s. 962. W zrozumieniu Hilberta pojęcie czasu absolutnego występuje np. w twierdzeniu o dodawaniu prędkości (Satz von der Addition der Geschwindigkeiten), lecz zarazem zaistnienie takiego czasu negują różnego rodzaju eksperymenty z dziedziny elektryczności, optyki i astronomii.

grawitacji Einsteina sugeruje, że prawdy geometryczne są inaczej formułowane niż fizykalne i od nich odmienne.[23]

Zauważał, że prawo Pitagorasa i prawo przyciągania Newtona co do istoty są z sobą pokrewne, bo wywodzą się z tego samego fizykalnego pojęcia zasadniczego potencjału. W prawie grawitacji Einsteina obydwa prawa są różnego rodzaju i od siebie odległe, bo pierwsze jest prawem geometrii elementarnej, a drugie dotyczy prawa działania mas.[24]

Hilbert uzasadniał również, iż w teorii apriorycznej Kanta zawarty jest „antropomorficzny osad", od którego musimy się uwolnić. Przyjąć należy jedynie „stanowisko aprioryczne", na którym w zasadzie opiera się „czysto matematyczne poznanie oparte na akceptacji tego wszystkiego co skończone" (hilbertowski finityzm).

Uproszczone jest (o czym wspominałam) stanowisko tych wszystkich, którzy twierdzą, że Hilbert rozumiał matematykę jako „relację między formułami" pozbawionymi jakiejkolwiek treści. Szczególnie ważne dla matematyka getyńskiego były przecież oznaczenia nowych pojęć oraz ich powstawania. Figury geometryczne są obrazami przypomnienia przedstawień przestrzennych i jako takie stosowane są przez matematyków. Hilbert był zarazem świadom, że owa „gra znaków" jest istotna dla kształtowania pojęć w geometrii różniczkowej, teorii równań różniczkowych, w podstawach rachunku niezmienników czy innych czysto matematycznych dziedzinach. Dla niego figury geometryczne to właśnie narysowane formuły, bez których matematyk nie może się obejść. Stosowanie figur geometrycznych jako środka dowodu zakłada wiedzę ścisłą, a określone aksjomaty leżą u podstaw teorii tych figur. Figury geometryczne można włączyć w ogólną skarbnicę znaków matematycznych i tutaj niezbędne jest ścisłe matematyczne badanie ich często poglądowej treści. Operacje na obrazach geometrycznych określane są zwykle tymi aksjomatami, które leżą u podstaw pojęć geometrycznych i związków między nimi. Aksjomatom arytmetyki podporządkowane są natomiast działania arytmetyczne. Umiejętne stosowanie owych znaków z określonym znaczeniem, jak podkreślał Hilbert, pozwala na określenie zbieżności między myśleniem geometrycznym i arytmetycznym. W badaniach arytmetycznych, podobnie jak w osądach geometrycznych, zbyt mało śledzimy łańcuch logicznych ciągów, a musimy także akceptować wzajemne związki arytmetyki i geometrii.

Hilbert sądził jednak, że określone znaki i figury nie załatwiają wszystkiego. W początkowej fazie w arytmetyce i geometrii spotykamy się bowiem z kombinacją mimowolną, nieświadomą, z wyraźnym kombinowaniem. Do analizy nad stosowanymi znakami włączał Hilbert także czynnik psychologiczny. Mówił bowiem o zaufaniu do jakiegoś „arytmetycznego czucia", a faktycznie chodziło o rzeczywistość matematycznych znaków, bo też bez nich nie możemy przebrnąć przez arytmetykę i to samo dotyczy geometrii, jeśli nie oprzemy się na sile wyobraźni geometrycznej (zasada „wzajemnego przenikania" systemu znaków arytmetyki i geometrii).

[23] Tamże, s. 962.
[24] Tamże, s. 962.

Dla Hilberta ujmującego matematykę w szerszym kontekście nauka ta nie była więc ciągiem znaków pozbawionych sensu, mamy bowiem do czynienia z kwestią ich ustalonego znaczenia. Czy jednak z pomocą tych znaków twierdzenia matematyczne uzyskują absolutną ścisłość jako coś wyjątkowego i doskonałego? Dla Hilberta matematyka stoi „na szczycie najwyższym nauk ścisłych" oraz odpowiada „potrzebie ogólnej, filozoficznej naszego rozumu" i prowadzi do „ujawnienia znaczenia pełnego" zadań twórczych, jakie przed nią stawiamy. Nie tylko ujawniamy przez ścisłość znaczenie pełne istoty zadania i problemu matematycznego, ale jest to też warunek jego rozwiązania. Zarówno metody twórcze, jak i tradycyjne są najprostsze i one — jak twierdził Hilbert — mają związek z ścisłością matematyczną i tylko dowody najprostsze prowadzą do ścisłości.[25]

Hilbert zauważył np. w rachunku niezmienników Weierstrassa mechanizmy ścisłości matematycznej, z którymi rzeczywiście spotykamy się w analizie. Widział też, że ścisłe sądy matematyczne mają zastosowanie w geometrii, mechanice i fizyce, a ten dopływ „materiału ze świata zewnętrznego" prowadzi nas do odrzucenia pojęcia continuum i liczby niewymiernej.

Hilbert dostrzegał w matematycznej „ekonomii myśli" sens istnienia wszelkich dowodów, a szczególne znaczenie mają — według niego — „dowody czystego istnienia"; ich negacja stanowi odejście od nauk matematycznych.[26] Rozum jako samodzielny i zdyscyplinowany nie zawsze musi ulegać wpływom świata zewnętrznego i w tym wypadku odwołujemy się do analizy określonych zadań matematycznych z pomocą logiki. Dotyczy to m.in. rozwiązywania „subtelnych zagadnień" teorii liczb i teorii funkcji, teorii Galois czy teorii niezmienników algebraicznych.[27]

Jeśli nowe dziedziny matematyki włączymy do „królestwa czystej myśli", to wówczas — zdaniem Hilberta — możemy znaleźć odpowiedź na problemy stare oraz nierozwiązane i odkryć dotąd nieznane mechanizmy ich rozwiązania, które będą dynamiczne i optymalne. Znów zmienia się granica między myśleniem i doświadczeniem, a świat zewnętrzny występuje ze swoimi „faktami rzeczywistymi problemów nowych i otwiera nam dziedziny nowe wiedzy matematycznej".[28]

Dla Hilberta niezwykle ważna w poznaniu matematycznym jest abstrakcja i — jak zauważał jego uczeń Courant — bywało, że ją przeceniał. Charakter abstrakcyjny i wręcz „wyjątkowy" w matematyce — zdaniem uczonego z Getyngi — ma nieskończoność.[29] Wyjaśnienie istoty nieskończoności wychodzi poza granice zainteresowania nauk szczegółowych i staje się czymś niezbędnym „dla godności rozumu ludz-

[25] Hilbert uważa, że teoria krzywych algebraicznych cechuje się jednością i celnością dzięki ścisłym metodom teorii funkcji zmiennej złożonej. To traktował jako środek transcendentny.

[26] Por. C. Reid, *Hilbert*, s. 53-54.

[27] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme* (online).

[28] Tamże.

[29] Hilbert wręcz stwierdzał, że „żaden problem nie wzburzał, nie intrygował tak duszy ludzkiej jak problem nieskończoności, ani też żadna idea nie okazała tak silnego i twórczego wpływu na rozum jak idea nieskończoności".

kiego".[30] Wyjaśnienie tego, co nieskończone jest — jego zdaniem — tylko możliwe przez to co skończone, bo tego co nieskończone nigdzie nie możemy urzeczywistnić i jest niespotykane w przyrodzie.[31]

Matematyk, pracując twórczo nad rozwiązaniem problemów ważnych, rozstrzyga i dostrzega to, co Hilbert określał mianem harmonii poznawczej widocznej „w zadaniach, metodach i pojęciach różnych dziedzin wiedzy matematycznej".[32] Przykładem piękna i harmonii była dla niego teoria ciał liczbowych, teoria ciał abelowych i badania Kroneckera funkcji eliptycznych. Opowiadał się za rozumieniem harmonii przez Leibniza jako „ucieleśnienia i realizacji myśli matematycznych".[33]

Przykładem ustanowionej odgórnie harmonii wiedzy matematycznej była dla niego też teoria względności Einsteina, w której doszukiwał się wprowadzenia zasady prostoty największej równań różniczkowych dla potencjału grawitacyjnego jednoznacznie przedstawionego matematycznie.[34]

Kształtowanie się matematyki, a zwłaszcza naukowego myślenia matematycznego jest przede wszystkim dojściem do teorii naukowej dojrzałej, która jest przyporządkowana metodzie aksjomatycznej. Według Hilberta, wszystko, co jest przedmiotem naukowego myślenia matematycznego, jest „dostatecznie dojrzałe do stworzenia teorii podporządkowanej metodzie aksjomatycznej". W metodzie aksjomatycznej znajdujemy rodzaj metody ogólnej teoretycznego traktowania zagadnień przyrodniczych, pozwalającej we wszystkich przypadkach na precyzyjne postawienie problemu. Z pomocą aksjomatów tworzymy „budowlę teorii" mającą niekiedy związek z zastosowaniem formalnych procesów myślenia i metod abstrakcyjnych.[35]

Hilbert zastanawiał się nad istotą funkcjonowania teorii matematycznej, zazwyczaj wysoce abstrakcyjnej. Uważał, że taka teoria powinna być jasna, łatwo dostępna, a nawet pretendować do doskonałości. Rzeczą ważną jest wyeliminowanie z niej złożoności i zawiłości, matematyczna kwestia badawcza powinna bowiem być na tyle trudna, by nas zainteresować, ale zarazem na tyle dla naszego rozumu dostępna, by rozwiązania nie uczynić czymś beznadziejnym.[36]

„Matematyka czysta" to — zdaniem uczonego getyńskiego — również określona idea matematyczna, którą powinna cechować doskonałość formalna, a rozwój matematyki to nic innego jak „gra idei duchowych"; rozwiązywanie problemów matematycznych to kształtowanie matematycznych „idei rozszerzonych".

---

[30] Por. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie* (wyd. VII), Springer, Leipzig 1930, s. 341.

[31] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 960.

[32] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme* (online).

[33] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 960. Także: C. Reid, *Hilbert*, passim.

[34] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 960-961. Teoria nieskończenie wielu zmiennych znajdująca zastosowanie w analizie spektralnej była także dla Hilberta przykładem piękna, harmonii i doskonałości myślenia matematycznego (tamże).

[35] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 959-960.

[36] Dla Hilberta teoria to „znak drogowy na zawiłych tropach prowadzących do utajnionych prawd, a znalezienie rozwiązania wynagradza nas radością". Por. D. Hilbert, *Matchematische Probleme*.

Wykorzystując teorie oraz idee matematyczne — zdaniem Hilberta — rozwiązujemy trudności logiczne i sprzeczności w matematyce.

W latach 20. XX wieku działalność badawcza Hilberta skupiła się na analizie podstaw matematyki, a zwłaszcza na polemikach z Brouwerem — zwolennikiem matematyki intuicjonistycznej.[37] Widoczne to było m.in. w jego pracach z geometrii.

W związku z analizą teorii i myśli matematycznych Hilbert zajął się podstawami geometrii. Od czasów Euklidesa — jak przekonywał getyński matematyk — sprawą zasadniczą jest ustanowienie aksjomatów geometrii i badanie ich wzajemnych relacji, a wszystko to sprowadza się do analizy logicznej naszych wyobrażeń przestrzennych. W geometrii tworzymy system aksjomatów najbardziej prosty i z nich wyprowadzamy ważniejsze twierdzenia geometryczne.[38] Zatem szczególna rola dydaktyczna i teoriopoznawcza przypadła geometrii, a zwłaszcza jej charakterowi poglądowemu. Hilbert potwierdzał, że geometria jest przede wszystkim przykładem nauki, gdzie „fakty realnej rzeczywistości" powinno się łączyć z przyjęciem systemu aksjomatów.[39]

Uczony z Getyngi w procesie kształtowania „budowli matematycznej" zwracał też uwagę na inne problemy. Zauważał, że mamy do czynienia z „wewnętrznym poplątaniem" w strukturze matematyki teorii i praktyki oraz myślenia i doświadczenia. Teoria i praktyka w rozwoju matematyki wzajemnie się potwierdzają, uzupełniają, a nawet pobudzają. Do matematyki w czasach najnowszych doszła technika eksperymentu oraz nowe metody, które umożliwiły powstanie np. teoretyczno-fizykalnych systemów naukowych. Matematyka dla Hilberta była instrumentem pośredniczącym między teorią i praktyką, między myśleniem a obserwacją. To właśnie matematycy budują w tym wypadku nośne „mosty łączące".[40]

Szczególna rola w ośrodku getyńskim przypadła rozwojowi matematyki stosowanej, powiązanej z przyrodoznawstwem i techniką. Felix Klein, który — używając słów Couranta — „jak Bóg panował w Getyndze" ze względu na swoją silną osobowość w szczególności łączył rozwój matematyki z fizyką i techniką. Był więc rzecznikiem rozwoju matematyki stosowanej.[41] Klein, Courant i Hilbert mieli wizję utwo-

---

[37] Por. D. van Dalen: *The War of the Frogs and the Mice, the Crisis of the Mathematische Annalen*, „Mathematical Intelligence", vol. 12, nr 4, 1990, s. 17-41. E. Piotrowska, op. cit., s. 115 i n.

[38] W szczególności chodzi o wyznaczenie jasnego znaczenia licznych grup aksjomatów. Badanie podstaw geometrii to dla Hilberta poszukiwanie problemów oraz ich rozwiązanie, nawet jeśli te problemy geometryczne nie zostaną rozwiązane, to będzie to bodziec do odkrycia nowych i twórczych dziedzin badawczych. We współczesnych badaniach geometrycznych zawsze chcemy ustalić, jakie aksjomaty, przypuszczenia lub środki wspomagające konieczne są do udowodnienia jakiejś prawdy, np. w geometrii elementarnej. Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*.

[39] Zdaniem Hilberta odnosi się to do wszystkich możliwych teorii. Z przyjętego bowiem systemu aksjomatów możemy otrzymać — jak podkreślał Hilbert — „najbardziej pełen przegląd zbioru przesłanek". Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*.

[40] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 962.

[41] Rozwój matematyki stosowanej w Getyndze wspierały koła przemysłowe i ludzie interesu. Sam Klein kierował Towarzystwem Wspierania Stosowanej Fizyki i Matematyki (Vereinigung zur Förderung der Angewandten Physik und Mathematik).

rzenia getyńskiego Instytutu Matematycznego o wyraźnym przeznaczeniu praktycznym, ze szczególnym zwróceniem uwagi na matematykę stosowaną. Wspomniany instytut miał być też „miejscem idealnym dla młodych naukowców szukających wartości wiecznych”.[42] Chodziło zatem o „związki intelektualne” z tym, co znajduje zastosowanie praktyczne.

Hilbert wbrew temu, co się niekiedy głosi, był rzecznikiem uprawiania matematyki stosowanej, którą uważał za rodzaj „miernika wartości” tej nauki. Niekiedy odwoływał się do Karla F. Gaussa, który cenił matematykę z zastosowaniami praktycznymi. Oczywiście Hilbert nie wykluczał tego, że niektóre działy matematyki mogą mieć ograniczone zastosowanie praktyczne (np. czysta teoria liczb).

Wreszcie Hilbert zwracał uwagę na paralelizm rozwojowy między przyrodą a myśleniem, na równoległość istnienia zjawisk przyrodniczych i myślenia matematycznego, które mogły być argumentem za obiektywizmem poznawczym.[43] Mówiąc o relacjach przyrody i matematyki, przytaczał znaną wypowiedź Galileusza, że przyrodę można zrozumieć, jeśli poznamy jej język i znaki, którymi się do nas zwraca, a tym językiem jest matematyka, a jej znakami figury matematyczne. Odwoływał się też do sformułowania Kanta, iż w każdym „szczegółowym” przyrodoznawstwie spotykamy się na tyle z nauką właściwą, na ile w niej zawarta jest matematyka.[44] Dostrzegał nie tylko ścisły i wieloraki związek nauk matematycznych z przyrodniczymi, lecz także traktował matematykę jako „podstawę wszelkiego ścisłego przyrodoznawstwa”. Pisał bowiem, że „jednolity charakter matematyki uwarunkowany jest istotą wewnętrzną tej nauki, matematyka bowiem to podstawa ścisłego przyrodoznawstwa”.[45] To, co wewnętrzne, stanowi jedność z tym, co zewnętrzne w poznaniu matematycznym. Hilbert konkludował, że tylko wówczas opanujemy teorie przyrodnicze, gdy wprowadzimy do nich ów „rdzeń matematyczny” i to w sposób zupełny oraz niezawodny.[46]

W 1930 roku na zjeździe przyrodników i matematyków niemieckich w Królewcu Hilbert w słynnym wykładzie programowym wypowiedział się w sprawach najważniejszych przyrodoznawstwa, a zwłaszcza o związkach, które zachodzą między rozwojem tych nauk a matematyką i logiką.[47] Rola pomocnicza czy wręcz zasadniczy cel relacji wzajemnych matematyki i przyrodoznawstwa był dla niego czymś oczy-

[42] Por. C. Reid, *Richard Courant,* s. 55.

[43] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 960.

[44] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 962. Hilbert odwoływał się również do poglądów Poincarégo, który z jednej strony wspierał rozwój tradycyjnej matematyki czystej i wysoce abstrakcyjnej, a z drugiej strony dostrzegał twórczą rolę tej nauki w badaniach przyrodniczych i stosowanych. Podobna była opinia wybitnego matematyka niemieckiego Jacobiego, wywodzącego się z tego samego środowiska naukowego co Hilbert, a mianowicie z Królewca.

[45] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme* (online).

[46] Por. D. Hilbert, *Die Naturerkennen und Logik*, s. 962.

[47] Tekst referatu Hilberta: D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, „Die Naturwissenschaften”, 18. Jahrgang, 14. November 1930, Heft 46.

wistym i w pełni zrozumiałym, na wspomnianym zjeździe konkludował bowiem, że „poznanie przyrody i życia jest naszym zadaniem najważniejszym".[48]

Dążenia ludzkie i wola (także matematyka) do tego się sprowadza, aby wiedza o przyrodzie stawała się bogatsza i głębsza. W tej dziedzinie zawsze ożywa stary problem filozoficzny, niekiedy kontrowersyjny i sporny: jaki udział w poznaniu naszym ma myślenie, a jaki doświadczenie. Zależy to — jak podkreślał Hilbert — od charakteru naszego poznania przyrodniczego i od tego, w jakim sensie nasza wiedza może być uznana za prawdę. By prawidłowo problem ten rozwiązać, musimy przyspieszyć współczesny rozwój nauki. Nie ma — zdaniem Hilberta — izolowanych wielkich odkryć naukowych, a jeśli się pojawiają, to pozostają w związku z bezustannym postępem nauk przyrodniczych i matematyki. Bez współdziałania matematyki rozwój astronomii i fizyki jest niemożliwy — jak zaznacza Hilbert — części teoretyczne tych nauk mają bowiem swój rodowód matematyczny.[49] Dostrzegał zatem wzajemne relacje między rozwojem matematyki i przyrodoznawstwa.

Przede wszystkim dzięki zabiegom Kleina i Hilberta Getynga stała się ośrodkiem badań nie tylko matematycznych, lecz także z zakresu fizyki matematycznej. W początkach XX wieku Hilbert oraz Minkowski prowadzili seminarium z fizyki matematycznej (Seminar über Mathematische Physik), zajmując się dydaktycznie i naukowo dziedzinami wzajemnych powiązań matematyki z fizyką klasyczną.

W tym czasie Hilbert wypowiedział swoje słynne motto badawcze, iż fizyka dla samych fizyków jest na tyle trudna, że muszą się zwrócić o pomoc do matematyki. Getynga stawała się ośrodkiem badań nie tylko matematycznych, lecz także fizycznych i Hilbert zamierzał pracować nad rozwojem nowej dyscypliny naukowej, a mianowicie fizyki matematycznej.

Wreszcie Hilbert stawiał matematyce określone wymagania. Rozwiązanie problemów miało być wyrażane w kategoriach historyczno-rozwojowych. Przypominał też, że np. rachunki z liczbami całkowitymi zostały odkryte we wczesnym etapie rozwoju kulturalnego ludzkości. Wskazywał na rozwój osiągnięć matematycznych w XVIII i XIX wieku, np. teorii równań liczbowych, teorii krzywych, równań różniczkowych i całkowych, teorii szeregów Fouriera czy teorii potencjału. Równocześnie, w przekonaniu matematyka getyńskiego, „najstarsze problemy każdej dziedziny wiedzy matematycznej powstają z doświadczenia i są stawiane w świecie zjawisk zewnętrznych[50]. Matematyk powinien być przekonany o tym (w tym tkwiło sedno hilbertowskiego optymizmu poznawczego), że stawiany przez niego problem badawczy „powinien dawać się ściśle rozwiązać i to w tym sensie, iż możliwe jest otrzymanie odpowiedzi na postawione pytanie lub stwierdzenie niemożliwości jego

[48] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik,* s. 959.

[49] W czasach nowożytnych, a szczególnie w XIX i XX wieku najważniejsze odkrycia w przyrodoznawstwie mają swój związek z matematyką. Dotyczy to odkrycia fal przez Hertza, promieni Roentgena, radioaktywności Curie, teorii kwantów Plancka, teorii względności Einsteina, spektrów przez Bohra czy teorii izotopów Astona (por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 959).

[50] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*.

rozwiązania”.[51] Jeszcze dobitniej myśl tę wdrażało jego słynne zdanie: „Musimy wiedzieć i będziemy wiedzieć” (Wir müssen wissen, wir werden wissen).[52] Było dla niego oczywiste, iż zachętą do pracy twórczej musi być w szczególności przekonanie o rozwiązalności każdego problemu matematycznego i traktował to jako zagadnienie i zobowiązanie o wymiarach ogólnopoznawczych.

W czasie wizyty Poincarégo w Getyndze w 1909 roku Hilbert w przemówieniu okolicznościowym wypowiedział znamienne słowa:

> jakież to szczęście być w naszych czasach matematykiem! Wszędzie matematyka się rozrasta, wypuszczając nowe pędy. Coraz ważniejsze znaczenie przybiera jej zastosowanie do nauk przyrodniczych i jej związki z filozofią, dzięki czemu jest ona gotowa zająć swoje poprzednie centralne stanowisko.[53]

Kilka lat wcześniej, na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku, przedstawił Hilbert do rozwiązania 23 problemy naukowe. Należał wówczas do tych nielicznych matematyków, którzy mieli rozeznanie w światowym dorobku tej nauki i mógł prognozować jej rozwój na bliższe i dalsze lata. Bliski współpracownik Hilberta — Hermann Weyl — zauważył, że „my matematycy często oceniamy swoje osiągnięcia, wyjaśniając, na jakie to problemy Hilberta udało się nam otrzymać odpowiedzi”[54]. W nieprzerwanym rozwoju matematyki stare problemy zastępujemy nowymi i odrzucamy te, nad którymi nie warto się zastanawiać. Matematyka jest wówczas zdolna do życia i rozwoju, jeśli jest otwarta, a Hilbert stwierdzał:

> Niedostatek nowych problemów oznacza obumieranie lub przerwanie samodzielności rozwoju. Zasadniczy cel matematyki to postawienie określonego problemu badawczego”, a celem matematyka jest „znajdowanie nowych problemów, nowych punktów widzenia i otwieranie szerszych i swobodnych horyzontów.[55]

Rozwiązanie problemu ma miejsce wówczas — zdaniem Hilberta — gdy jest ono w swej istocie proste i zrozumiałe, a w dodatku jasne i łatwo dostępne. W swym paryskim wystąpieniu Hilbert wskazał także przykłady złożoności matematycznych problemów, np. twierdzenie Fermata, z algebraicznej dziedziny kwestie, jakie sobie stawiali Kummer, Dedekind i Kronecker. Uczony zauważał, że niekiedy jeden problem dotyczy różnych dziedzin matematyki i może obejmować np. podstawy geometrii, teorię krzywych i powierzchni, mechanikę i rachunki niezmienników. Problem dotyczący regularnych wielościanów — jak wskazywał — ma znaczenie dla

---

[51] Tamże.

[52] Por. D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, s. 963.

[53] Por. C. Reid, *Hilbert*, passim.

[54] O poglądach Weyla na filozofię matematyki i fizyki por. E. Piotrowska, *Między matematyką i fizyką. Badania naukowe i refleksje filozoficzne Hermanna Weyla*, (w:) E. Piotrowska i D. Sobczyńska (red.), *Między matematyką a przyrodoznawstwem*, Wydawnictwo Naukowe IF UAM, Poznań 1999, s. 160-184.

[55] Por. D. Hilbert, *Mathematische Probleme*.

geometrii elementarnej, teorii grup, teorii równań algebraicznych i teorii linowych równań różniczkowych.

Z rozważań powyższych wypływa jeden wniosek oczywisty: dla Hilberta matematyka nie była zwykłą grą znaków, ale złożoną konstrukcją i procesem poznawczym. To wszystko składa się na to, co określiłabym światopoglądem matematycznym — teorią poznania matematycznego, gdyż sprawy ontologii matematyki getyńskiego uczonego mniej interesowały. Można zaryzykować twierdzenie, że w obrazie matematyki Hilberta szczególna rola przypadła przyrodoznawstwu, a zwłaszcza fizyce. Spotykane zaś częstokroć obiegowe i uproszczone rozumienie matematyki hilbertowskiej jest dla tego wybitnego uczonego krzywdzące i niezrozumiałe.