Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 3(79)

Jerzy Dadaczyński

Arytmetyka u początku abstrakcyjnego pojmowania geometrii przez Hilberta

1. SENTENCJA HILBERTA (I)

Twierdzi się powszechnie, że bezpośrednią przyczyną tego, iż Hilbert radykalnie odszedł od przekonania, że przedmioty i relacje geometrii są „brane” przy pomocy doświadczenia zmysłowego ze świata zewnętrznego, i ukształtowania się jego tezy, iż geometria jest nauką abstrakcyjną (nauką o abstrakcyjnych przedmiotach), był wysłuchany przez niego wykład Wienera podczas pierwszej konferencji Deutsche Mathematiker-Vereinigung w Halle/Salle w trzeciej dekadzie września 1891 roku. Relacjonuje się, że Hilbert był do tego stopnia zainspirowany wystąpieniem Wienera, iż już w pociągu, w drodze powrotnej do Królewca, zaczął się zajmować aksjomatami geometrii.[1] Podczas przerwy w podróży, w którejś z berlińskich poczekalni dworcowych, Hilbert miał wypowiedzieć słynne zdanie, które miało dokumentować jego (nowe) przekonanie o abstrakcyjnym charakterze geometrii: „W miejsce *punktów, prostych i płaszczyzn* można zawsze mówić o *stołach, krzesłach i kuflach*”.[2]

Cała ta — słynna i wielokrotnie przytaczana — sekwencja zdarzeń ma wskazywać na to, że Wiener był nie tyle nawet prekursorem, ile raczej „położnym” nowej koncepcji geometrii Hilberta. Powstaje pytanie: co konkretnie w swoim wykładzie

---

[1] Por. O. Blumenthal, *David Hilbert*, „Die Naturwissenschaften”, R. X 1922, s. 68 (67-72); O. Blumenthal, *Lebensgeschichte*, [w:] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Berlin 1935, Springer, s. 403 (388-429); W. Benz, *Grundlagen der Geometrie*, [w:] *Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990*, red. G. Fischer, Braunschweig 1990, Vieweg, s. 234 (231-268).

[2] „Man muss jederzeit an Stelle von ‘Punkte, Geraden, Ebenen’, ‘Tische, Stuehle, Bierseidel’ sagen koennen”, M.-M. Toepell, *Ueber die Entstehung von David Hilberts ‘Grundlagen der Geometrie’*, Goettingen 1986, Vandenhoeck und Ruprecht, s. 42.

powiedział Wiener, iż mogło to stać się inspirujące dla późniejszego twórcy formalizmu? Pierwszym celem niniejszego opracowania jest udzielenie odpowiedzi na powyższe pytanie. Drugim będzie ustalenie, jak właściwie należy odczytywać sentencję Hilberta w kontekście zawartości wykładu Wienera. Natomiast trzecim celem będzie ustalenie przez kogo — ewentualnie — inspirowany był Wiener w swojej wizji geometrii, tak, by ostatecznie ustalić źródło nowego pojmowania geometrii przez Hilberta.

2. WYKŁAD WIENERA

Główne tezy wykładu Wienera zawarte są w krótkim, czterostronicowym tekście, który ukazał się w opublikowanym w roku 1892 — z rocznym opóźnieniem — pierwszym numerze „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung". Wiener tylko raz w swoim tekście mówi o „nauce abstrakcyjnej" (*abstracte Wissenschaft*). Pojmuje ją jako naukę „paralelną" do geometrii:

> Także dla geometrii znaczenie ma tego rodzaju powrót (zwrot) do najprostszych przedmiotów (elementów) i operacji, ponieważ z tych można odwrotnie zbudować pewną abstrakcyjną naukę, która jest niezależna od aksjomatów geometrii, ale której twierdzenia są krok po kroku paralelne do twierdzeń geometrii.[3]

W następnym akapicie Wiener wyjaśnia, na czym, jego zdaniem, polega konstrukcja owej „nauki abstrakcyjnej" „paralelnej" do geometrii:

> Przykładu dostarcza tutaj geometria rzutowa płaszczyzny. Przedmiotami niech będą punkty i proste, operacjami łączenie i przecinanie, przedmioty i operacje niech będą założone tylko w skończonej ilości. Albo w postaci uwolnionej od geometrycznej szaty: niech będą założone elementy dwojakiego rodzaju i dwojakie operacje, przy czym przyjmuje się, że połączenie dwóch elementów jednego rodzaju daje element innego rodzaju.[4]

Myśl Wienera można próbować wyrazić następująco:

Niech zbiór punktów oznaczany jest przez „*PUNKTY*", natomiast zbiór prostych przez „*PROSTE*". Operacja łączenia ujęta będzie przez trójargumentową relację *ŁĄ-*

[3] „Auch fűr die Geometrie ist ein derartiges Zurűckgehen auf die einfachsten Objecte (Elemente) und Operationen von Bedeutung, da man dann umgekehrt wieder aus diesen eine abstracte Wissenschaft aufbauen kann, die von den Axiomen der Geometrie unabhängig ist, deren Sätze aber Schritt fűr Schritt mit den Sätzen der Geometrie parallel sind", H. Wiener, *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", R. I 1890/91, s. 46 (45-48).

[4] „Ein Beispiel hierzu liefert die projective Geometrie der Ebene. Die Objecte seien Punkte und Geraden, die Operationen das Verbinden und Schneiden, Objecte und Operationen seien nur in endlicher Anzahl vorausgesetzt. Oder, vom geometrischen Gewande losgelöst: es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimt, dass die Verknűpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe", H. Wiener, *Ueber Grundlagen*…, s. 46.

CZY. Jest ona w istocie dwuargumentową funkcją, która każdym dwom różnym punktom przyporządkowuje dokładnie jedną prostą wyznaczaną przez te punkty. Operacja przecinania zapisana zostanie za pomocą trójargumentowej relacji *PRZECINA*. Jest ona również dwuargumentową funkcją, która każdym dwom różnym prostym przyporządkowuje dokładnie jeden punkt, ten, w którym one się przecinają. W tym miejscu ingeruje fakt, że Wiener w swoim wykładzie zajmował się geometrią rzutową płaszczyzny. Istnienie punktu idealnego w nieskończoności dla każdego zbioru prostych równoległych gwarantuje, że owa funkcja jest określona dla każdej pary prostych różnych. W punkcie idealnym w nieskończoności proste należące do danego kierunku przecinają się. Przy przyjętych oznaczeniach operacje geometrii rzutowej wskazane przez Wienera można zapisać następująco:

(1.1) $\Pi a,b\ \Sigma! m\ (a,b \in \mathit{PUNKTY} \wedge a \neq b \wedge m \in \mathit{PROSTE} \rightarrow (\mathit{ŁĄCZY}(a,b,m)))$,

(1.2) $\Pi m,n\ \Sigma! a\ (m,n \in \mathit{PROSTE} \wedge m \neq n \wedge a \in \mathit{PUNKTY} \rightarrow (\mathit{PRZECINA}\ (m,n,a)))$.

Następnie Wiener „uwalnia” owe warunki z „szaty geometrycznej”. W miejsce dwu zbiorów *PUNKTY* i *PROSTE* przyjmuje dwa zbiory elementów oznaczane dalej za pomocą „*X*” i „*Y*”. W miejsce dwuargumentowej funkcji *ŁĄCZY* przyjmuje operację oznaczaną dalej „OP_1” — dwuargumentową funkcję przyporządkowującą każdym dwom różnym elementom zbioru *X* dokładnie jeden element zbioru *Y*. Natomiast w miejsce dwuargumentowej funkcji *PRZECINA* Wiener przyjmuje drugą operację, oznaczaną dalej „OP_2” — dwuargumentową funkcję przyporządkowującą każdym dwom różnym elementom zbioru *Y* dokładnie jeden element zbioru *X*. W efekcie wspomnianego „uwolnienia” z „szaty geometrycznej” warunki (1.1) i (1.2) przyjmują następującą postać:

(2.1) $\Pi x,y\ \Sigma! \alpha\ (x,y \in X \wedge x \neq y \wedge \alpha \in Y \rightarrow ((x,y)OP_1(\alpha)))$

(2.2) $\Pi \alpha,\beta\ \Sigma! x\ (\alpha,\beta \in Y \wedge \alpha \neq \beta \wedge x \in X \rightarrow ((\alpha,\beta)OP_2(x)))$.

Uwolnienie z „szaty geometrycznej” i przejście do „paralelnej” do geometrii „nauki abstrakcyjnej” dokonało się — przede wszystkim — na drodze zmiany przedmiotów, do których odnosiły się warunki (1.1) i (1.2). Miejsce punktów i prostych zajęły dowolne przedmioty, które spełniają formalne warunki (2.1) i (2.2).

Jednakże dowolność przedmiotów należących do zbiorów *X* i *Y* została w istocie ograniczona przez warunek zawarty w pierwszej z cytowanych wypowiedzi Wienera. Ma on charakter ontologiczny.

Otóż niemiecki matematyk stwierdza, że w „nauce abstrakcyjnej” ma się do czynienia z „najprostszymi” (*die einfachsten*) przedmiotami (*Objecte*), dla których rezerwuje specjalną nazwę „elementy” (*Elemente*).

Można postawić pytanie, na czym ma polegać prostota owych przedmiotów. Odpowiedź może być tylko jedna: mają one „mało” własności prostych, tzn. nieredukowalnych do siebie. Ponieważ Wiener wymaga od tych przedmiotów, by były one

„najprostsze” (*die einfachsten*), to oznaczać to musi, że mogą one posiadać tylko te własności, które „sprawiają”, że są one przedmiotami nauki abstrakcyjnej. W istocie zatem przedmioty „nauki abstrakcyjnej”, którą tworzy Wiener mają tylko dwie własności proste — i to nieabsolutne, relacyjne — które wyznaczają warunki (2.1) i (2.2), i nie mają żadnych innych własności, w tym własności absolutnych.

Przyjmując zasadę Berkeleya, że przedmiot jest zbiorem (swoich) własności (tutaj: nie tylko absolutnych, ale również relacyjnych), można twierdzić, że przedmioty geometrii, tzn. punkty i proste, były określone przez następujące zbiory własności prostych, nieredukowalnych nawzajem do siebie (były następującymi zbiorami własności):

(3.1) $\{W_1, W_2, W_3, \ldots, W_k\}$ — punkty;

(3.1) $\{U_1, U_2, U_3, \ldots, U_l\}$ — proste;

gdzie $k > 2$ i $l > 2$ oraz dla punktów W_1 jest warunkiem (1.1), W_2 warunkiem (1.2), dla prostych zaś U_1 jest warunkiem (1.2), U_2 warunkiem (1.1).

Natomiast przedmioty „nauki abstrakcyjnej”, którą budował Wiener, określone są przez następujące zbiory własności prostych (są następującymi zbiorami własności):

(4.1) $\{V_1, V_2\}$ — przedmioty zbioru ze zbioru X;

(4.2) $\{T_1, T_2\}$ — przedmioty ze zbioru Y;

gdzie dla przedmiotów ze zbioru X V_1 jest warunkiem (2.1), V_2 warunkiem (2.2), dla przedmiotów zaś ze zbioru Y T_1 jest warunkiem (2.2), T_2 jest warunkiem (2.1).[5]

Ponieważ elementy zbioru X i Z nie posiadają żadnych innych własności prostych (np. „odpowiedników” własności $W_3, \ldots, W_k$, $U_3, \ldots, U_l$) są one „przedmiotami najprostszymi” — wg terminologii H. Wienera również „elementami”.

Przedmioty ze zbiorów X i Y, jako pozbawione wszelkich własności prostych, poza wspomnianymi dwoma (relacyjnymi), można słusznie nazwać — i tak będzie się czynić w niniejszym tekście — przedmiotami abstrakcyjnymi.[6] Takie uzasadnienie znalazłoby określenie przez Wienera nauki „paralelnej” do geometrii mianem „nauki abstrakcyjnej” jako nauki o przedmiotach abstrakcyjnych.

Określenie tutaj elementów zbiorów X i Y mianem abstrakcyjnych nie rozstrzyga „sposobu powstania” i statusu ontologicznego owych przedmiotów. Wiener pozostawia tę kwestię nierozstrzygniętą, w ogóle nie stawia tego problemu. Wydaje się, że możliwe są co najmniej cztery sposoby jego rozstrzygnięcia:

[5] W istocie, ze względu na dualność wyjściowej geometrii rzutowej we wzorach (4.1), (4.2) winno się odwołać nie do zbiorów, ale par uporządkowanych własności.

[6] Trzeba zauważyć, że wyżej określone pojęcie przedmiotu abstrakcyjnego jest pojęciem względnym. Jest ono zrelatywizowane do nałożonych warunków (aksjomatów). W omawianym powyżej kontekście warunki stanowią zdania (2.1) i (2.2).

— podmiot poznający *ex nihilo* konstruuje przedmioty abstrakcyjne o własnościach relacyjnych V_1, V_2 lub T_1, T_2. Od momentu konstrukcji istnieją one albo w umyśle poznającego podmiotu, albo w jakiejś rzeczywistości idealnej;

— podmiot poznający z „danych" mu przedmiotów np. punktów i prostych konstruuje przedmioty abstrakcyjne, „izolując" myślowo od punktów i prostych odpowiednio własności $W_3, \ldots, W_k$. oraz $U_3, \ldots, U_l$. Po przeprowadzeniu operacji abstrahowania przedmioty abstrakcyjne istnieją albo w umyśle poznającego podmiotu, albo w jakiejś rzeczywistości idealnej.

— istnieje, niezależnie od podmiotu poznającego, rzeczywistość (dziedzina) „najprostszych przedmiotów". Podmiot ma do owych przedmiotów — na bliżej nieokreślonej drodze — dostęp poznawczy.

— nie można też wykluczyć pewnego rodzaju fikcjonalizmu. Takie rozstrzygnięcie sugeruje, w pewnym stopniu, użycie przez Wienera zwrotu *es seien* [...] *vorausgesetzt* odnośnie do „elementów" (przedmiotów abstrakcyjnych).

3. ARYTMETYKA DEDEKINDA

Wracając teraz do sentencji Hilberta, wygłoszonej po wykładzie Wienera, należy stwierdzić, iż *expressis verbis* nie ma tam mowy o „najprostszych" (*die einfachsten*) przedmiotach (*Objecte*), które Wiener nazywał „elementami", a które w niniejszym tekście nazwane też zostały przedmiotami abstrakcyjnymi.

Zgodnie bowiem z tym, co powiedziano wyżej, za takie na pewno nie mogą być uważane stoły, krzesła i kufle, dlatego że wszystkie te przedmioty mają pewne własności odmienne od tych, które nakładane są na przedmioty w założeniach „geometrii abstrakcyjnej" w sensie Wienera. Wystarczy wskazać kolor przedmiotów z sentencji Hilberta.

Ważniejsza jest jednak uwaga, że Wiener nie traktował również punktów i prostych jako przedmiotów abstrakcyjnych. Wyraźnie rozróżnił on przedmioty geometrii i przedmioty abstrakcyjne — przedmioty nauki „paralelnej" do geometrii.

Z kolei sam Hilbert w semestrze letnim 1891 roku — tuż przed wysłuchaniem wykładu Wienera — prowadził w Królewcu wykład właśnie z geometrii rzutowej i wprost stwierdził we wstępie, że zasadniczych źródłem geometrii są zmysły i doświadczenie, a jej przedmiotem jest przestrzeń (fizyczna) i jej własności dane przez zmysły.[7] Był zatem na pewno do momentu wysłuchania wykładu Wienera bardzo daleki od pojmowania przedmiotów geometrii jako przedmiotów abstrakcyjnych.

---

[7] „Die Geometrie ist die Lehre von den Eigenschaften des Raumes. Sie unterscheidet sich wesentlich von den rein mathematischen Wissensgebieten wie z. B. Zahlentheorie, Algebra, Funktiontheorie. Die Resultate dieser Gebiete können durch reines Denken gewonnen werden, indem man durch klare logische Schlűsse die behaupteten Thatsachen auf immer einfachere zurűckfűhrt, bis man schliesslich nur noch den Begriff der ganzen Zahl nötig hat. Jeder noch so tief liegende und complizierte Satz der reinen Mathematik muss so schliesslich auf Beziehungen fűr ganze Zahlen 1,

Uwzględniając jedynie powyższe przesłanki, można by sądzić, iż bezpośrednio po wysłuchaniu wykładu Wienera królewiecki docent nie był skłonny traktować punktów, prostych i płaszczyzn jako przedmiotów abstrakcyjnych. Innymi słowy, można by twierdzić, że nie wyrobił sobie jeszcze wtedy klarownej koncepcji geometrii jako nauki abstrakcyjnej.

Są jednak inne, bardzo mocne argumenty, które pozwalają twierdzić, że punkty, proste i płaszczyzny z sentencji Hilberta były jednak — w pojęciu jej autora — przedmiotami abstrakcyjnymi i, konsekwentnie, nauka traktująca o tych przedmiotach, czyli geometria, była w jego pojęciu nauką abstrakcyjną. Dalsze analizy będą miały na celu ukazanie takiej argumentacji.

Wiener swój przytoczony wyżej wywód dotyczący nauki abstrakcyjnej w ogóle i nauki abstrakcyjnej paralelnej do geometrii (rzutowej) poprzedził następującą uwagą, rozpoczynającą cały wykład:

> Można wymagać od dowodu twierdzenia matematycznego, że korzysta on tylko z tych założeń, od których to twierdzenie rzeczywiście zależy. Najmniejsze możliwe do pomyślenia założenia to dysponowanie pewnymi przedmiotami i pewnymi operacjami, przez które owe przedmioty są ze sobą łączone. Jeśli jest możliwe tego typu przedmioty i operacje bez dodawania nowych założeń tak ze sobą scalić [poszeregować], że powstają zdania [twierdzenia], to otrzymuje się w tych zdaniach ugruntowany w sobie obszar nauki. Takim jest na przykład arytmetyka.[8]

2, 3,… zurűckgeführt werden können. Da dieser Weg lang und beschwerlich ist, so hat man Mittel ersonnen, wie man den Weg ebnet und abkűrzt oder durch Anlegung von Zwischenstationen sichert etc. Aber es ist nicht nur diese Zurűckführung möglich, sondern auch geboten. Es gilt heutzutage ein Satz erst dann als bewiesen, wenn er eine Beziehung zwischen ganzen Zahlen in letzter Instanz zum Ausdruck bringt. Also die ganze Zahl ist das Element. Zum Begriff der ganzen Zahl können wir auch durch reines Denken gelangen, etwa <indem ich> die Gedanken selber zähle. Methoden, Grundlagen der reinen Mathematik gehören dem reinen Denken an. Ich brauche weiter nichts als rein logisches Denken, wenn ich mich mit Zahlentheorie oder Algebra beschäftige.

Ganz anders verhält es sich mit der Geometrie. Ich kann die *Eigenschaften des Raumes* nimmer durch *blosses Nachdenken* ergrűnden, so wenig wie ich die *Grundgesetze der Mechanik*, das *Gravitationsgesetz* oder irgend ein *anderes physikalisches Gesetz* so erkennen kann. Es ist ja Raum nicht ein *Produkt meines Nachdenkens*, sondern er ist mir durch *meine Sinne* gegeben. Ich brauche daher zur Ergrűndung *seiner Eigenschaften* meine Sinne. Ich brauche die *Anschauung und das Experiment*, wie bei der Ergrűndung physikalischer Gesetze, wo auch noch die *Materie als gegeben durch die Sinne hinzukommt*", D. Hilbert, *Projective Geometrie,* [w]: *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902,* red. M. Hallett, U. Majer, Berlin 2004, Springer, s. 22 (21-55).

[8] „Man kann von dem Beweise eines mathematischen Satzes verlangen, dass er nur diejenigen Voraussetzungen benutzt, von denen der Satz wirklich abhängt. Die geringsten denkbaren Voraussetzungen sind das Vorhandensein von gewissen Objecten und von gewissen Operationen, durch die diese Objecte unter einander verknüpft werden. Ist es möglich derartige Objecte und Operationen ohne Zufügen neuer Voraussetzungen so einander zu reihen, dass Sätze entstehen, so erhält man in diesen Sätzen ein in sich begründetes Gebiet der Wissenschaft. Ein solches ist z. B. die Arithmetik", H. Wiener, *Ueber Grundlagen…*, s. 46.

Powstaje pytanie, jak rozumieć scalanie „bez dodawania nowych założeń" w naukę (zdania nauki) pewnych przedmiotów (i operacji). W świetle przeprowadzanych wyżej analiz dalszych partii wykładu Wienera można twierdzić, iż autorowi chodziło o czynienie przedmiotami nauki przedmiotów „wyznaczonych" przez zbiór własności o minimalnej mocy. Innymi słowy, we wstępie do wykładu chodziło Wienerowi o przedmioty, które nazwał dalej „elementami", „przedmiotami najprostszymi" (*die einfachsten Objecte*), czyli o przedmioty abstrakcyjne.

Na końcu analizowanej wypowiedzi Wiener stwierdza, że przedmioty, o których mówi — przy spełnieniu pewnych warunków („scalenie" [poszeregowanie] wraz z operacjami, tak że powstają zdania [twierdzenia]) — stają się przedmiotami nauki i jako przykład takiej właśnie nauki podał arytmetykę. Innymi słowy, przedmioty, o których mówi arytmetyka, są zdaniem Wienera przedmiotami abstrakcyjnymi, a sama arytmetyka jest przykładem (egzemplarzem) nauki abstrakcyjnej.

Koncepcja Wienera jest zatem następująca: geometria nie jest nauką abstrakcyjną, ale można i należy budować „paralelną" do niej naukę abstrakcyjną, natomiast arytmetyka jest nauką abstrakcyjną albo jeszcze inaczej: arytmetykę już zbudowano jako naukę abstrakcyjną.

Powstaje istotne pytanie, o jaką konkretnie arytmetykę chodziło Wienerowi. Ważne dokonania dotyczące arytmetyki w latach poprzedzających rok 1891 to aksjomatyzacja arytmetyki autorstwa Peana z roku 1889 oraz aksjomatyzacja arytmetyki Dedekinda z roku 1888. Ponieważ *Was sind und was sollen die Zahlen?* wywołało w niemieckim środowisku ogromne poruszenie i dyskusje,[9] to należy przypuszczać, że Wiener, mówiąc o „ugruntowaniu" arytmetyki, miał na myśli aksjomatyzację arytmetyki dokonaną właśnie przez Dedekinda.

Matematyk z Brunszwiku po wprowadzeniu zbioru („systemu") N, jego wyróżnionego elementu 1 oraz funkcji następnika („odwzorowanie φ") i po wprowadzeniu warunków, które winna spełniać ta funkcja (aksjomatów arytmetyki) stwierdził:

> 73. Wyjaśnienie. Jeśli przy ujmowaniu prosto nieskończonego, uporządkowanego przez odwzorowanie φ, systemu N, nie uwzględnia się żadnych szczególnych własności elementów, a jedynie uwzględnia się te związki, w które owe elementy są nawzajem do siebie wprowadzone przez porządkujące odwzorowanie φ, to te elementy nazywają się liczbami naturalnymi, a element podstawowy 1 nazywa się liczbą podstawową ciągu liczbowego N. Przy uwzględnieniu owego uwolnienia elementów od każdej innej zawartości (abstrakcja) można owe liczby słusznie nazwać wolnymi tworami ludzkiego ducha. Związki lub prawa, które są wyprowadzone wyłącznie z warunków $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ w 71. i dlatego są takie same we wszystkich uporządkowanych

[9] D. Hilbert w roku 1931 pisał: „Im Jahre 1888 machte ich als junger Privatdozent aus Königsberg aus eine Rundreise an die deutschen Universitäten. Auf meiner ersten Station, in Berlin, hörte ich in allen mathematischen Kreisen bei jung und alt von der damals eben erschienen Arbeit Dedekinds ‚Was sind und was sollen die Zahlen?' sprechen — meist in gegnerischen Sinne. Die Abhandlung ist neben der Untersuchung von Frege der wichtigste erste tiefgehende Versuch einer Begründung der elementaren Zahlenlehre", D. Hilbert, *Die Grundlegung der elementahren Zahlenlehre,* „Mathematische Annalen", R. LXVI 1931 nr 104, s. 487 (485-494).

prosto nieskończonych systemach, jakiekolwiek przypadkowo by dano elementom nazwy tworzą przedmiot nauki o liczbach albo arytmetyki”.[10]

Wydaje się, że tekst Dedekinda pozostawia pewne wątpliwości, czym są przedmioty arytmetyki liczb naturalnych. Raz bowiem zdaje się on wskazywać, że liczby naturalne są przedmiotami abstrakcyjnymi, innym razem zdaje się sugerować, że liczby naturalne nie muszą być przedmiotami abstrakcyjnymi, a wystarczy jedynie nieuwzględnianie wszystkich ich „ponadminimalnych” własności. Najlepiej zatem przyjąć, że według Dedekinda przedmiotami arytmetyki mogą być zarówno przedmioty abstrakcyjne, jak i przedmioty nieabstrakcyjne.

Przedmioty arytmetyki są przedmiotami abstrakcyjnymi, ponieważ powstają przez „uwolnienie” („abstrakcja”) ich od „wszelkiej innej zawartości” (wszelkich własności) poza własnościami, które są warunkami nałożonymi na funkcję następnika (liczby naturalne są jej argumentami i wartościami). Owe przedmioty są zdaniem Dedekinda, „wolnymi tworami ludzkiego ducha”, który, jak należy sądzić, dokonuje wspomnianego „uwolnienia” („abstrakcji”). Właśnie uwaga o „wolnych tworach ludzkiego ducha” rozstrzyga, jak należy sądzić, o niezależnym od przedmiotów „wyjściowych” istnieniu przedmiotów abstrakcyjnych arytmetyki. Nauka o takich przedmiotach jest oczywiście nauką abstrakcyjną.

Przedmioty nieabstrakcyjne — jak się wydaje — też mogą być według koncepcji Dedekinda przedmiotami arytmetyki. Nie trzeba bowiem elementów zbioru N, spełniających aksjomaty arytmetyki, koniecznie „uwalniać” od wszystkich „ponadminimalnych” własności, by nazwać je liczbami. Wystarczy — jak pisze Dedekind — by tych własności „nie uwzględniono”. Właśnie użycie zarówno terminu „nie uwzględniać” (*absehen*), jak i terminu „uwolnienie” (*Befreiung*) prowadzi do tego, że interpretując wypowiedź Dedekinda, można przyjąć jako przedmioty arytmetyki i przedmioty nieabstrakcyjne, i przedmioty abstrakcyjne.

Jest jasne, że Wiener korzystał z koncepcji przedmiotów abstrakcyjnych arytmetyki Dedekinda, wprowadzając swoje „przedmioty najprostsze” i szkicując koncepcję nauki abstrakcyjnej „paralelnej” do geometrii. Wprost bowiem powołał się on na przykład arytmetyki.

---

[10] „73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffast, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heissen diese Elemente natűrliche Zahlen und das Grundelement 1 heisst die Grundzahl der Zahlenreihe N. In Rűcksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraction) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen. Die Beziehungen oder Gesetze, welche ganz allein aus den Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in 71. abgeleitet werden und deshalb in allen geordneten einfach unendlichen Systemen immer dieselben sind, wie auch die den einzelnen Elementen zufällig gegeben Namen lauten mögen, bilden den nächsten Gegenstand der Wissenschaft von den Zahlen oder der Arithmetik”, R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888, Vieweg, par. 73.

4. SENTENCJA HILBERTA (II)

Powstaje oczywiście ważne dla podejmowanej w niniejszej pracy tematyki pytanie: czy Hilbert, słuchający sugestii Wienera, iż właśnie arytmetyka jest egzemplarzem nauki abstrakcyjnej, był świadom, że na jej zapleczu stoi Dedekindowska koncepcja arytmetyki naszkicowana w *Was sind und was sollen die Zahlen?* Odpowiedź musi być twierdząca. Stwierdzono wyżej, że środowisko matematyków niemieckich zaledwie trzy lata wcześniej było bardzo mocno poruszone przedstawioną tam konstrukcją arytmetyki i dyskutowało te kwestie szeroko.[11]

Jak się wydaje, zestawienie treści wykładu Wienera ze znaną koncepcją arytmetyki Dedekinda zaowocowało pomysłem Hilberta, który zawarł w swojej sentencji. Wiener — jak podkreślono — akceptował abstrakcyjny charakter arytmetyki, ale nie akceptował abstrakcyjnego charakteru geometrii. Postulował dopiero budowanie „paralelnej" do zastanej geometrii nauki abstrakcyjnej. Hilbert podjął pomysł budowania takiej właśnie nauki, ale doszedł do wniosku, że skoro Dedekind dostarczył egzemplarza arytmetyki jako nauki abstrakcyjnej, to sama geometria też może (powinna) być nauką abstrakcyjną. Innymi słowy, projektowana nauka abstrakcyjna, „paralelna" do zastanej geometrii, sama winna stać się geometrią, tak jak arytmetyką stała się abstrakcyjna nauka zbudowana przez Dedekinda.

Nauka abstrakcyjna, zarówno według koncepcji Dedekinda, jak i Wienera posiada interpretacje nieabstrakcyjne. Interpretację nieabstrakcyjną arytmetyki Dedekinda otrzyma się wtedy, gdy w aksjomatach arytmetyki nazwy przedmiotów abstrakcyjnych zastąpi się nazwami przedmiotów nieabstrakcyjnych spełniających te aksjomaty. Interpretacją warunków (aksjomatów) „paralelnej" nauki abstrakcyjnej (2.1), (2.2) są chociażby zdania (1.1), (1.2). I tu interpretacji nieabstrakcyjnej nauki abstrakcyjnej dokonuje się, zastępując nazwy przedmiotów abstrakcyjnych nazwami przedmiotów nieabstrakcyjnych (oraz zmieniając nazwy odpowiednich relacji). Sentencja Hilberta, która powstała w powyższym kontekście, wyraża właśnie tak pojmowaną interpretację nieabstrakcyjną. „Punkty", „proste", „płaszczyzny" z sentencji nie są już nazwami „fragmentów" przestrzeni fizycznej danej przez zmysły, jak to jeszcze było w Hilbertowskim wykładzie geometrii rzutowej z semestru letniego 1891 roku. „Punkty", „proste" i „płaszczyzny" są w sentencji nazwami przedmiotów abstrakcyjnych. Natomiast „stoły", „krzesła" i „kufle" są nazwami przedmiotów nieabstrakcyjnych, w których dziedzinie abstrakcyjna geometria mogła zdaniem Hilberta znaleźć interpretację.

Inaczej powyższą myśl można ująć następująco: planowana przez Hilberta w roku 1891 (sentencja) geometria jest nauką abstrakcyjną, ponieważ zamierzonym modelem jej syntaksy jest dziedzina przedmiotów abstrakcyjnych (dziedzina punktów,

---

[11] Owo wcześniejsze stwierdzenie udokumentowano wyżej tekstem samego Hilberta z 1931 roku.

prostych i płaszczyzn). Ta syntaksa może posiadać również modele w dziedzinie przedmiotów nieabstrakcyjnych (kufle, krzesła, stoły).[12]

Zwieńczeniem procesu formowania nowej geometrii, który zapoczątkowany został wysłuchaniem wykładu Wienera z 1891 roku, była Hilbertowska praca *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899, w którym został przedstawiony pierwszy nieentymematyczny system geometrii euklidesowej.

We wstępie do pracy Hilbert podejmuje kwestię obiektów geometrii:

> Przedstawiamy sobie trzy różne systemy przedmiotów (*Systeme von Dingen*): Przedmioty pierwszego systemu nazywamy punktami i oznaczamy za pomocą *A*, *B*, *C*. Przedmioty drugiego systemu nazywamy prostymi i oznaczamy za pomocą *a*, *b*, *c*. Przedmioty trzeciego rodzaju nazywamy płaszczyznami i oznaczamy za pomocą α, β, χ […]. Przedstawiamy sobie punkty, proste i płaszczyzny w określonych relacjach wzajemnych, wyrażanych przez takie słowa, jak *leżeć, pomiędzy, przystający, równoległy, ciągły* […]. Nie jest nic powiedziane o tym, czym są te przedmioty. Mamy prawo (wolność) przedstawiać je sobie jakkolwiek — byle było to zgodne z następującymi po tej wypowiedziami aksjomatami.[13]

Wypowiedź Hilberta można podsumować następująco: przedmioty geometrii są zupełnie dowolne, ważne tylko, by spełniały warunki nałożone przez aksjomaty. Innymi słowy, syntaksa geometrii nie posiada zamierzonego modelu.

W tym duchu można by też próbować zinterpretować sentencję Hilberta z roku 1891. Nie pozwala jednak na to kontekst powstania sentencji — wykład Wienera i arytmetyka Dedekinda. Nakazują one widzieć model zamierzony geometrii w dziedzinie przedmiotów abstrakcyjnych.

Powstaje też pytanie, czy *Grundlagen der Geometrie* nie niosą już zapowiedzi metodycznego nominalizmu, czyli zupełnego abstrahowania od zawartości treściowej syntaksy matematyki. Było to stanowisko wiązane przez Hilberta z wymogiem ścisłej formalizacji matematyki w latach dwudziestych XX wieku.

Wydaje się, że w 1899 takiej zapowiedzi można by się dopatrywać. Z drugiej strony w swym wystąpieniu na III Międzynarodowym Kongresie Matematyków

---

[12] Przedmioty abstrakcyjne Dedekinda (liczby naturalne), Wienera i Hilberta (punkty, proste, płaszczyzny) posiadają minimalną liczbę prostych, wyłącznie relacyjnych własności. Widoczne to było przede wszystkim w przytoczonym cytacie z Dedekinda. W istocie zatem przedmioty abstrakcyjne są pewnymi strukturami. Zatem w prezentowanej koncepcji przedmiotów abstrakcyjnych można się już dopatrywać charakterystycznego dla niektórych dzisiejszych kierunków filozofii matematyki strukturalizmu.

[13] „Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C. Die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit a, b, c. Die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α, β, χ […] Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen durch Worte wie *liegen, zwischen, kongruent, parallel, stetig* […] Es wird nichts darűber gesagt, was die Dinge dieser Systeme sind. Wir haben die Freiheit uns darunter vorzustellen, was wir wollen — wenn es nur mit den Aussagen der dieser Erklärung folgenden Axiome verträglich ist", D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart 1899, 1968[10], Teubner, s. 2.

w Heidelbergu w roku 1904 Hilbert silne założenia ontologiczne (przedmioty matematyczne jako *Seiende und Nicht-Seiende Gedankendinge*) angażował w dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych.[14] To nakazywałoby ostrożność wobec hipotezy, że matematyk z Getyngi już w 1899 stał na stanowisku metodycznego nominalizmu.

5. ZAKOŃCZENIE

Podsumowując niniejsze analizy, należy stwierdzić, że niewątpliwie w ciągu linii rozwojowej idei, prowadzących do koncepcji abstrakcyjnej geometrii z sentencji Hilberta (1891), stoi koncepcja abstrakcyjnej arytmetyki Dedekinda z roku 1888. Koncepcję abstrakcyjnej nauki Dedekinda podjął i starał się dostosować do aktualnego stanu geometrii Wiener. Hilbert, któremu wykład Wienera zwrócił między innymi uwagę na abstrakcyjną arytmetykę Dedekinda, stworzył już w roku 1891 koncepcję abstrakcyjnej geometrii. Realizacją tej koncepcji — w nieco innym kontekście — były *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899.

Kwestię źródeł Hilbertowskiej koncepcji geometrii można by pociągnąć jeszcze dalej wstecz. Trzeba by zapytać, skąd wzięła się Dedekindowska arytmetyka abstrakcyjna. Wydaje się, że matematyk z Brunszwiku swój pomysł wziął z algebry abstrakcyjnej, którą sam współtworzył — był on twórcą teorii pierścieni. Zatem ostatecznie w algebrze — nie tylko tej XIX-wiecznej, ale chyba nawet Kartezjańskiej — można by się doszukiwać pierwotnego źródła koncepcji geometrii jako nauki abstrakcyjnej, którą w swej sentencji w 1891 roku zasygnalizował Hilbert. Tę konkluzję trzeba skomentować następująco: to kolejny dowód głębokich, historycznych i merytorycznych związków geometrii z algebrą.

[14] D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Mathematik*, [w:] *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13 August 1904*, red. L. Koenigsberger, Leipzig, 1905, Teubner, s. 176-177 (174-185).