Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 2(78)

Jerzy Pogonowski

Kilka uwag o intuicji matematycznej

Kontekst *uzasadniania* w matematyce konstytuowany jest przez *dedukcję* (przeprowadzanie dowodów) oraz *obliczenia*. Niezbywalnym składnikiem kontekstu *odkrycia* jest natomiast *intuicja matematyczna*. Nie wnikamy tutaj w to, jakie procesy psychiczne związane są z poznaniem intuicyjnym. Intuicje matematyczne traktujemy jako przekonania zwerbalizowane. Matematyk może nie umieć powiedzieć, *dlaczego* żywi jakieś przekonania intuicyjne. Intuicję obiektu matematycznego (*intuition of*) traktujemy jako wtórną wobec żywienia sądów intuicyjnych (*intuition that*): intuicyjne poznanie obiektu sprowadza się do tego, co (intuicyjnie) o nim sądzimy.

Gdzie widoczna jest intuicja matematyczna w działaniu? Po pierwsze, w *aksjomatach* teorii matematycznych — są one wszak przyjmowane na wiarę, bez uzasadnienia dowodem. Trzeba pamiętać, że droga do aksjomatycznego ujęcia danej dyscypliny matematycznej może być długa, bywa ono poprzedzone kumulacją wiedzy o obiektach tej dyscypliny. Po drugie, intuicja przejawia się w *praktyce badawczej* matematyków: stawianie hipotez, przeprowadzanie konstrukcji, uogólnianie, odwoływanie się do analogii — wszystkie te czynności motywowane są nie tylko już uzyskaną wiedzą, lecz także żywionymi przekonaniami intuicyjnymi. Dowodzenie jest potwierdzaniem intuicji. Po trzecie, wykorzystujemy odwołania do intuicji w *dydaktyce matematyki*, gdy np. za pomocą rysunków, obrazowych skojarzeń, wskazówek indukcyjnych lub powołań się na analogie wspomagamy rozumienie dowodów oraz konstrukcji.

Intuicje doświadczenia potocznego są dość stabilne, natomiast intuicje matematyczne bardziej dynamiczne, zwłaszcza te zaawansowane, żywione przez zawodowych matematyków. Związki intuicji z *oczywistością* wcale nie są całkiem oczywiste. Pewne twierdzenia narzucają się nam jako całkowicie oczywiste, a ich dowody mogą być wielce skomplikowane: dla przykładu, takie jest twierdzenie Jordana o krzywej zamkniętej na płaszczyźnie. Z drugiej strony, czasem łatwy dowód prowadzi do twierdzenia jakoś niezgodnego co najmniej z pewnymi intuicjami potocznymi — za przykład może tu chyba służyć stosowanie metody przekątniowej.

Źródła intuicji matematycznych są bodaj dwojakie. Po pierwsze, przekonania intuicyjne mogą być zdeterminowane przez nasze *uposażenie poznawcze*. Podkreśla się często wizualny charakter intuicji matematycznych. W konsekwencji, percepcja wzrokowa miałaby narzucać jakieś ramy przekonaniom intuicyjnym. Można oczywiście pytać, czy inna konstrukcja biologiczna podmiotów poznających oraz inne warunki ich doświadczenia potocznego prowadzić mogłyby do innej matematyki. Czy Rozumne Kleksy w jedynie płynnym otoczeniu, bez dostępu do ciał sztywnych rozpoczęłyby tworzenie geometrii od innych pojęć niż ludzie? Czy dla stworzeń tworzących swoją arytmetykę na, powiedzmy, obrotach w przestrzeni trójwymiarowej (lub siedmiowymiarowej) nieprzemienność operacji arytmetycznych byłaby czymś naturalnym? Wdzięczne to spekulacje, nie jest jednak jasne, czy istotnie przyczyniają się do prób objaśniania genezy i funkcjonowania ludzkiej matematyki. Drugim źródłem intuicji matematycznych jest *przemoc symboliczna* szkoły. Uczenie się matematyki nie ma charakteru pamięciowego, lecz polega przede wszystkim na rozwiązywaniu zadań, analizie przykładów, przeprowadzaniu konstrukcji lub dowodów. Poprawne rozwiązania są nagradzane, niepoprawne korygowane przez nauczyciela. Jak często pisze się w podręcznikach, zadaniem dydaktyki matematyki jest przede wszystkim wykształcanie u uczniów właściwych intuicji matematycznych, natomiast algorytmiczne umiejętności rachunkowe to rzecz mniejszej wagi.

Zawodowi matematycy często wyraźnie deklarują, iż motywacje ich twórczości mają charakter *estetyczny*. Jest ważne, aby konstrukcja, dowód, teoria były piękne. Może warto zwrócić uwagę, że matematycy są przy tym dość zgodni w owych ocenach estetycznych. Widać to chociażby w przeprowadzaniu nowych dowodów twierdzeń już wcześniej udowodnionych, gdy te nowe dowody (z powodu większej przejrzystości, minimalizacji czynionych założeń, większej ogólności) uznawane są za ładniejsze od starych. Dla tych, którzy uważają, że matematykę *tworzymy*, uznawane w tym procesie kryteria estetyczne zbliżają tę działalność raczej do sztuki niż do rzemiosła. Jeśli natomiast ktoś uważa, że matematykę *odkrywamy*, to źródeł zachwytu nad nią będzie upatrywał w podziwie dla piękna świata Platońskich idei.

Na *zmienność* intuicji matematycznych wpływ mają różne czynniki. Zawsze, gdy napotykamy *antynomię*, staramy się ją usunąć. Może to pociągać za sobą dokonanie zmiany aksjomatów teorii, a więc zmiany pewnych dotąd żywionych przekonań intuicyjnych. Sztandarowym przykładem jest antynomia Russella, która zmusza nas do uznania, że nie istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich tych zbiorów, które nie są własnymi elementami. Podobnie, nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, nie istnieje zbiór wszystkim liczb porządkowych, nie istnieje zbiór wszystkich liczb kardynalnych. W ogólności, nie każda własność wyznacza zbiór. Pozbywamy się tego typu antynomii, odpowiednio formułując aksjomat wyróżniania w aksjomatycznej teorii mnogości: własność wyznacza podzbiór pewnego danego już wprzódy zbioru.

Do zmiany intuicji matematycznych doprowadzać mogą także ujawnione *paradoksy*. Wykrycie paradoksu może skłaniać do zastąpienia uznawanego dotąd niedokładnego rozumienia jakiegoś pojęcia przez rozumienie oparte na precyzyjnej definicji. Dla przykładu, odwołanie się do intuicyjnego postulatu Euklidesa, głoszącego iż całość jest większa od części (wraz z przekonaniem, że wielkości są zawsze porównywalne) prowadziło do uznania (np. przez Proklosa, Galileusza, Bolzana) za paradoksalny faktu, iż zbiory nieskończone są równoliczne ze swoimi podzbiorami właściwymi. Uznanie (przez Dedekinda) tej własności za definiującą zbiory nieskończone przynosi m.in. tę konsekwencję, że odtąd rozumienie pojęcia zbioru nieskończonego zakłada zgodę na uznawanie owej własności jako wyznaczającej zbiory nieskończone. Nasze intuicje dotyczące zbiorów nieskończonych zostały zmodyfikowane, w tym sensie, że uzyskały wsparcie jednoznaczną definicją.

W pewnych sytuacjach wykrycie paradoksu *nie* przyczynia się jednak do zmiany: ani intuicji potocznych, ani matematycznych, lecz pozostaje jedynie wskaźnikiem, że owe dwa rodzaje intuicji rozchodzą się, zaczynają się istotnie różnić. Tak jest np. w wypadku twierdzenia Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli: musimy uznać, że nasze potoczne intuicje dotyczące miary nie przystają do pewnych sytuacji rozważanych w matematycznej teorii miary. Podobnie, sfera rogata Alexandera (homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową i mająca tę własność, że obszar wewnątrz sfery rogatej jest homeomorficzny z obszarem wewnątrz sfery dwuwymiarowej, ale obszar na zewnątrz sfery rogatej nie jest homeomorficzny z obszarem na zewnątrz sfery dwuwymiarowej) dostarcza przykładu, iż musimy pożegnać się z intuicjami potocznymi przy badaniu pewnych skomplikowanych tworów topologicznych.

Kolejnym powodem akceptowania zmian w przekonaniach intuicyjnych mogą być celowo realizowane *programy badawcze*. Gdy nie jesteśmy zadowoleni z intuicji dotąd powiązanych z pewnymi pojęciami oraz rozumowaniami, możemy żądać, aby te pojęcia oraz dotyczące ich rozumowania były odtąd pojmowane w inny, wyraźnie sprecyzowany sposób. Tu dobrym przykładem jest przeprowadzony w XIX wieku program *arytmetyzacji analizy*. Występujące dotąd w rozumieniu pojęć analizy (takich jak: granica, ciągłość, pochodna, całka) odwołania do geometrii oraz kinematyki postanowiono wyeliminować, zastępując je pojęciami odwołującymi się wyłącznie do liczb oraz operacji na nich. To przedsięwzięcie zostało zakończone sukcesem. Zarytmetyzowane podstawy analizy matematycznej akceptowane są i dzisiaj, odwołania do geometrii oraz ruchu przywoływane są teraz już nie dla definiowania pojęć, ale jedynie w celach dydaktycznych, dla ewentualnego wspomagania ich rozumienia.

Podobnie sprawy miały się np. przy rozwijaniu *topologii algebraicznej*. O niektórych własnościach przestrzeni topologicznych łatwiej mówić i przeprowadzać dowody, gdy znajdzie się odpowiadające im własności algebraiczne stowarzyszone z tymi przestrzeniami.

Bywa jednak i tak, że proponowany program badawczy musi zostać poddany istotnym zmianom, gdyż okazuje się, że pierwotnie zakładany jego cel nie może zostać osiągnięty. Tak rzeczy się miały np. w przypadku programu Hilberta, który zakładał, że możliwe będzie ujęcie całości matematyki w ramach jednego systemu aksjomatycznego oraz pokazanie, w dodatku środkami finitarnymi, niesprzeczności i zupełności takiego systemu. Uzyskane na początku lat trzydziestych XX wieku twierdzenia o niezupełności bogatszych systemów formalnych oraz niemożliwości dowodów ich niesprzeczności w nich samych pokazały, że pierwotny program musi ulec modyfikacji. Odtąd zatem porzucamy pewne intuicyjne przekonania na temat związku między prawdą i dowodem w matematyce.

Intuicje matematyczne podlegają wreszcie zmianom na skutek *powiększania się wiedzy matematycznej*. Jeśli ktoś chciałby utrzymywać, że poznanie intuicyjne, z samej definicji, nie może być uzasadniane przez cokolwiek, a w szczególności przez zgromadzoną wiedzę, to może zgodzi się mówić, że to nie „stare" intuicje ulegają zmianom, lecz raczej „rodzą się" jakieś „nowe" intuicje (a intuicje „stare" zostają porzucone, „giną"). Przypominamy, że proponujemy rozumieć intuicje matematyczne jako pewne zwerbalizowane przekonania, a więc zmiany intuicji rozumieć będziemy jako zmiany przekonań. Dla przykładu, dość długo wierzono, że każde równanie algebraiczne jednej zmiennej ma rozwiązanie przez pierwiastniki. Dopiero wyniki Ruffiniego oraz Abela wykazały, że taka ogólna metoda rozwiązania nie istnieje dla równań stopnia większego od czterech. Dokonała się zmiana myślenia o równaniach algebraicznych, a wraz z rozpoczęciem badań nad strukturami algebraicznymi różnych typów (grupy, algebry Boole'a, pierścienie, ciała itd.) nastąpiła zmiana w myśleniu o celach badań algebraicznych w ogólności.

Czy sensowne jest mówienie, że intuicje matematyczne jakoś *podążają za standardem, normalnością*? Odkrycia matematyczne, skoro przynoszą coś nowego, powinny przecież polegać także na jakimś wyjściu poza standard, poza to, co dobrze już znane. Pojęcia tego rodzaju co „standard" oraz „normalność" są nacechowane pragmatycznie. O pewnych obiektach matematycznych mówimy, że „dobrze się zachowują", w tym sensie, że są wzorcowe, prototypowe, użyteczne w określonych aplikacjach. Tak więc, przestrzenie Hausdorffa „zachowują się lepiej" niż całkiem ogólne przestrzenie topologiczne, zbiory Borelowskie „zachowują się lepiej" niż całkiem dowolne zbiory, funkcje analityczne „zachowują się lepiej" niż dowolne funkcje ciągłe (czy nawet gładkie) itd. „Dobrze się zachowywać" nie oznacza wcale „być w większości", jak widać to choćby w przypadku funkcji analitycznych bądź wielościanów foremnych. Elementarne intuicje matematyczne wiążemy z obiektami „dobrze oswojonymi", często spotykanymi w praktyce badawczej.

Obiekty, które nie są „standardowe" („zwykłe", „normalne", „dobrze się zachowujące"), to *wyjątki* lub *patologie*, przy czym to drugie określenie jest bardziej nacechowane pragmatycznie niż pierwsze. Bycie *wyjątkiem* w jakiejś klasie obiektów oznacza różnienie się od pozostałych obiektów tej klasy ze względu na posiadanie pewnych dodatkowych cech, bądź wręcz przeciwnie, ze względu na brak niektórych cech, które pozostałe obiekty rozważanej klasy posiadają. Dla przykładu, wielościany foremne są wyjątkowe w klasie wszystkich wielościanów ze względu na mnogość występujących w nich symetrii. Z drugiej strony, grupy sporadyczne są wyjątkowe wśród grup skończonych ze względu na to, że nie mieszczą się w żadnej klasie podziału wszystkich grup skończonych na klasy, z których każda zbiera grupy o wyróżnionych zestawach własności. Natomiast przez obiekt *patologiczny* w jakiejś klasie rozumiemy obiekt, który jest „niechciany", którego własności są jakoś rażąco niezgodne z naszymi dotychczasowymi wyobrażeniami na temat tego, jak powinny wyglądać obiekty tej klasy. W tym sensie obiektami patologicznymi są np. funkcje ciągłe acz nigdzie nieróżniczkowalne (krzywa Weierstrassa, krzywe Peany i Hilberta wypełniające kwadrat jednostkowy). Obiekty uważane za patologiczne w momencie ich odkrycia mogą zostać później „oswojone" — dziś już chyba żaden zawodowy matematyk nie nazwie zbioru Cantora obiektem patologicznym, nazywany on jest tak bodaj jedynie w pracach popularyzujących matematykę.

Na marginesie zwróćmy uwagę, że np. *model standardowy* arytmetyki Peana jest właściwie jej modelem wyjątkowym w całym kontinuum jej przeliczalnych, wzajemnie nieizomorficznych modeli: jest modelem *pierwszym*, jedynym modelem *dobrze uporządkowanym*, jedynym modelem *rekurencyjnym*. Ustalenie tej wyjątkowości modelu standardowego arytmetyki nie jest możliwe ani środkami czysto syntaktycznymi, ani nawet semantycznymi — trzeba w tym celu wejść na poziom metajęzyka.

Czy nasze intuicje matematyczne ulegają zmianie, gdy przychodzi im zmierzyć się z obiektami patologicznymi? Podkreślmy: nie chodzi tu o rozwijanie intuicji potocznych, lecz wyłącznie o intuicje matematyczne. Badania matematyczne wykraczają daleko poza zakres doświadczenia potocznego, nie ma żadnych powodów, dla których na kolejnych, coraz bardziej zaawansowanych poziomach poznania matematycznego mielibyśmy stale odwoływać się do intuicji potocznych bądź nawet całkiem elementarnych intuicji matematycznych. Można chyba zaryzykować tezę, że wyrafinowane intuicje matematyczne wręcz zrywają związek z intuicjami potocznymi, że są przekonaniami *jakościowo* różnymi (od potocznych) ze względu na sferę doświadczenia, której dotyczą, i to zarówno wtedy, gdy rozumiemy przedmiot tego doświadczenia jako byt Platoński (matematyka odkrywa swoje obiekty), jak i wtedy, gdy traktujemy tę działalność jako swego rodzaju twórczość artystyczną (matematyka tworzy swoje obiekty).

Związki obiektów patologicznych z paradoksami mogą być różnorakie. Dla przykładu, uważane za paradoksalne twierdzenie Smale'a o możliwości „przenicowania" sfery dwuwymiarowej w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej dotyczy całkiem „zwykłego" obiektu — dobrze oswojonej sfery dwuwymiarowej. Także pojęcie homotopijnej równoważności, występujące w dowodzie tego twierdzenia jest całkiem naturalne. Co więcej, możliwe są fizyczne „wizualizacje", ilustrujące owo „wywracanie sfery na nice". Tak więc, naturalne działania na zwykłych obiektach dają paradoksalny wynik. Z drugiej strony, np. sfery egzotyczne (które są homeomorficzne, lecz nie są dyfeomorficzne ze „zwykłymi") sferami nazywane są (dzisiaj) obiektami patologicznymi. Być może praktyka badawcza doprowadzi do „oswojenia" takich obiektów i do zmiany naszych intuicyjnych poglądów dotyczących rozumienia struktur różniczkowych. Podobnie, być może kiedyś będziemy patrzyli na fakt istnienia kontinuum wzajem niedyfeomorficznych struktur na przestrzeni czterowymiarowej (jest to przy tym jedyny wymiar, w którym na całej przestrzeni określić można strukturę egzotyczną) z całkiem innej perspektywy. By wesprzeć się trochę banalnym przykładem: liczba dwa jest jedyną parzystą liczbą pierwszą, ale nie sprawia to, że uważamy ją za patologiczną liczbę pierwszą.

Czy zawodowi matematycy mogą mieć *istotnie różne* intuicje matematyczne? Jeśli tak, to czy można zasadnie mówić, że intuicje żywione przez jednego matematyka są *błędne*, a *trafne* są te, które hołubi inny matematyk? Wydaje się, że w ramach matematyki (klasycznej) dąży się do *unifikacji* intuicji. Wielkie spory w matematyce (np. Hamiltona i Grassmanna w sprawie rachunku wektorowego czy Newtona i Leibniza w sprawie podstaw rachunku różniczkowego i całkowego) nie spowodowały żadnego trwałego rozszczepienia matematyki. Newton posługiwał się intuicjami geometrycznymi oraz odwoływał się do kinematyki, rachował na dobrze określonych wartościach, stosował przejścia graniczne. Podejście Leibniza było arytmetyczne: postulował istnienie wielkości nieskończenie małych, na których dokonywał rachunków. Podejście Newtona zyskało solidne podstawy dopiero z chwilą arytmetyzacji analizy, dobrą zaś arytmetyczną interpretację dla nieskończenie małych Leibniza znajdujemy dopiero w analizie niestandardowej. Dzisiaj spór Newtona z Leibnizem ma już wartość jedynie historyczną, mówi coś na temat kształtowania się intuicji leżących u podstaw rachunku różniczkowego i całkowego. Całkiem osobną sprawą jest to, czy uznamy, że z chwilą arytmetyzacji analizy udało nam się już definitywnie, jednoznacznie i precyzyjnie określić istotę *ciągłości* (oraz *kontinuum*). Są to bowiem pojęcia czysto matematyczne, nie ma np. żadnych rozstrzygających dowodów na to, iż przestrzeń fizyczna (oraz czas) ma naturę ciągłą czy też dyskretną.

Samo pojęcie *obliczalności* ma, jak wiadomo, charakter intuicyjny. Zbudowano wiele różnych matematycznych reprezentacji tego pojęcia (funkcje rekurencyjne, maszyny Turinga, algorytmy Markowa, rachunek lambda Churcha itd.), jak się jednak okazało, wszystkie te ujęcia dają ostatecznie tę samą klasę funkcji. Nasze przekonanie, że uchwyciliśmy w ten sposób trafnie intuicję obliczalności, znane pod nazwą tezy Churcha–Turinga również jest przekonaniem intuicyjnym, jedynie potwierdzanym przez fakt równoważności rozważanych reprezentacji matematycznych.

Warto też zauważyć, że z chwilą wykrycia istnienia całego szeregu zdań *nierozstrzygalnych* w bogatszych teoriach matematycznych intuicyjne przekonania żywione przez zawodowych matematyków także nie uległy rozszczepieniu. Nie budujemy dwóch różnych systemów matematyki — jednego z uznaniem prawdziwości hipotezy kontinuum, a drugiego z uznaniem prawdziwości jej zaprzeczenia. Przyjmujemy do wiadomości fakt istnienia teorii nierozstrzygalnych oraz stan rzeczy polegający na tym, że istnieją istotne różnice między prawdą matematyczną a dowodem, przeprowadzanym w ustalonym systemie formalnym. Co najwyżej staramy się badać nowe, mocniejsze teorie, w których dodatkowe aksjomaty lub dodatkowe reguły wnioskowania mogłyby ukazywać odniesienie przedmiotowe teorii wyjściowej w pełniejszym świetle. Tak więc, chociaż np. aksjomaty istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych nie mogą rozstrzygnąć niczego w kwestii prawdziwości hipotezy kontinuum, to współcześnie uważa się, że rozważanie ich jest celowe, m.in. z dwóch co najmniej powodów: po pierwsze, aksjomaty te związane są z „mocą dowodową" teorii, a po drugie, tak właśnie chcemy widzieć uniwersa modeli teorii mnogości — jako zawierające możliwie najwięcej zbiorów. Widać tu analogię z aksjomatem zupełności w systemie geometrii Hilberta.

„Błędne" intuicje, rozumiane jako wiodące matematykę w jakiś ślepy zaułek, o ile w ogóle powstają, to trudne są do rejestracji, jako że są zapominane, nie są kultywowane w publikacjach. „Błędne" w tym sensie intuicje należy oczywiście odróżniać od „zwyczajnych" błędów w praktyce badawczej, które powstają przez nieuwagę, lenistwo, niekompetencję. Zdarza się również, że pewne celowo konstruowane sofizmaty mogą przyczynić się do rozwoju jakiegoś fragmentu wybranej dyscypliny matematycznej. Dobrym przykładem są tu chyba aporie Zenona z Elei albo rzekome dowody paradoksalnych stwierdzeń dotyczących miary, wykorzystujące jedynie pojęcie równoliczności zbiorów punktowych.