

Agnieszka Mycka, Jerzy Mycka

## **Czy muzyka jest ucieleśnieniem matematyki? Analiza przypadku introitu *Statuit***

*Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi.*

*G.W. Leibniz*

### STRESZCZENIE

Rozpoczniemy od podania różnych definicji muzyki i jej składowych czynników oraz zaprezentowania przykładu utworu muzycznego, którym będzie introit *Statuit*. Następnie wskażemy problem związany z rozróżnieniem między utworem muzycznym a jego wykonaniem. W tym kontekście zaprezentowane zostaną różne notacje: reprezentacje wspomnianego introitu. Kolejnym omówionym zagadnieniem będzie — po przeglądzie wybranych teorii łączących odbiór muzyki z matematyką — koncepcja skal, ich realizacja w wypadku modusów gregoriańskich oraz charakter modalny introitu *Statuit* i jego statystyczna analiza interwałowa. Wyniki analizy posłużą jako punkt odniesienia do wskazania możliwości łączenia procesu kompozycji z aparatem lingwistyki matematycznej. Bazując na powyższych rozważaniach, wskażemy, że spójną perspektywą postrzegania muzyki i matematyki może być traktowanie ich jako swoistej analizy wzorców.

### **1. CHARAKTER MUZYKI — ZARYS POGLĄDÓW**

Rozpoczniemy od pobieżnego przeglądu kilku określeń muzyki, zwłaszcza w kontekście jej związków z matematyką. Marchetto z Padwy w *Lucidarium in arte musice plane* [1;V,4] napisanym około roku 1318 tak określił charakter muzyki:

Muzyka jest sztuką (ars) wspaniałą i godną podziwu, rozbrzmiewa w niebie i na ziemi. Ponadto muzyka jest także nauką (scientia), która rozważa liczby, proporcje, konsonanse, interwały i wielkości.

Warto zwrócić uwagę na dwoisty charakter muzyki w podanej wyżej definicji. Z jednej strony muzyka jest sztuką (*ars*), czyli umiejętnością praktyczną, wykonywanie jej jest elementem ludzkiej działalności i podlega subiektywnym uwarunkowaniom osobowym. Z drugiej strony — przez wskazanie na związek muzyki z wartościami matematycznymi — zaznaczony został także jej teoretyczny i obiektywny wymiar: „rozważa liczby, proporcje, konsonanse, interwały i wielkości”. Te czynniki powodują, że muzyka (oprócz świata sztuki) należy także do kręgu nauk, czyli do świata teoretycznej refleksji nad niezależną od badacza rzeczywistością. Tego rodzaju dyktomia pojawiała się w wielu innych dyskursach dotyczących muzyki, jednakże z różnorodnie rozłożonymi akcentami.

Kasjodor w wielce wpływowym dziele *Institutiones Divinarum et Saecularium Litterarum* [2;V,4], którego oddziaływanie trwało przez całe średniowiecze, a pośrednio sięga aż do współczesności, używał następujących sformułowań:

Arytmetyka jest nauką o wielkości liczbowej rozważanej ze względu na nią samą. Muzyka jest nauką, która rozważa liczby w relacji do dźwięku.

W powyższym fragmencie powraca, i to wzmocniony, aspekt naukowego wymiaru muzyki. Muzyka została wprost zestawiona z arytmetyką, wyeksponowano też jej aspekt liczbowy. Rozróżnienie dokonywane między matematyką a muzyką dotyczy charakteru relacji liczbowych — w muzyce staje się on fizyczny i materialny przez osadzenie w rzeczywistości zmysłowo dostępnego dźwięku.

Inną koncepcję muzyki pokazał Platon w *Prawach* [3;795d]. Podkreślił tu etyczny i formacyjny charakter muzyki:

Wysztalcenie ma dwa działy — gimnastykę, która zajmuje się ciałem — i muzykę, która ma służyć doskonaleniu duszy.

W tym wypadku pojawia się zupełnie nowy aspekt. Otóż muzyka nie tylko oddziałuje na słuchacza, ma go również (przez swój swoisty charakter) przemieniać i doskonalić. W pewien bliżej nieokreślony sposób — Platon nawiązuje do analogii fizycznego zjawiska rezonansu — etos muzyki ma aktualizować pewne skłonności duszy i obiektywnie kształtować wewnątrz słuchacza (co przekracza czysto emocjonalne oddziaływanie). Warto zwrócić uwagę, że w tym wypadku nie chodzi o prosty mechanizm zmysłowego oddziaływania na słuchacza, ale raczej o zestrojenie obiektywnie istniejących predyspozycji tegoż z pewnym wzorcem doskonałości realnie występującym w świecie i reprezentowanym przez dzieło muzyczne.

Jeszcze inny — choć powiązany z powyższymi rozróżnieniami — aspekt porusza Aurelian w *Musica Disciplina* [4;VII].

Różnica między muzykiem a śpiewakiem jest tak wielka jak między (...) sprawnością umysłową a fizyczną. Muzyk jest tym, który przez kontemplację pojął naukę śpiewu, a nie opanował ją przez niewolniczy trening. Śpiewak staje przed muzykiem jak więzień przed sędzią.

Choć wydawać się może, że Aurelian powraca tu tylko do znanego nam już rozróżnienia między muzyką jako teorią (*scientia*) i praktyką (*ars*), mamy tu dodany jeszcze jeden poziom refleksji. Otóż jego opis implikuje wyraźne rozróżnienie między samym dziełem a jego wykonaniem. Dostrzeżenie tego dualizmu skutkuje powstaniem wielu ważnych zagadnień, w tym wypadku mamy wskazany wyraźny prymat teoretycznego, kontemplacyjnego aspektu dzieła nad jego fizyczną realizacją i podporządkowanie subiektywnej interpretacji obiektywizmowi wewnętrznych relacji dzieła muzycznego.

Realizm codziennej praktyki wykonawczej często przesuwiał akcent w kierunku postrzegania muzyki jako pewnej *techne*: „Muzyka jest nauką poprawnego śpiewania” pisał Odo z Cluny w *Enchiridion Musices* [5; s. 117]. Z drugiej strony tradycja postrzegania dzieła muzycznego jako tworu obiektywnego o uporządkowanym przebiegu pozostała nadal aktualna. Oto przykład encyklopedycznej definicji [6; t. 3, s. 206].

Sztuka, której tworzywem są dźwięki zorganizowane w czasie.

Jak widać, mamy tu bardzo typowy powrót do dwóch głównych nurtów refleksji muzycznej: z jednej strony wraca określenie muzyki jako sztuki (umiejętności), z drugiej strony znowu pojawia się temat porządku i organizacji związany z aspektem matematycznym.

Podsumowując pokrótce poruszone wyżej zagadnienia, musimy zwrócić uwagę na powracające odniesienia do organizacji i porządkowania (także liczbowego) materiału dźwiękowego. To obiektywne uporządkowanie staje się także punktem odniesienia dla interpretacji dzieła oraz oceny oddziaływania muzyki na słuchaczy.

## 2. NOTACJA: REPREZENTACJA UTWORU CZY WYKONANIA

Przekazywanie muzyki wymaga pewnego nośnika materialnego. Chociaż pierwotnie wykonanie stanowiło jedyny sposób zaprezentowania utworu muzycznego, jednak z czasem pojawiły się pewne formy jego pośredniej reprezentacji. Notacja muzyczna stała się systemem symbolicznej reprezentacji używanej w komunikacji doświadczenia muzycznego (por. [7]). Wprowadzenie różnych typów notacji wyeksplikowało dylemat: czy zapis prezentuje samo dzieło, czy jego konkretną interpretację. Bez względu na rozwiązanie tego problemu to właśnie notacja pośredniczy przy analizie dzieła (jego wewnętrznych relacji dźwiękowych i strukturalnych).

Dalsze rozważania będą prowadzone na przykładzie introitu *Statuit*. Dzieło to pochodzi z repertuaru chorału gregoriańskiego. Sam utwór pełnił rolę antyfony śpiewanej na początku ceremonii liturgii Mszy świętej w rycie rzymskim. Datowany jest na VII/VIII w., a jego wczesne zapisy można znaleźć w *Graduale* z Mont-Blandin czy w *Graduale* z Compiègne. Warto zwrócić uwagę na fakt, że introit *Statuit* (podobnie jak całość repertuaru gregoriańskiego) ze względu na silny związek ze

słowem i brak pionowych współbrzmień jest — jak by się wydawało — stosunkowo słabo ‘zmatematyzowany’.

Poniżej pokażemy różne etapy rozwoju notacji ilustrowane właśnie przez przykład introitu *Statuit*. Notacja adiestematyczna związana była pierwszoplanowo z wykonaniem. Jej specyficzne znaki (zaznaczone w oryginale czerwonym kolorem, na rysunku znajdują się one poniżej czterolinii) związane były z gestem dyrygenta i dopasowanym do charakteru śpiewu ruchem dłoni skryby.

The image shows a musical score for the Introit 'Statuit' from the Graduale Triplex. The score is written on five staves. The first staff begins with 'IN. I BCKS' and a large 'S' time signature. The lyrics are: 'Ta-tu-it \* e-i Dó-mi-nus te-staméntum pa-cis, et prin-ci-pem fe-cit e-um : ut sit il-li sa-cerdó-ti-i díg-ni-tas in-ae-tér-num. T. P. Al-le-lú-ia, al-le-lú-ia. Ps. Meménto Dómi-ne Da-vid : et omnis mansu-e-tú-di-nis e-ius. Misericordias Dñi'. The notation is diastematic, with notes represented by black squares on a four-line staff. Red annotations, including slurs, accents, and other markings, are placed above and below the notes, indicating performance instructions. The text 'Sir. 45, 30 ; Ps. 131' is written in the top right corner.

Rysunek 1. Fragment *Graduale Triplex* [8, s. 445]

W przypadku tej notacji<sup>1</sup> można odczytać wiele szczegółów praktyki wykonawczej, zwłaszcza w odniesieniu do zagadnień agogiczno-rytmicznych. Jasne jest także odniesienie do osobistego odbioru i interpretacji dzieła poprzez gest zapisującego utwór, brak jednak wielu informacji określających szczegóły dzieła — przede wszystkim notacja nie przekazuje podstawowych informacji o wysokościach dźwięków.

Zdecydowanie większą liczbę informacji dotyczących obiektywnych aspektów dzieła związanych z wysokością dźwięku, połączeniem dźwięków w grupy można znaleźć w zapisie diastematycznym. Na powyższym rysunku jest to zapis zanotowany czarnym kolorem na czterolinii. Choć dochodzi tutaj informacja numeryczna o wysokościach dźwięku, jednak utracony został bliski związek z wykonaniem, giną ponadto agogiczne i rytmiczne niuanse dzieła.

<sup>1</sup> Wyczerpujące wyjaśnienia tego zapisu można znaleźć w [15].

W ciągu kolejnych stuleci notacja muzyczna przechodziła wiele przeobrażeń. Prowadziły one do wprowadzenia zapisu, który gwarantowałby możliwość ścisłego i precyzyjnego opisu utworu, pozostawiając równocześnie możliwość zaprezentowania szerokiego spektrum właściwości wykonawczych. Współczesną notację reprezentuje kolejny rysunek.

(M.M. ♩ = 152.)  
 Intr.  
 1.  
 (ré-la)

Stá- tu- it \* é- i Dó- mi- nus te- sta-  
 mén- tum pá- cis, et prín- ci- pem fé- cit é-  
 um : ut sit íl- li sa- cerdó- ti- i díg- ni- tas  
 in ae- tér- num. *T. P.* Al- le- lú- ia,  
 al- le- lú- ia. *Ps.* Memén- to Dó- mi- ne  
 Dá- vid : \* et ómnis mansu- e- tú- di- nis é- jus.  
 Gló- ri- a Pátri. E u o u a e.

Rysunek 2. Fragment *Compendium Gradualis et Antiphonalis* [9, s. 873]

W tym wypadku znajdujemy w zapisie określenie wysokości dźwięku, rytmu, czasu trwania — ze względu na największą ilość przekazu liczbowego mamy tu stonkowo odpersonalizowaną formę przekazu.

### 3. MATEMATYKA W MUZYCE — PRÓBY POSZUKIWAŃ

W historii spotkamy różne próby wyjaśnień odnoszące się do powiązań pomiędzy strukturą dzieła muzycznego a matematyką.

#### 3.1. Konsonanse

Jako pierwsze z nich pojawiło się powiązanie doskonałości brzmienia oraz pozytywnego odbioru przez słuchacza z relacją liczbową wysokości dźwięków. Usystematyzowaniem tego podejścia było wprowadzenie pojęcia konsonansu. Jedno z jego (późnych) określeń zostało podane przez Vincenzo Galilei w *Dialogo della Musica Antica e Moderna* [10]:

Konsonans to para dźwięków o pewnej regularności wynikającej ze wspólnej miary istniejącej w obu dźwiękach.

Mamy tutaj wprowadzenie współbrzmienia (pionowego/harmonicznego — dwa dźwięki w jednej chwili lub poziomego/melodycznego — dwa dźwięki sukcesywnie po sobie), które jest współmierne w sensie istnienia wymiernej (ułamkowej) — i stosunkowo prostej — proporcji wysokości dwóch dźwięków. Dla przykładu interwał<sup>2</sup> seksty wielkiej (9 półtonów) daje proporcję 27/16, podczas gdy septyma mała (10 półtonów) stanowi proporcję 59049/32768; sekstę wielką uznaje się za konsonans, podczas gdy septymę małą za dysonans (brzmienie niekonsonansowe). Badania związane z odbiorem dźwięków przez słuchaczy wprowadziły pojęcie zespołu krytycznego (por. [11]). Nie wchodząc w szczegóły techniczne, zespół krytyczny ma określać granice psychofizjologiczne, przy których odbiór dźwięków daje poczucie zróżnicowania. Jak się okazało, staranne badania wykazały, że odbiór zgodnych współbrzmień w niewielkim stopniu i tylko niebezpośrednio wiąże się wielkością interwału (w szczególności wspomnianą wyżej septymę małą klasyfikowano w pomiarach jako współbrzmienie zgodniejsze od wielu klasycznie uznawanych konsonansów).

#### 3.2. Sekwencje interwałów

Modyfikacją poprzedniej tezy jest uznanie, że obiektywne oddziaływanie muzyki wiąże się odbiorem uporządkowanych sekwencji wielu dźwięków. Ich układ miałby gwarantować stabilną formułę muzyczną i przyczyniać się do poczucia doskonałości formy u odbiorcy. Jednakże taka konstrukcja uzasadnienia piękna dzieła muzycznego, odwołująca się do ustalonego numerycznie przebiegu interwałów, musiałaby się

---

<sup>2</sup> Muzyczna odległość dwóch dźwięków zwykle określana na bazie dyskretnej skali logarytmicznej, w której podstawową jednostką jest półton.

wiązać z posiadaną przez słuchacza umiejętnością stabilnego odbioru obiektywnie istniejących sekwencji dźwięków.

To ostatnie założenie zostało jednak zakwestionowane przez szereg badań. Znaczące wrażenie wywiera tu zwłaszcza dość prosty eksperyment związany z tak zwanym paradoksem Sheparda [12]. Okazało się, że odpowiednie złożenia składowych harmonicznym prowadzą do wygenerowania szczególnych dźwięków odległych o półton.<sup>3</sup> Gdy zostaną one pogrupowane w cykliczną sekwencję powtarzającą te same interwały, słuchacz odbiera wrażenie nieskończonego wznoszenia odtwarzanego ciągu dźwięków. Jak widać także ten rodzaj związków matematycznych nie pozwala na realistyczne wyjaśnienie oddziaływania muzyki. Skoro ciągi interwałów nie gwarantują jednoznaczności przekazu muzyki, tym bardziej nie mogą gwarantować ustalonego wrażenia doskonałości i piękna.

#### 4. WZORCE W MUZYCE

Próbą rozwiązania problemu powiązań matematyki z muzyką będzie przeniesienie nacisku z aspektu numerycznego na aspekt przetwarzania symbolicznego. Ten sposób postrzegania przenosi naszą uwagę na inne działy matematyki (lingwistyka formalna i teoria złożoności) oraz na pogranicze informatyki (rozpoznawanie i analiza wzorców). Jak się okaże, tego rodzaju podejście nie było obce — choć oczywiście w innej formie — już średniowiecznym teoretykom.

Tę próbę wyjaśnienia rozpoczniemy od przywołania pojęcia skali muzycznej i zilustrowania go za pomocą modusów chorału gregoriańskiego. Następnie powrócimy do pewnej formy analizy przypadku introitu „Statuit”, także przez jego statystyczną (markowowską) analizę interwałową.

W najprostszy sposób skalę można określić jako pewien wyróżniony, uporządkowany zbiór dźwięków (por. [7]). Jest ona w gruncie rzeczy katalogiem, z którego wybierane są dźwięki (stopnie skali) użyte w kompozycji. Struktura skali opiera się na układzie interwałów, oddzielających jej kolejne stopnie, ponadto poszczególne stopnie mają przypisane pewne specyficzne własności. Skale używane w kompozycjach chorału gregoriańskiego nazywane są modusami. Nuty posiadające wyróżnione znaczenie architektoniczne w budowie utworu nazywane są nutami strukturalnymi. Z poszczególnymi modusami związane są charakterystyczne formuły melodyczne (wykorzystywane w intonacjach, kadencjach, wskazujące istotne akcenty). Z każdym modusem wiąże się także pewien etos (wyraz, charakter emocjonalny).

Skale wykorzystuje się w celu nadania dziełu pewnej struktury przez określenie zasobu dźwięków do wyboru oraz wskazanie głównych punktów odniesienia przy pozostawieniu znaczącej swobody w budowaniu kompozycji. Matematycznie skala

---

<sup>3</sup> Dźwiękową ilustrację tego zjawiska można znaleźć na przykład w aplecie Henninga Kocha: <http://www.netalive.org/tinkering/shepard-effect/>.

tworzy opis dopuszczalnych relacji między dźwiękami i wyznacza pewne dźwięki wyróżnione.

W wypadku chorału gregoriańskiego zostało wyróżnionych osiem skal. Są one zwykle grupowane następująco:

1. Protus authenticus
2. Protus plagius
3. Deuterus authenticus
4. Deuterus plagius
5. Tritus authenticus
6. Tritus plagius
7. Tetrardus authenticus
8. Tetrardus plagius

Skale nieparzyste nazywamy autentycznymi, parzyste zaś plagalnymi. Odpowiadające sobie skale autentyczne i plagalne dzielą wspólny materiał dźwiękowy, ale przesuwają dźwięki modalne w specyficzny sposób. Z utworami zbudowanymi według obiektywnych zasad obowiązujących w danej skali wiąże się zamierzona recepcja odbiorcy.

Przedstawmy teraz podstawową charakterystykę modalną introitu *Statuit*. Należy on do modusu pierwszego autentycznego (protus authenticus). Jego etos — sposób kształtowania zamierzonego odbioru słuchacza — bazował na określeniu: *primus gravis*. W traktatach muzycznych średniowiecza rozwijano tę charakterystykę, określając modus jako: poważny, dojrzały, szlachetny, niosący pobożność bez sentymentalizmu i pompatyczności.

Specyficzna konstrukcja utworu w modusie pierwszym oraz przyjęty standard odbioru bazowały na przypisywaniu poszczególnym dźwiękom (precyzyjniej mówiąc stopniom skali) pewnych funkcji oraz budowaniu całości z pewnych formuł melodycznych. Posługując się standardowym zapisem muzycznym, poszczególne stopnie modusu przyporządkujemy w omawianym introicie dźwiękom od „d<sup>1</sup>” (razkreślnego) do „d<sup>2</sup>” (dwukreślnego). Przy takiej notacji — wskazując tylko najbardziej podstawowe zależności — otrzymamy następującą charakterystykę modusu, gdzie poszczególne stopnie mają odpowiednie funkcje:

- „a<sup>1</sup>” główny dźwięk recytatywny (tak zwana dominanta, piąty stopień skali);
- „c<sup>2</sup>”, „g<sup>1</sup>” to pomocniczy recytatyw utworu;
- „g<sup>1</sup>”, „f<sup>1</sup>”, „a<sup>1</sup>” są dźwiękami o istotnej roli strukturalnej i elementami kadencji pośrednich;
- „d<sup>1</sup>” jest dźwiękiem kończącym i podsumowującym utwór (tak zwana kadencja końcowa);
- ważną formułą jest początek (intonacja) frazy zadana przez układ „d<sup>1</sup> a<sup>1</sup> b<sup>1</sup> a<sup>1</sup>”;
- istotne akcenty utworu są ornamentowane przez dodanie nut ozdabiających główny przebieg.



#### 4.1. Analiza statystyczna introitu *Statuit*

Utwór jest zbudowany w modusie pierwszym i składa się z 88 dźwięków. Ich częstość występowania jest wyliczona poniżej:

— („d<sup>1</sup>”, 9), („e<sup>1</sup>”, 8), („f<sup>1</sup>”, 13), („g<sup>1</sup>”, 13), („a<sup>1</sup>”, 24), („b<sup>1</sup>”, 5), („h<sup>1</sup>”, 2), („c<sup>2</sup>”, 12), („d<sup>2</sup>”, 2).

Jak widać częstość względna najczęściej używanych dźwięków to  $24/88 \approx 27\%$  dla „a<sup>1</sup>”,  $13/88 \approx 15\%$  dla „g<sup>1</sup>” oraz  $12/88 \approx 14\%$  dla „c<sup>2</sup>”. Pokazuje to, że charakterystyka statystyczna utworu zgadza się doskonale z teoretycznymi założeniami modusu pierwszego.

Jeśli chodzi o całe formuły melodyczne proste przeliczenia pokazują, że utwór wykorzystuje następujące frazy:

- „a<sup>1</sup> b<sup>1</sup>” powtarza się pięć razy, często jako początek jednostki;
- „f<sup>1</sup> g<sup>1</sup>” powtarza się pięć razy, „f<sup>1</sup>” jako podstawa recytacji, „g<sup>1</sup>” jako muzyczne odbicie akcentu słowa;
- „a<sup>1</sup> b<sup>1</sup> g<sup>1</sup>” występuje jako ozdobnik ważnego fragmentu tekstu, np. początku słowa;
- „g<sup>1</sup> a<sup>1</sup> b<sup>1</sup> g<sup>1</sup> f<sup>1</sup> f<sup>1</sup> g<sup>1</sup>” występuje dwa razy pełniąc rolę płynnego połączenia fraz;
- uwzględniając transpozycję (to znaczy rozważając układy interwałów zamiast bezwzględnych wysokości dźwięków), otrzymujemy jako typowy układ zakończenia dłuższego fragmentu dzieła następującą sekwencję: sekunda mała w dół, sekunda mała w górę, tercja mała w dół, sekunda wielka w górę, sekunda wielka w dół (ten układ tworzy tak zwane kadencje: pośrednią i końcową przy uwzględnieniu ozdobników);
- skok o kwintę jest standardowym wprowadzeniem ważnej frazy (początek i koniec utworu).

Ponownie analiza wykazała zasadniczą zgodność teoretycznych wymagań modusu z rzeczywistym przebiegiem melodycznym *Statuit*.

### 5. ANALIZA A WZORCE W UTWORZE MUZYCZNYM

Słynny teoretyk muzyki okresu średniowiecza Guido z Arezzo w traktacie *Micrologus* zaproponował pewien system częściowo zmechanizowanego procesu kompozycji (opis znajduje się w [7]), w którym obiektywne zasady formowania utworów chorałowych tworzą podstawę kompozycyjną, pozostawiając równocześnie znaczny zakres swobody osobie kompozytora. Przedstawiając to w języku zbliżonym do używanego przez teorię języków formalnych, otrzymalibyśmy następujący schemat postępowania.

1. Pełny zakres dźwięków możliwych do wykorzystania (w tym wypadku dla ludzkiego głosu) podpisujemy powtarzającymi się samogłoskami (aby stworzyć skojarzenie sylab z dźwiękami). Używając ówczesnej notacji dźwięki „Γ A B C D E F G a b c d e f g a”, miałyby być w pewien sposób skojarzone z samogłoskami „a e i o u”. Traktując to jako fragment gramatyki transformacyjnej, uzyskalibyśmy reguły postaci:

Samogłoska → Dźwięk,

reguły te posiadałyby wagi stosowne do charakterystyki modalnej wybranego modusu (w sposób analogiczny do powyżej opisanego przykładu *Statuit*), lecz uwzględniałby także wybory kompozytora.

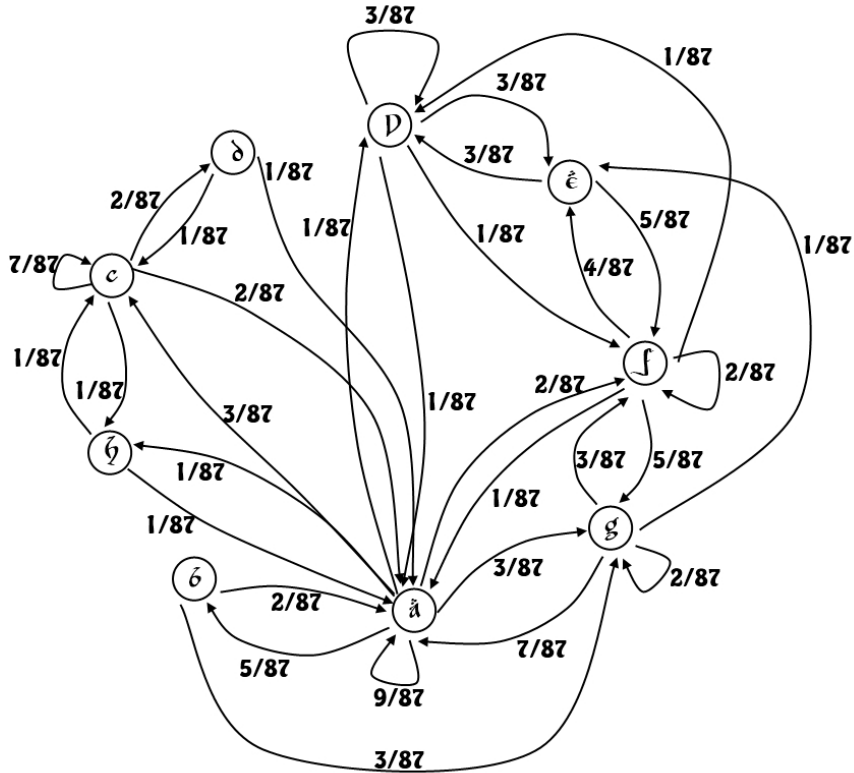
2. Otrzymany zapis melodii sylabicznej byłby rozszerzany przez ponowne zastosowanie reguł transformujących układy nut w bardziej rozbudowane (melizmatyczne) sekwencje dźwięków. Reguły te zostałyby oparte na formalnej charakterystyce modusu oraz na analizie (uznawanych za wzorcowe) wcześniejszych kompozycji. Także w tym wypadku reguły gramatyczne powinny być stosowane w sposób nie-deterministyczny, jednak z uwzględnieniem pewnych wag. Powyższy przykład sugeruje zastosowanie następujących reguł:

: „a<sup>1</sup> g<sup>1</sup>” > „a<sup>1</sup> b<sup>1</sup> g<sup>1</sup>”,

: „f<sup>1</sup>” > „f<sup>1</sup> g<sup>1</sup>”,

: „f<sup>1</sup> d<sup>1</sup>” > „f<sup>1</sup> d<sup>1</sup> e<sup>1</sup> d<sup>1</sup>” | „f<sup>1</sup> e<sup>1</sup> d<sup>1</sup>”.

Do wykrycia reguł drugiego typu i wykorzystania ich w procesie „adjustacji” tekstu muzycznego oraz do określenia wag może służyć markowowska analiza częstości przejść (dla fraz wybranej długości). Poniżej zamieszczamy rysunek ilustrujący opracowany właśnie w taki sposób graf przejść dla introitu *Statuit*.



Rysunek 3. Graf przejść dla introitu „Statuit”. Jak widać, wzorcem dla utworu staje się opis gramatyk generatywnych, które, narzucając regularność utworzonej melodii, pozwalają jej pozostać zróżnicowaną ze względu na bogactwo reguł gramatycznych.

## 6. PODSUMOWANIE

Bazując na powyższych rozważaniach, dostrzegamy, że spójną perspektywą postrzegania muzyki i matematyki może być traktowanie ich jako swoistej analizy wzorców. W wypadku matematyki aksjomaty możemy postrzegać jako wyjściowe schematy symboli, które przekształcane przez reguły rozumowania (oddawane przez reguły gramatyk formalnych) generują ciągi symboli opisujące złożone relacje między obiektami matematycznymi. Cały opisany wyżej mechanizm jest w gruncie rzeczy niczym innym jak rekurencyjną przeliczalnością sformalizowanych teorii matematycznych [13]. Z drugiej strony, analiza wzorców (np. przez parsing) w podobnym symbolicznym wysłowieniu twierdzenia lub hipotezy prowadzi do odkrywania za-

leżności z prostszymi twierdzeniami i ustalania ciągu wnioskowań i założeń skutkujących tezą (por. [14]).

W wypadku muzyki wzorce są zawarte w utworze przez układy interwałów, dźwięków, schematów rytmicznych i aranżacyjnych. Wbudowane w ten sposób w strukturę dzieła muzycznego oddziałują na słuchacza osobowo (intelektualnie i emocjonalnie). Wykorzystywanie tych wzorców pojawia się — w mniej lub bardziej świadomy sposób — w procesach kompozycyjnych. Komplementarnie analiza strukturalna (gramatyczna względem ustalonej gramatyki danego rodzaju muzycznego) już istniejącego utworu pozwala na poznanie głębszej struktury dzieła.

Podsumowując, wydaje się, że można zaproponować tezę, iż regularność wzorców oddziałuje muzycznie (intelektualnie i emocjonalnie), determinując poczucie piękna u odbiorcy. Co więcej, aparat gramatyk formalnych pozwala na przebadanie konkretnego wymiaru oddziaływania dzieł o różnych cechach gramatycznych.

Ponadto, na bazie poprzednio podanych uwag można zasugerować, że muzyka stanowi twórczą (choć zwykle nieuświadomioną) próbę demonstrowania różnych wzorców, podczas gdy matematyka — postrzegana jako teoria sformalizowana — jest abstrakcyjną analizą wzorców symbolicznych.

Przyjmując, że wspólnym źródłem wykorzystywanych wzorców byłaby percepcja regularności występujących w otaczającej nas rzeczywistości, można pokusić się o dalszy wniosek. Otóż matematyka i muzyka byłyby genealogicznie ufundowane na tej samej materialnej rzeczywistości, postrzeganej jako uporządkowana matematycznie (lub przynajmniej możliwa do takiego uporządkowania) struktura. I ten właśnie związek tworzyłby najgłębszy kontekst matematycznego charakteru dzieła muzycznego. Ten wniosek może z kolei prowadzić do konkluzji, że powyższe rozważania w pewnym stopniu umożliwiają specyficzne odczytanie koncepcji „muzyki sfer” bazujące na założeniu harmonijnej — to jest w tym kontekście matematyzowanej — struktury świata.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Marchetto z Padwy. *Lucidarium in arte musice plane*. Chicago: University of Chicago Press, 1985.
- [2] Kasjodor. *An Introduction to Divine and Human Readings*. New York: Pentagon Books, 1966.
- [3] Platon. *Prawa*. Warszawa: Alfa-Wero, 1997.
- [4] Aurelian z Reome. *The Discipline of Music*. Colorado Springs: Colorado College Music Press, 1968.
- [5] Strunk, Oliver. *Source Readings in Music History*. New York: Norton, 1950.
- [6] *Encyklopedia Powszechna*. Warszawa: PWN, 1973.
- [7] Loy, Gareth. *Musimathics: the Mathematical Foundations of Music*. London: MIT Press, 2006.
- [8] *Graduale Triplex*. Solesmes: Abbaye Saint-Pierre de Solesmes, 1979.
- [9] *Compendium Gradualis et Antiphonalis*. Paris: Desclée et Socii, 1924.
- [10] Galilei, Vincenzo. *Dialogue on Ancient and Modern Music*. New Haven: Yale University Press, 2003.

- [11] Fletcher, Harvey. Auditory Patterns. *Reviews of Modern Physics*. 1940, 12: 47-65.
- [12] Shepard, Roger N. Circularity in Judgements of Relative Pitch. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1964, 36:2346-2353.
- [13] Murawski, Roman. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, 2010.
- [14] Simpson, Stephen G. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [15] Cardine, Dom Eugene. *Semiologia gregoriańska*. Kraków: Wydawnictwo Benedyktynów, 2005.