Filozofia Nauki
Rok XIX, 2011, Nr 4(76)

Wojciech Krysztofiak

Fakty matematyczne w świetle logiki niefregowskiej*

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie dowodu tezy, że wprowadzenie funktora identyczności zdaniowej do języka dowolnej teorii arytmetycznej pierwszego rzędu oraz nadbudowanie danej teorii nad minimalnym niefregowskim rachunkiem zdaniowym (SCI) generuje — na gruncie semantyki przyjmującej zasadę Barwise'a i Perry'ego (BP) — fałszywe zdania stwierdzające identyczność faktów matematycznych.[1] Jeśli dowód jest poprawny, to należy wyprowadzić wniosek, że logika niefregowska jest nieskuteczna jako narzędzie formułowania formalnych ontologii faktów matematycznych. Pierwsza część artykułu obejmuje rozważania uzasadniające zastosowaną strategię argumentacyjną. W drugiej części jest przeprowadzony dowód tezy artykułu. Trzecia część jest poświęcona wyprowadzeniu najważniejszych „implikacji filozoficznych" zaprezentowanego dowodu.

Dotychczas konstrukcje arytmetyczne pierwszego rzędu nadbudowane nad logiką niefregowską nie zostały przebadane na gruncie metamatematyki. W związku z tym nie skonstruowano niefregowskich modeli semantycznych dla niefregowskich teorii arytmetycznych. Wynik uzyskany w niniejszym artykule można interpretować jako pokazujący to, że w pewnej klasie zamierzonych modeli, w których prawdziwe

* Artykuł został napisany w ramach projektu sfinansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/B/H51/04029.

[1] Niniejszy artykuł rozwija więc myśl R. Wójcickiego, który w swoim bardzo wpływowym artykule (Wójcicki 1984) wyraża ogromną rezerwę wobec projektu logiki oraz semantyki niefregowskiej. Wójcicki stwierdza: „Swe badania traktował Suszko jako szczególnie ważne. […] Z całą więc pewnością, przykra dla niego była świadomość, że jego entuzjazm podziela tylko niewielu, a logika niefregowska spotyka się z bardzo skromnym zainteresowaniem" (s. 3-4). Logika niefregowska zaprezentowana jest w pracy (Omyła 1986), a problematyka faktów i stanów rzeczy w (Biłat, red. 2009).

są arytmetyczne teorie pierwszego rzędu, niefregowskie arytmetyczne teorie pierwszego rzędu (z regułą Churcha–Curry'ego lambda-konwersji) są fałszywe.

1. STRATEGIA ARGUMENTACYJNA

Zaprezentowana w paragrafie drugim argumentacja przebiega według następującego schematu: (1) Pierwsza faza argumentacji sprowadza się do przeprowadzenia aksjomatycznego dowodu zdania o postaci: $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ (gdzie „•" jest funktorem identyczności międzyzdaniowej), na gruncie dowolnej teorii arytmetycznej pierwszego rzędu wzbogaconej o aksjomat refleksywności dla funktora identyczności międzyzdaniowej oraz Churcha–Curry'ego regułę lambda-konwersji (*Art* + KL + A + λ-conv). (2) W drugiej fazie argumentacji zaprojektowany jest model semantyczny dla wcześniej skonstruowanej teorii arytmetycznej. Następnie w ramach teorii opisującej ten model konstruuje się zdanie (Z), które stanowi teoriomodelową parafrazę zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$. (3) W trzeciej fazie argumentacyjnej, zakładając zasadę BP, wykazuje się fałszywość zdania (Z), a więc tym samym pośrednio — zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$. Przedstawiona strategia wymaga więc swojego uzasadnienia pod następującymi względami: (1) zasadności akceptacji w semantyce dla teorii arytmetycznych zasady BP; (2) użycia teorii mnogości w konstrukcji modelu dla *Art* + KL + A + λ-conv; (3) użycia spójnika identyczności międzyzdaniowej w konstruowaniu modelu dla *Art* + KL + A + λ-conv.

1.1. Zasada Barwise'a–Perry'ego

Zasada BP stwierdza, że fakty pojmowane jako uprawdziwiacze zdań, które posiadają różne składniki, są różnymi faktami (uprawdziwiaczami) (Barwise, Perry 1981, s. 387-403; Barwise, Perry 1983, s. 24-26).[2] Zasada BP posiada zastosowanie tylko w odniesieniu do tych formalnych ontologii sytuacji (faktów, stanów rzeczy i innych bytów propozycjonalnych), w których sytuacje, fakty czy stany rzeczy są traktowane jako struktury zsyntetyzowane z indywiduów, klas (ewentualnie własności) czy też funkcji. Nie można więc tej zasady stosować do koncepcji ontologiczno-semantycznych, zgodnie z którymi sytuacje (fakty, stany rzeczy) są bytami pierwotnymi.

Akceptacja lub odrzucenie zasady BP jest motywowane założeniami metafizyczno-epistemologicznymi. Zwolennicy zasady BP wskazują na to, że składniki sytuacji, faktów czy stanów rzeczy umożliwiają ich identyfikowanie. Aby więc rozstrzygnąć to, czy dwa zdania denotują tę samą sytuację, należy sprawdzić, czy korespon-

[2] Barwise i Perry nie formułują zasady BP w sposób wyraźny. Dopiero na podstawie analizy ich wypowiedzi krytykujących argumenty typu: *slingshot*, można zasadnie przypisać im akceptację tej zasady. Tak, na przykład, czyni Donaho, przypisując Barwise'owi i Perry'emu twierdzenie głoszące to, że fakty, które posiadają różne składniki, są różnymi faktami (Donaho 1998, s. 38).

dujące terminy składowe denotują te same obiekty składowe. Z kolei zwolennicy pierwotności sytuacji zakładają, że

> […] o sytuacjach (a nie przedmiotach) potrafimy w pierwszej kolejności rozstrzygnąć, że są identyczne […], że przedmioty same z siebie są przezroczyste, a stają się widoczne dopiero wówczas, gdy znajdą się w określonej sytuacji (Wójtowicz 2009, s. 27).

Identyczność przedmiotów jako składowych sytuacji jest wówczas definiowana jako współwystępowanie w tych samych sytuacjach: $x = y \equiv_{df} (\forall s)(W(x, s) \equiv W(y, s))$, gdzie W jest relacją występowania przedmiotu w sytuacji (Wójtowicz 2009, s. 27-28). Czy z punktu widzenia semantyki teorii matematycznych należy przyjąć BP, czy też odrzucić tę zasadę?

Z punktu widzenia praktyki matematycznej, aby formułę: $\underline{2 = 1 + 1}$ uznać za prawdę, należy przeprowadzić jej dowód na gruncie arytmetyki PA. Zakładając prawdziwość PA, na mocy dowodu stwierdzamy prawdziwość udowodnionych zdań identycznościowych. W takich dowodach wykorzystujemy definicję dodawania, definicje stałych (w tym wypadku: $\underline{1}$ oraz $\underline{2}$) i w końcu regułę zastępowania definicyjnego. Przekształcenia składające się na dowód analizowanej formuły nie prowadzą na żadnym etapie przeprowadzania dowodu do formuły wyrażającej nieodróżnialność kontekstową termów: $\underline{2}$ oraz $\underline{1 + 1}$. Jeśli więc można zidentyfikować dwa przedmioty matematyczne bez stwierdzenia tego, że termy oznaczające dane przedmioty są nieodróżnialne kontekstowo, to zabieg redukcji identyczności przedmiotów do występowania ich w tych samych sytuacjach jest matematycznie zbędny i niezgodny z praktyką badawczą matematyki.[3] Jeśli więc zasada pierwotności ontologicznej sytuacji względem przedmiotów jest nie do utrzymania na gruncie praktyki matematycznej, to wówczas należy przyjąć jakąś wersję zasady BP, aby móc, ewentualnie, identyfikować w jakiś sposób sytuacje denotowane przez zdania matematyczne. Znaczy to, że zasady semantyki niefregowskiej dla teorii matematycznych muszą inkorporować jakąś wersję zasady BP.[4]

Akceptację zasady BP można również uzasadnić na gruncie teoriomnogościowego paradygmatu modelowania sytuacji, faktów czy stanów rzeczy. Jeśli korelatami

---

[3] Oto dowód formuły $\underline{1 + 1 = 2}$: $1 + 1 = 1 + \mathrm{Seq}(0) = \mathrm{Seq}(1 + 0) = \mathrm{Seq}(1) = \mathrm{SeqSeq}(0) = 2$. W dowodzie tym nie jest użyta żadna wersja zasady redukującej identyczność termów : $\underline{1 + 1}$ oraz $\underline{2}$ do ich nieodróżnialności kontekstowej. Oczywiście, reguła zastępowania definicyjnego jest wersją zasady nieodróżnialności kontekstowej dla termów: definiowanego i definiującego. W tym wypadku jedynie stwierdza się, że nieodróżnialne kontekstowo są: (i) $\underline{1}$ oraz $\underline{\mathrm{Seq}(0)}$; (ii) $\underline{2}$ oraz $\underline{\mathrm{SeqSeq}(0)}$. W wypadku dowodu formuły: $\underline{\mathrm{Seq}(0) + \mathrm{Seq}(0) = \mathrm{SeqSeq}(0)}$, nawet reguła zastępowania definicyjnego nie jest użyta (o ile definicja dodawania jest traktowana jako dodatkowy aksjomat PA).

[4] Odpowiednikiem zasady semantycznej BP w niefregowskim rachunku logicznym pierwszego rzędu mógłby być następujący aksjomat: $P(x_1,\ldots,x_n) \bullet P(y_1,\ldots,y_n) \rightarrow x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$, gdzie „$\bullet$" jest funktorem identyczności międzyzdaniowej. Aksjomat ten nie występuje w aksjomatyce podstawowej logiki niefregowskiej (zob. Wójtowicz 2007, s. 128-129). Należy dodać, że w takiej wersji zasada BP jest za słaba, aby wyprowadzić sprzeczność logiczną teorii: (*Art* + KL + A + λ-conv + BP).

semantycznymi zdań są konstrukcje teoriomnogościowe nad korelatami semantycznymi składników zdań, to jeśli dwie konstrukcje teoriomnogościowe, rozumiane jako korelaty semantyczne zdań, są identyczne, to składniki tych konstrukcji również są identyczne. Stąd, poprzez transpozycję, wynika to, że jeśli korelaty składników zdań są różne, to korelaty semantyczne zdań są również różne.

Zasadę BP można sformułować w rozmaitych wariantach w zależności od wyboru kategorii wyrażeń, dla których określona jest funkcja posiadania korelatu semantycznego. Można więc mówić o wersjach oszczędnych zasady BP oraz jej wersji nieoszczędnej. Zgodnie z wersjami oszczędnymi, nie wszystkie wyrażenia składowe dowolnego zdania posiadają swoje korelaty semantyczne. W wypadku wersji nieoszczędnej, dla każdego wyrażenia składowego dowolnego zdania określona jest funkcja posiadania korelatu semantycznego. Wersje oszczędne są uzasadniane na gruncie rozmaitych koncepcji filozoficznych, w których podaje się kryteria demarkacji pomiędzy kategoriami wyrażeń posiadających korelaty semantyczne a kategoriami wyrażeń nieposiadających takich korelatów. Takie kryteria zwykle są interpretowane jako kryteria istnienia bytów określonych kategorii.[5] Stąd, wersje oszczędne zasady BP są zwykle uwikłane w metafizyczno-teologiczną kwestię dotyczącą tego, co istnieje. Na gruncie wersji nieoszczędnych zasady BP unika się takich metafizyczno-teologicznych dyskusji.

---

[5] Recenzent niniejszego artykułu formułuje następującą, oszczędną wersję zasady BP: Jeśli zbiór denotacji kwantyfikowalnych składników zdania α jest różny od zbioru denotacji kwantyfikowalnych składników zdania β, to zdania α i β opisują dwa różne fakty. Recenzent następnie wnioskuje, na podstawie tak sformułowanej zasady BP, że zdania: $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3]}$ oraz $\underline{[(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ mogą denotować ten sam fakt, gdyż zbiór denotacji kwantyfikowalnych składników obu zdań jest taki sam. Otóż, przyjęcie zasady BP w przywołanej wersji wymaga uzasadnienia. Może nim być Quine'a koncepcja, zgodnie z którą jedynie wyrażenia kwantyfikowalne spełniają funkcję desygnacyjną. Jak wiadomo, koncepcja Quine'a wikła się w metafizyczną kontrowersję pomiędzy nominalizmem a realizmem pojęciowym. Wobec analizowanej wersji zasady BP, można także przyjąć strategię celującą w jej odrzucenie. Skoro akceptacja BP w wersji kwantyfikacyjnej prowadzi do możliwości uznania tego, że zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3]}$ oraz $\underline{[(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ denotują ten sam fakt, a ponieważ taka konsekwencja jest intuicyjnie fałszywa, to należy odrzucić BP w analizowanej wersji. Niech pierwsze ze zdań stanowi model matematyczny następującej sytuacji: (i) Jaś ma milion złotych długu. Po x latach dług Jasia wynosi x + 1 milionów złotych. Po osiągnięciu przez Jasia długu 3 milionów złotych Jaś popełnia samobójstwo. Niech z kolei drugie ze zdań stanowi model matematyczny takiej oto sytuacji: (ii) Jaś ma dwa miliony złotych długu. Po x latach dług Jasia wynosi 2 + x milionów złotych. Po osiągnięciu długu 3 milionów złotych przez Jasia Jaś popełnia samobójstwo. Bez wątpienia obie sytuacje są różne. W sytuacji (i) Jaś popełnia samobójstwo po dwóch latach, natomiast w sytuacji (ii) nieco szybciej, bo już po roku szuka gałęzi, na której się powiesi. Obie sytuacje różnią się jedynie pod względem swoich modeli matematycznych. Jeśli zgodnie z analizowaną wersją zasady BP, oba modele matematyczne reprezentują tę samą sytuację matematyczną, to wówczas nie istnieją żadne czynniki (sytuacje składowe) różnicujące obie analizowane, empiryczne sytuacje złożone. Skoro jednak są one w sposób ewidentny różne, to należy jednak przyjąć, że $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3]}$ oraz $\underline{[(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ denotują różne fakty i w konsekwencji, że BP w wersji kwantyfikacyjnej jest fałszywa.

Nieoszczędną wersję zasady BP można uzasadnić w następujący sposób: Każde wyrażenie w dowolnym zdaniu sformułowanym na gruncie języka matematycznego danej teorii posiada swoje znaczenie rozumiane jako jego sposób użycia. Znaczenia wyrażeń języków matematycznych są wyznaczone przez ich korelaty semantyczne. Innymi słowy, to, jak wyrażenie matematyczne jest używane, zależy od tego, do czego się odnosimy za pomocą tego wyrażenia. Stąd każde wyrażenie posiada swój korelat semantyczny wyznaczony na mocy funkcji denotacji (ekstensji czy korelacji semantycznej). Zaprezentowane uzasadnienie wspiera się na założeniu, zgodnie z którym w językach matematycznych nie funkcjonują wyrażenia posiadające wyłącznie znaczenia w sensie syntaktycznym — z racji wyłącznie bycia obiektem przekształceń językowych. Z punktu widzenia standardowej praktyki konstruowania modeli semantycznych teorii poprzez narzędzia: funkcji interpretacji oraz funkcji wartościowania logicznego, założenie o „nieoszczędności semantycznej" wyrażeń języków matematycznych jest zasadne.[6]

W pracy przyjmuje się więc zasadę BP w następującym sformułowaniu:

(BP) Jeśli zbiór semantycznych korelatów składników danego zdania jest różny od zbioru semantycznych korelatów składników drugiego zdania, to dane zdania denotują dwie różne sytuacje.

Takie sformułowanie zasady BP nie rozstrzyga o tym, które składniki zdań posiadają swoje korelaty semantyczne; zależy to od stopnia „oszczędności" teorii semantycznej, na gruncie której akceptuje się zasadę BP.

1.2. Teoriomnogościowe modelowanie sytuacji

Arytmetyczne teorie pierwszego rzędu są teoriami, w których kwantyfikowane są jedynie zmienne indywiduowe. Teorie te więc presuponują istnienie indywiduów reprezentowanych w modelu semantycznym przez zmienne. Modele dla teorii arytmetycznych pierwszego rzędu podpadają pod schemat: $<X, a_1, a_2, O_1, \dots O_i>$, gdzie X

---

[6] W standardowej semantyce logicznej, zasadniczo, wszystkim wyrażeniom przyporządkowywane są, na mocy funkcji interpretacji lub funkcji wartościowania logicznego, korelaty semantyczne. Stałym predykatywnym, stałym funkcyjnym oraz stałym indywiduowym są przyporządkowywane, na mocy funkcji interpretacji, odpowiednio: relacje (lub własności), funkcje oraz indywidua. Zmienne kwantyfikowane są z kolei w odpowiedni sposób wartościowane. Funkcja wartościowania również jest określona na wszelkich formułach zdaniowych. Warunki dla funkcji wartościowania dla odpowiednich typów zdań z uwagi na to, z jakiego głównego funktora są zbudowane, można ująć jako warunki przypisujące odpowiednim funktorom operacje określone na wartościach logicznych. Jedynie kwantyfikatory stanowią wyrażenia, które jest trudno traktować, z punktu widzenia standardowej metody konstrukcji modeli semantycznych, jako posiadające korelaty semantyczne w postaci, na przykład, jakichś operacji (na temat „nieoszczędności" standardowej semantyki logicznej, por. Grzegorczyk 1981, s. 254-255; Grzegorczyk nie posługuje się takim terminem, ale w swoim podręczniku postępuje „nieoszczędnie", definiując funkcję wartościowania logicznego).

jest dziedziną modelu, a_1, a_2 są elementami wyróżnionymi, należącymi do X, a O_1, … O_i są funkcjami (operacjami) określonymi i wykonalnymi w zbiorze X. Przy czym elementy zbioru X funkcjonują jako wartości funkcji wartościowania logicznego dla zmiennych indywiduowych danej teorii. Natomiast funkcje O_1, … O_i stanowią wartości funkcji interpretacji dla stałych pozalogicznych danej teorii pierwszego rzędu. Pod wpływem słynnego *dictum* Quine'a przyjmuje się, że istnienie jest atrybutem przypisywanym wyłącznie wartościom zmiennych kwantyfikowanych z uwagi na funkcję wartościowania logicznego w modelu. Oczywiście, jest to jednostronne ujęcie istnienia, gdyż pomija się w nim funkcję interpretacji stałych pozalogicznych danej teorii. Dlaczego nie można rozszerzyć rozumienia pojęcia istnienia w taki sposób, że istnieć znaczy tyle, co być wartością, z uwagi na funkcję wartościowania logicznego zmiennej związanej lub być wartością funkcji interpretacji stałej pozalogicznej? Zwolennik Quine'owskiej koncepcji istnienia musi podać uzasadnienie tego, dlaczego jedynie funkcja wartościowania logicznego zmiennych presuponuje egzystencję ich wartości semantycznych, podczas gdy funkcja interpretacji stałych pozalogicznych w modelu nie presuponuje egzystencji wartości semantycznych tych stałych. W literaturze przedmiotu ta kwestia jest pomijana. Można przypuszczać, że z powodu takiego, iż funkcję interpretacji stałych pozalogicznych można zredukować do funkcji wartościowania logicznego.[7] Wówczas wszelkie wartości funkcji interpretacji również istnieją w modelu, gdyż funkcja interpretacji stanowi szczególny przypadek funkcji wartościowania logicznego. Jeśli tak, to w modelach teorii arytmetycznych pierwszego rzędu, obok liczb, istnieją również funkcje (operacje) określone i wykonalne na liczbach. W przypadku arytmetyki Peano, w jej modelach istnieją nie tylko liczby naturalne, ale również funkcje arytmetyczne (następnika, dodawania, mnożenia, potęgowania i inne).

Jeśli więc w modelach semantycznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu istnieją funkcje arytmetyczne, to muszą być one „jakoś rozumiane". W praktyce metamatematycznej są one rozumiane w sposób teoriomnogościowy jako zbiory n-tek obiektów; w wypadku teorii arytmetycznych — są one rozumiane jako zbiory n-tek liczb.[8] I właśnie wizualizacje funkcji arytmetycznych za pomocą wykresów w kartezjańskim układzie współrzędnych w sposób dobitny pokazują ich takie rozumienie. Zatem w modelach semantycznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu istnieją

[7] Z daną teorią i jej modelem sprzężonych jest wiele funkcji wartościowania logicznego. Jeśli dziedzina modelu jest nieskończona, to tych funkcji wartościowania logicznego sprzężonych z danym modelem jest nieskończenie wiele. Funkcja interpretacji stałych pozalogicznych w danym modelu jest to funkcja wartościowania charakteryzująca się sztywnością w odniesieniu do wartościowanego wyrażenia. Warunek sztywności można zapisać następująco: $(\forall i)Val_{i,M}(\alpha) = \text{const}$.

[8] Można funkcje rozumieć jako przekształcenia w sensie teorii kategorii. Na gruncie tej teorii, pojęcie przekształcenia jest definiowane jako trójka o postaci: $< \alpha, X, Y>$, gdzie α jest podzbiorem produktu kartezjańskiego $X \times Y$. Teoria kategorii nie jest jednak powszechnie stosowana w konstruowaniu modeli semantycznych na gruncie metamatematyki (nie znaczy to, że nie może okazać się interesującym narzędziem modelowania semantycznego teorii).

n-tki uporządkowane liczb i ich zbiory w postaci funkcji arytmetycznych. Podsumowując, na modele semantyczne arytmetycznych teorii pierwszego rzędu można spojrzeć z trzech punktów widzenia: (i) z punktu widzenia funkcji wartościowania logicznego zmiennych modelowanej teorii; (ii) z punktu widzenia funkcji interpretacji stałych pozalogicznych modelowanej teorii; (ii) z punktu widzenia unifikującego oba wcześniejsze, czyli z punktu widzenia zarówno funkcji wartościowania logicznego, jak i funkcji interpretacji. Zgodnie z pierwszym punktem widzenia, arytmetyka Peano, na przykład, opisuje liczby naturalne. Zgodnie z drugim punktem widzenia, arytmetyka Peano opisuje funkcje arytmetyczne: następnika, dodawania i mnożenia. Zgodnie z trzecim punktem widzenia, arytmetyka PA opisuje zarówno liczby naturalne, jak i funkcje arytmetyczne.

Powiedzenie więc, że trójka uporządkowana <1, 2, 3> nie istnieje w modelu arytmetyki Peano, gdyż „[…] istnienie takich trójek nie należy do zakresu jej zobowiązań”[9], jest jedynie zasadne z pierwszego punktu widzenia, który wikła się w dogmatyczne stanowisko, zgodnie z którym jedynie zmienne kwantyfikowane teorii, poprzez funkcje wartościowania logicznego, wyznaczają to, co istnieje w modelu teorii. Dogmat kwantyfikacji jako wyłącznego kryterium istnienia wyklucza inne kryteria istnienia obiektów w modelu. W niniejszym artykule przyjmuje się, że nie tylko funkcje wartościowania logicznego zmiennych w modelu są nośnikami zobowiązań ontologicznych, ale także funkcja interpretacji stałych pozalogicznych w modelu niesie z sobą takie zobowiązania egzystencjalne (nie widać intuicyjnych nawet racji na to, dlaczego miałyby istnieć poszczególne liczby naturalne, a nie mogłaby istnieć, na przykład, operacja ich dodawania, o której się nawet „mówi” w aksjomatach arytmetyki PA).

Przyjęcie zaprezentowanego stanowiska nie jest uwikłane w żaden spór z zakresu filozofii matematyki dotyczący statusu ontologicznego liczb. Stwierdzając istnienie operacji: następnika, dodawania czy mnożenia, niczego, poprzez to stwierdzenie, nie rozstrzyga się o statusie ontologicznym liczb; czy są one, na przykład, redukowalne do struktur teoriomnogościowych (zgodnie ze stanowiskiem Fregego czy też, na przykład, neologicyzmem Hecka) czy też nie. Stwierdzając istnienie operacji arytmetycznych, rozstrzyga się jedynie to, że w modelach istnieją struktury teoriomnogościowe ufundowane na liczbach definiujące te operacje.

Warto przypomnieć, że właśnie modelowanie sytuacji matematycznych za pomocą narzędzi teoriomnogościowych wymusza akceptację zasady BP. A skoro modelowanie sytuacji matematycznych poprzez rozmaite struktury teoriomnogościowe jest zdeterminowane poprzez zobowiązania ontologiczne funkcji interpretacji stałych pozalogicznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu, to ostatecznie akceptacja zasady BP jest presuponowana właśnie przez to, że funkcja interpretacji stałych pozalogicznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu jest nośnikiem określonych zobowiązań ontologicznych (choćby takich, że w modelach teorii matematycznych istnieją operacje: następnika, dodawania, mnożenia, poprzednika, potęgowania itd.).

---

[9] Jest to wypowiedź recenzenta niniejszego artykułu.

1.3. Identyczność międzyzdaniowa w sytuacyjnych modelach teorii arytmetycznych

Modele semantyczne arytmetycznych teorii pierwszego rzędu są konstrukcjami teoriomnogościowymi, ustanawianymi przy pomocy odpowiednio zdefiniowanego predykatu teoriomnogościowego. W standardowo rozumianej teorii mnogości nie funkcjonuje żaden operator tworzenia (generowania) sytuacji czy też faktów. Na gruncie teorii mnogości można mówić jedynie o elementach, zbiorach, klasach, rodzinach zbiorów, porządkach, funkcjach, algebrach, przestrzeniach i o innych, jeszcze bardziej skomplikowanych obiektach. Z punktu widzenia teorii mnogości, sytuacje czy też fakty jako byty *sui generis* nie istnieją. Nie znaczy to jednak, że nie można wzbogacić teorii mnogości o pewien operator tworzenia faktów czy też sytuacji. Bez wątpienia taka strategia konstruowania modeli semantycznych dla teorii arytmetycznych z użyciem teorii mnogości wzbogaconej o operator tworzenia faktów teoriomnogościowych jest niestandardowa. Ta jej cecha jest dziedziczona przez niestandardowość pojęcia sytuacji. Jeśli bowiem mają istnieć sytuacje arytmetyczne w modelach semantycznych arytmetycznych teorii pierwszego rzędu, to sytuacje arytmetyczne muszą mieć charakter teoriomnogościowy. A skoro w teorii mnogości nie mówi się o sytuacjach, faktach czy stanach rzeczy, to należy, przynajmniej *ad hoc*, wprowadzić jakiś operator (funktor) tworzenia bytów propozycjonalnych do języka teorii mnogości, aby zbadać ewentualną jego przydatność w modelowaniu „faktowych" światów arytmetycznych.

Strategia wprowadzenia takiego operatora do języka teorii mnogości może przebiegać poprzez zabieg „zadania" logiki niefregowskiej językowi i aksjomatyce teorii mnogości. Na użytek tezy niniejszego artykułu jest wystarczające to, aby teoria mnogości była rozumiana jako ufundowana nad logiką klasyczną rozszerzoną o aksjomaty podstawowego niefregowskiego rachunku zdań SCI. Na gruncie tak rozumianej teorii mnogości można formułować, przykładowo, zdania o postaci: $[\langle 2, 3\rangle \in f_1] \bullet [\langle 1, 3\rangle \in f_2]$, gdzie „$\bullet$" oznacza relację identyczności faktowej (sytuacyjnej). Niefregowskie, teoriomnogościowe zdania identycznościowe na gruncie zamierzonej interpretacji mają właśnie wyrażać identyczność pomiędzy faktami denotowanymi przez zdania związane funktorem identyczności międzyzdaniowej. Dlatego też poniżej wprowadzona zasada (W) jest zasadna.

Zakwestionowanie zasadności zasady (W) implikowałoby zakwestionowanie zasadności nadbudowywania teorii mnogości nad niefregowskim rachunkiem zdań SCI. To zaś prowadziłoby do niemożliwości zdefiniowania ontologicznej kategorii faktów teoriomnogościowych i w rezultacie — do niemożliwości zdefiniowania kategorii faktów arytmetycznych istniejących w modelach semantycznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu. Z takiego punktu widzenia, kwestia istnienia faktów arytmetycznych w modelach semantycznych teorii arytmetycznych byłaby już rozstrzygnięta na mocy zakazu konstruowania modeli semantycznych teorii arytmetycznych na gruncie teorii mnogości ufundowanej nad KL + SCI (gdzie KL to logika klasyczna).

Należy dodać, że użycie logiki niefregowskiej w funkcji narzędzia konstruowania modeli semantycznych teorii jest zgodne z celem, dla którego została przez R. Suszkę zaprojektowana. Otóż, logika niefregowska została stworzona dla celu precyzyjnej artykulacji formalnej ontologii sytuacji wyrażonej w *Traktacie* Wittgensteina. Z kolei praktykę konstruowania modeli semantycznych dla rozmaitych, sformalizowanych teorii można określić jako konstruowanie formalnych ontologii tych teorii.[10] Metamatematyka jako, między innymi, teoria semantycznych modeli sformalizowanych teorii dedukcyjnych obejmuje więc ontologię formalną (obok semantyki formalnej). Tym samym konstruowanie rozmaitych struktur formalnych jako potencjalnych modeli semantycznych dla teorii arytmetycznych przynależy do kompetencji dyscypliny zwanej ontologią formalną. Rozszerzenie więc języka teorii mnogości o funktor identyczności zdaniowej w celu konstruowania faktów arytmetycznych w modelach teorii arytmetycznych jest więc w pełni zgodne z celem, dla którego logika niefregowska została obmyślona.

Funktor identyczności międzyzdaniowej jest również użyty w poniżej zaprezentowanej argumentacji w charakterze narzędzia formalizacyjnego teorii arytmetycznych pierwszego rzędu. Występuje on bowiem w aksjomacie (A) w teoriach arytmetycznych typu: (*Art* + KL + A + λ-conv), będących przedmiotem badania metamatematycznego w niniejszym artykule. Z uwagi na to, że dowolna logika może spełniać dwie różne funkcje względem danej teorii: formalizacyjną (wówczas dana logika jest zadana językowi danej teorii) oraz ontologiczną (wówczas dana logika jest zadana metajęzykowi danej teorii, w którym konstruowany jest jej model semantyczny), można wyróżnić następujące sytuacje metodologiczne: (i) dana logika spełnia zarówno funkcję formalizacyjną, jak i ontologiczną względem danej teorii;[11] (ii) dana logika spełnia funkcję formalizacyjną względem danej teorii i nie spełnia funkcji ontologicznej względem danej teorii;[12] (iii) dana logika nie spełnia funkcji formalizacyjnej względem danej teorii, ale spełnia funkcję ontologiczną.[13] Ponieważ

[10] A. Grzegorczyk, rozpoczynając rozdział „Modele arytmetyki" w swoim podręczniku [Grzegorczyk 1983], tak oto charakteryzuje modelowanie teorii matematycznych: „Badania nad teoriami matematycznymi w dużym stopniu dotyczą związku teorii matematycznej z matematyczną rzeczywistością, o której w teorii mowa. Jeśli badamy teorię matematyczną, możemy zapomnieć na chwilę, w celu opisu jakiej matematycznej rzeczywistości był ona budowana, i pomyśleć, czy nie opisuje ona też przypadkiem jakiejś innej rzeczywistości, która nie była celem teorii" (s. 224). Parafrazując przywołane słowa, celem niniejszego artykułu jest zbadanie, czy czasami teorie matematyczne nie opisują jakiejś innej rzeczywistości — rzeczywistości faktów matematycznych — „która nie była celem teorii".

[11] Z taką sytuacją mamy do czynienia np. w wypadku logiki klasycznej, na gruncie której skonstruowana jest arytmetyka PA, a także modele tejże arytmetyki w metajęzyku teoriomnogościowym.

[12] Z taką sytuacją mamy do czynienia w wypadku logiki intuicjonistycznej, na gruncie której konstruowane są pewne teorie, których modele semantyczne są, jednakże, konstruowane na gruncie logiki klasycznej (na przykład, modele Kripkego dla intuicjonistycznych teorii).

[13] Jest to sytuacja analogiczna do sytuacji (ii). Logika klasyczna nie spełnia funkcji formalizacyjnej względem teorii formułowanych na gruncie logiki intuicjonistycznej, choć w modelowaniu semantycznym tych teorii jest użyta.

sytuacje (ii) oraz (iii) są zasadniczo tego samego typu, należy więc wyróżnić dwa sposoby uwikłania metodologicznego dowolnej logiki względem danej teorii.

Procedury modelowania semantycznego danej teorii w tych sytuacjach są odmienne. Jeśli przyjmie się, że stałe logiczne danej logiki, na gruncie której jest sformułowana badana teoria, denotują w modelu semantycznym danej teorii określone operacje logiczne, to w sytuacji: (i) operacje logiczne istniejące w modelu badanej teorii nie są poddane zabiegowi redukcji do innych operacji; (ii, iii) operacje logiczne istniejące w modelu danej teorii są poddane redukcji do określonych struktur ontologicznych wyznaczonych przez logikę w funkcji ontologicznej względem danej teorii.[14] Argument zaprezentowany w niniejszym artykule zakłada sytuację metodologiczną typu (i). Jeśli bowiem w modelach semantycznych teorii arytmetycznych pierwszego rzędu mają istnieć sytuacje (fakty) matematyczne, to aby wyrazić w języku przedmiotowym relację identyczności pomiędzy nimi, należy teorie arytmetyczne pierwszego rzędu formułować na gruncie, przynajmniej, rachitycznej logiki niefregowskiej (obejmującej przynajmniej aksjomat zwrotności identyczności faktowej). Z kolei akceptując sytuację metodologiczną (ii, iii), założenie o istnieniu sytuacji (faktów) matematycznych w modelu teorii arytmetycznej musi skutkować nadzwyczaj kontrowersyjnymi konsekwencjami epistemologicznymi, zgodnie z którymi: (i) z punktu widzenia języka przedmiotowego teorii arytmetycznych sytuacje matematyczne istniejące w modelach są „niewidoczne”; (ii) „ujrzenie” sytuacji matematycznej w modelu teorii arytmetycznej wymaga jej konstrukcji, za pomocą środków niefregowskich, z obiektów teoriomnogościowych wyznaczonych przez reguły semantyczne określone na wyrażeniach języka danej teorii. Akceptując jednakże konsekwencję (ii), poprzez konstrukcję kategorii sytuacji w metateorii, ma się tym samym uzasadnienie rozszerzenia logiki klasycznej do logiki niefregowskiej, na gruncie której można formułować teorie arytmetyczne pierwszego rzędu. Skoro bowiem w modelu umiemy konstruować sytuacje matematyczne i porównywać je pod względem identyczności, to dlaczego nie wprowadzić do języka przedmiotowego funktora identyczności zdaniowej?

Podsumowując, konstrukcja przedmiotu badania o postaci: (*Art* + KL + A + λ-conv) jest motywowana założeniem, iż istnieją w modelach teorii arytmetycznych pierwszego rzędu takie byty, jak sytuacje (fakty czy stany rzeczy) arytmetyczne. Argumentacja przedstawiona poniżej pokazuje, że założenie to — na mocy semantycznej zasady BP — prowadzi do wyprowadzenia fałszywych zdań teorii arytmetycznej (*Art* + KL + A + λ-conv) w jej zamierzonym modelu semantycznym.

[14] Na przykład, dla teorii sformułowanych na gruncie logiki modalnej, konstruowane są modele Kripkego na gruncie logiki klasycznej. W tych modelach korelaty funktorów modalnych są redukowane do określonych struktur teoriomnogościowych określonych na światach możliwych.

2. DOWÓD

Niech *Art* będzie pierwszego rzędu arytmetyką liczb rzeczywistych. Język *Art* obejmuje więc zmienne indywiduowe, nazwy operacji arytmetycznych, nazwy funkcji arytmetycznych, stałe liczbowe, złożone wyrażenia oznaczające wartości liczbowe rozmaitych funkcji od rozmaitych argumentów. Niech logiką takiego języka będzie logika klasyczna wzbogacona o aksjomat identyczności zdaniowej oraz definicję operatora lambda z lambda-rachunku.[15] Innymi słowy, zakłada się, że pierwszego rzędu arytmetyka liczb rzeczywistych jest nadbudowana nad logiką, którą można określić mianem rachitycznej logiki niefregowskiej, zdefiniowanej jako: KL + A + λ-conv.

(A) $\alpha \bullet \alpha$ (gdzie „•" jest funktorem identyczności międzyzdaniowej)

(λ-conv) $(\lambda x)[\Phi(x)](a) = \Phi(a)$

W dowodzie zaprezentowanym poniżej jest wykorzystana restryktywna reguła ekstensjonalności o postaci:

(Ext) $Art \vdash (n = m) \wedge Art \vdash \alpha(n) \rightarrow Art \vdash \alpha(n/m)$

Zgodnie z regułą (Ext), jeśli formuła identycznościowa o postaci: $(n = m)$, gdzie n oraz m są dowolnymi termami arytmetycznymi, jest tezą teorii arytmetycznej *Art* oraz $\alpha(n)$ jest tezą arytmetyczną, to dowolne zastąpienie termu n termem m w tezie $\alpha(n)$ daje w wyniku również tezę teorii *Art*. Restryktywność reguły (Ext) polega na tym, że jej zasięg aplikacji dotyczy wyłącznie tez arytmetycznych; nie można tą regułą działać na formuły niebędące tezami arytmetycznymi. Dowód przedstawia się następująco:

(1) $\alpha \bullet \alpha$ (Aksjomat (A))
(2) $2+1 = (\lambda x)[x + 1]$ (2) (teza arytmetyczna otrzymana na mocy (λ-conv))
(3) $2+1 = (\lambda x)[2 + x]$ (1) (teza arytmetyczna otrzymana na mocy (λ-conv))
(4) $(2+1=3) \bullet (2+1=3)$ (teza otrzymana z (1) w wyniku podstawienia: $\alpha/\ 2+1 =3$)
(5) $[(\lambda x)[x + 1](2)=3] \bullet (2+1=3)$ (teza otrzymana z zastosowania (Ext) do: 2, 4)
(6) $[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]$ (teza otrzymana z zastosowania (Ext) do: 5, 3)

Zaprezentowany dowód jest dowodem aksjomatycznym; każdy wiersz dowodowy jest bądź tezą logiczną, bądź tezą arytmetyczną teorii (*Art* + KL + A + λ-conv). Teza (6) jest intuicyjnie formułą fałszywą, gdyż wyraża treść, zgodnie z którą fakt, że funkcja liniowa $(\lambda x)[x + 1]$ zastosowana do liczby 2 jako jej argumentu daje wartość w postaci liczby 3 jest identyczny z faktem, że funkcja liniowa $(\lambda x)[2 + x]$

---

[15] Operator lambda jest podstawowym narzędziem konstrukcji systemów lambda logiki (czy też ogólniej: logiki kombinatorów). Za twórców lambda języków uznaje się: Schönfinkela, Churcha, Curry'ego. Wyrażenie kształtu: „$(\lambda x)[\ldots]$" (czasami zapisywane bez nawiasów) jest rozumiane jako symbol funkcji.

zastosowana do liczby 1 jako jej argumentu daje wartość w postaci liczby 3. Dlaczego zdanie (6) jest fałszywe?

Jeśli mówi się, że zdanie pewnej teorii jest fałszywe, to ma się na myśli to, że dane zdanie jest fałszywe w pewnym zamierzonym modelu *M*. Wykazanie więc fałszywości zdania (6) wymaga konstrukcji zamierzonego modelu teorii (*Art* + KL + A + λ-conv).

Dla celów argumentacji przyjmijmy następującą konwencję językową: jeśli α jest wyrażeniem przedmiotowym arytmetyki *Art*, to $\underline{\alpha}$ jest nazwą tego wyrażenia na gruncie metateorii. Określmy semantyczną funkcję ekstensji Ext_M przyporządkowującą wyrażeniom języka *Art* obiekty w modelu *M* w następujący sposób: (i) jeśli *n* jest liczebnikiem (stałą indywiduową *Art*), to $Ext_M(n)$ = k (gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą); (ii) jeśli *f* jest wyrażeniem funkcyjnym, to $Ext_M(f\,)$ = f (gdzie f jest ustaloną funkcją określoną na liczbach rzeczywistych, czyli ustalonym zbiorem n-tek uporządkowanych). Ponadto, przyjmijmy na gruncie metateorii założenie, że na wyrażeniach zdaniowych języka *Art* określona jest funkcja ekstensji przyporządkowująca wyrażeniom ich korelaty ontologiczne (fakty) w modelu. Załóżmy dwie następujące zasady semantyczno-arytmetyczne (meta-wyrażenie „$M\vDash \alpha$” oznacza zachodzenie faktu denotowanego przez α w modelu *M*):

(Sem1) $$M \vDash (\alpha \bullet \beta) \equiv Ext_M\,(\alpha) = Ext_M\,(\beta)$$

Zasada (Sem1) stoi u podstaw semantyki niefregowskiej i wyznacza zamierzony sposób interpretacji funktora identyczności międzyzdaniowej. Ponieważ nie wiemy, czym są fakty matematyczne w teoriomnogościowym modelu *M* (zakładamy jedynie, że one w modelu *M* istnieją), przyjmijmy następującą regułę parafrazy zdań meta-arytmetycznych *Art* na zdania teorii, w której model *M* jest skonstruowany.

(Sem2) $$Ext_M(f(n) = m) = \text{fakt, że} < Ext_M(n), Ext_M(m) > \in\ Ext_M(f\,)$$

Na mocy zasady (Sem2) można przyjąć umowę, zgodnie z którą zdanie arytmetyczne o postaci: $f(n) = m$ opisuje w modelu *M* fakt, że $< Ext_M(n), Ext_M(m) > \in\ Ext_M(f\,)$. Ponieważ w modelu *M* istnieją fakty (między innymi niefregowskie fakty identycznościowe), to w języku, w którym model *M* jest konstruowany, musi również występować funktor służący do oznaczania tych faktów. Niech tym funktorem będzie symbol „**F**” rozumiany jako funktor nazwotwórczy od argumentu zdaniowego i spełniający następujący warunek (gdzie „•” jest funktorem identyczności międzyzdaniowej użytym w języku, w którym konstruowany jest model *M*):

(W) $$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}(\beta) \equiv \alpha \bullet \beta$$

Warunek (W) umożliwia przekład wszelkich zdań opisujących model *M*, w których występuje funktor „**F**” na zdania, w których ten funktor nie występuje, a zamiast niego występuje funktor identyczności międzyzdaniowej. Zasada (W) jest oczywista z tej racji, że dwie nazwy faktów oznaczają ten sam fakt wtedy, gdy odpowiadające im zdanie zbudowane z funktora identyczności międzyzdaniowej jest prawdziwe.

Niech funkcja Ext_M w odniesieniu do wyrażeń występujących w zdaniach: $\underline{((\lambda x)[x + 1](2) = 3}$ oraz $\underline{((\lambda x)[2 + x](1) = 3}$ będzie określona w następujący sposób (gdzie f_1 oraz f_2 są funkcjami takimi, że: $f_1(x) = x + 1$; $f_2(x) = 2 + x$):

(2) $Ext_M\ (\underline{(\lambda x)[x + 1]}) = f_1$
(3) $Ext_M\ (\underline{(\lambda x)[2 + x]}) = f_2$
(4) $Ext_M\ (\underline{2}) = 2$
(5) $Ext_M\ (\underline{3}) = 3$
(6) $Ext_M\ (\underline{1}) = 1$

Na mocy (Sem1) otrzymujemy:

(7) $M \models \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]} \equiv Ext_M(\underline{(\lambda x)[x + 1](2) = 3)} = Ext_M\ \underline{((\lambda x)[2 + x](1) = 3)}$

Z warunku (Sem2) wnioskujemy:

(8) $Ext_M(\underline{(\lambda x)[x + 1](2) = 3}) = \mathbf{F}[< Ext_M\ (\ \underline{2}\ ), Ext_M\ (\ \underline{3}\ ) > \in Ext_M\ (\underline{(\lambda x)[x + 1]})]$
(9) $Ext_M(\underline{(\lambda x)[2 + x](1) = 3}) = \mathbf{F}[< Ext_M\ (\ \underline{1}\ ), Ext_M\ (\ \underline{3}\ ) > \in Ext_M\ (\underline{(\lambda x)[2 + x]})]$

Na mocy charakterystyki funkcji ekstensji w modelu *M*, zgodnie z warunkami: (2)-(6), z (8) oraz (9), odpowiednio, wyprowadzamy:

(10) $Ext_M(\underline{(\lambda x)[x + 1](2) = 3}) = \mathbf{F}[<2, 3> \in f_1]$
(11) $Ext_M(\underline{(\lambda x)[2 + x](1) = 3}) = \mathbf{F}[<1, 3> \in f_2]$

Z (7), (10) i (11) wynika:

(12) $M \models \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]} \equiv \mathbf{F}[<2, 3> \in f_1] = \mathbf{F}[<1, 3> \in f_2]$

Stosując do (12) warunek (W), wyprowadzamy:

(13) $M \models \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]} \equiv [<2, 3> \in f_1] \bullet [<1, 3> \in f_2]$

Zdanie (Z): „$[<2, 3> \in f_1] \bullet [<1, 3> \in f_2]$" stanowi więc przekład — w języku przedmiotowym, w którym skonstruowany jest model *M* — metajęzykowego stwierdzenia: „$M \models \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$" z zachowaniem tożsamości wartości logicznej obu zdań. Ponieważ istnieje dowód w (*Art* + KL + A + λ-conv) zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ (wyżej to wykazano), stąd należy przyjąć:

(14) $M \models \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$

Zatem z (13) i (14) wynika:

(Z) $[<2, 3> \in f_1] \bullet [<1, 3> \in f_2]$.

Zdanie (Z) nie jest zdaniem języka teorii arytmetycznej *Art*. Stanowi ono teoriomodelową parafrazę zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ będącego twierdzeniem teorii (*Art* + KL + A + λ-conv). Relacja parafrazowalności pomiędzy zdaniami: $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$ oraz $\underline{[<2, 3> \in f_1] \bullet [<1, 3> \in f_2]}$ polega na tym, że fakt denotowany przez pierwsze ze zdań w modelu M teorii (*Art* + KL + A + λ-conv) jest faktem wyrażanym przez drugie ze zdań należące do języka (w tym wypadku drugiego rzędu języka przedmiotowego teorii mnogości ze stałymi arytmetycznymi i funktorem identyczności międzyzdaniowej), w którym model M jest konstruowany. Łatwo zauważyć, że meta-twierdzenie (13) podpada pod Tarskiego schemat T-równoważności. Jeśli meta-językowa formuła „$M \vDash \underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$" zostanie zinterpretowana jako stwierdzająca prawdę w modelu M zdania $\underline{[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]}$, to zdanie (Z) po prawej stronie funktora równoważności w (13) powinno zostać zinterpretowane jako przekład badanego zdania na metajęzyk, w którym konstruowany jest model M. Przy czym w analizowanym wypadku przekładalność obu zdań nie jest ustalana konwencjonalnie, lecz jest udowodniona na mocy warunków (Sem2) i (Sem3).

Zbadajmy więc wartość logiczną zdania (Z) na gruncie teorii mnogości wzbogaconej o stałe arytmetyczne i funktor identyczności międzyzdaniowej. Otóż, aby zbadać wartość logiczną (Z), należy znowu posłużyć się semantycznym metajęzykiem.[16] Przyjmijmy więc, że na stałych indywiduowych oraz stałych funkcyjnych określona jest funkcja denotacji Dn_M przyporządkowująca im odpowiednie przedmioty teoriomnogościowe: stałym funkcyjnym — funkcje, stałym indywiduowym — indywidua, n-tkom stałych indywiduowych — n-tki indywiduów. Ponadto, przyjmijmy następujące semantyczne zasady określające „minimalny" sposób rozumienia funkcji Dn_M:

(D1) $M \vDash \alpha \bullet \beta \equiv Dn_M(\alpha) = Dn_M(\beta)$

(D2) $M \vDash n = k \equiv Dn_M(n) = Dn_M(k)$

(D3) $M \vDash <n_1, \ldots, n_i> = <k_1, \ldots, k_i> \equiv Dn_M(<n_1, \ldots, n_i>) = Dn_M(< k_1, \ldots, k_i>)$

Analizując semantycznie zdanie (Z), wyprowadzić można następujące wnioski:

(1) $Dn_M(\underline{<2, 3> \in f_1}) = Dn_M(\underline{<1, 3> \in f_2})$

(2) $Dn_M(\underline{<2, 3>}) \neq Dn_M(\underline{<1, 3>})$

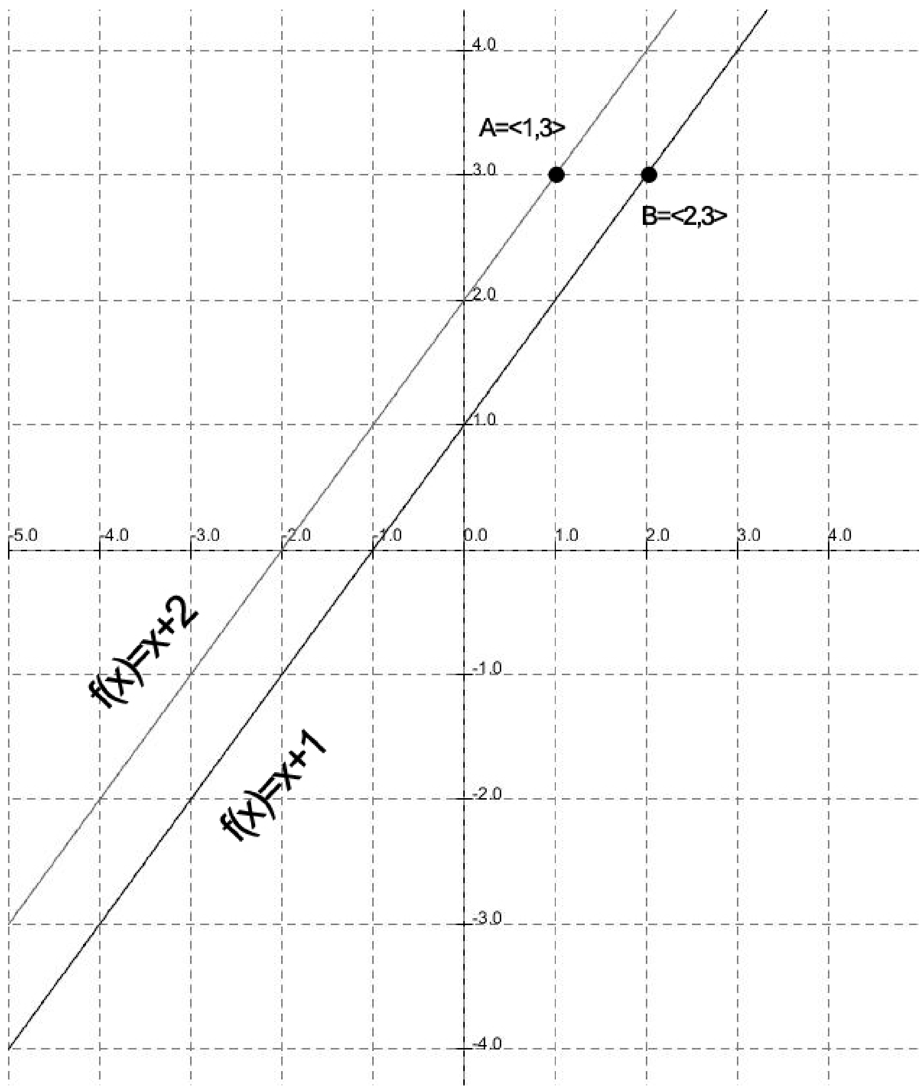
(3) $Dn_M(\underline{f_1}) \neq Dn_M(\underline{f_2})$

Z wniosków (1), (2) i (3) wynika, że zdanie (Z) jest sprzeczne z zasadą BP (Barwise, Perry 1981, s. 387-403), zgodnie z którą fakty pojmowane jako uprawdziwiacze, posiadające różne składniki są różnymi faktami. Jeśli stwierdzi się, że $Dn_M(\underline{<2, 3>})$ oraz $Dn_M(\underline{f_1})$ są składnikami faktu $Dn_M(\underline{<2, 3> \in f_1})$, a $Dn_M(\underline{<1, 3>})$ oraz $Dn_M(\underline{f_2})$ są składnikami $Dn_M(\underline{<1, 3> \in f_2})$, to na mocy (2) i (3) oraz zasady Barwise'a i Perry'ego, $Dn_M(\underline{<2, 3> \in f_1})$ oraz $Dn_M(\underline{<1, 3> \in f_2})$ są różnymi faktami. Zatem zdanie

[16] Najlepiej byłoby udowodnić negację zdania (Z) na gruncie teorii mnogości nadbudowanej nad logiką niefregowską. Ale ponieważ taką teorią nie dysponujemy, musimy to uczynić poprzez konstrukcję modelu semantycznego dla zdania (Z).

(Z) musi zostać uznane za zdanie fałszywe. A ponieważ (Z) jest teoriomnogościową parafrazą formuły: [(λx)[x + 1](2) = 3] • [(λx)[2 + x](1) = 3], to udowodniona formuła powinna zostać uznana za fałszywą. Ostatecznie więc, należy przyjąć, że wprowadzenie funktora identyczności zdaniowej w postaci jednego aksjomatu (A) do dowolnej teorii arytmetycznej, rozszerzonej o lambda-operator Churcha–Curry'ego, generuje dowody fałszywych identycznościowych zdań o faktach arytmetycznych.

Zaprezentowany wniosek można przedstawić, posiłkując się wykresami funkcji liniowych w kartezjańskim układzie współrzędnych.



Na diagramie widnieją wykresy przebiegów funkcji liniowych: $(\lambda x)[x + 1]$ oraz $(\lambda x)[x + 2]$ (jest to funkcja identyczna z funkcją $(\lambda x)[2 + x]$). Na każdej linii zaznaczone są dwa punkty: $<2, 3>$ oraz $<1, 3>$. Obrazem faktu denotowanego przez zdanie: $[(\lambda x)[x + 1](2) = 3]$ jest sytuacja polegająca na tym, że linia: $f(x) = x+ 1$, przecina punkt $B = <2, 3>$. Z kolei obrazem faktu denotowanego przez zdanie: $[(\lambda x)[2 + x](1) = 3]$ jest sytuacja polegająca na tym, że linia: $f(x) = x+2$ przecina punkt $A = <1, 3>$. Ponieważ oba obrazy są różne i co więcej, nawet nie posiadają elementów wspólnych, należy wyprowadzić wniosek, że przedstawiają one dwa różne fakty matematyczne.

Obrońca faktów matematycznych może się upierać, że oba zdania denotują ten sam fakt matematyczny, gdyż dowód to wykazuje. Wówczas jednak musi odpowiedzieć na pytanie: dlaczego jest tak, że ten sam fakt matematyczny może być obrazowany przez różne wykresy matematyczne, które nie posiadają żadnych elementów wspólnych? Innymi słowy: jak to jest możliwe, że dla pewnych par zdań, dla których zbiory denotacji ich składników różnią się, zdania te denotują ten sam fakt matematyczny?

Ponadto, obrońca faktów matematycznych może argumentować w następujący sposób: Teorie arytmetyczne są prawdziwe w pewnych modelach liczb i jednocześnie fałszywe w pewnych innych modelach liczb. Na przykład, arytmetyka liczb wymiernych jest fałszywa w dziedzinie liczb naturalnych, gdyż, na przykład, formuła: $\underline{(\exists x)(1< x <2)}$ jest fałszywa dla liczb naturalnych. W konsekwencji sytuacja matematyczna denotowana przez tę formułę nie jest faktem w modelach arytmetyki liczb naturalnych.[17] Kontrargument jest chybiony, gdyż modele liczb naturalnych nie są zamierzonymi modelami dla arytmetyki liczb wymiernych. W wypadku teorii (*Art* + KL + A + λ-conv) skonstruowany model ma postać modelu zamierzonego. Jeśli zwolennik faktów matematycznych nadal nie zgadza się z takim odparciem jego kontrargumentu, to na nim ciąży obowiązek zdefiniowania klasy zamierzonych modeli teorii (*Art* + KL + A + λ-conv). Przy czym modele te muszą być tak skonstruowane, aby z ich warunków definicyjnych, na gruncie teorii mnogości, wynikała formuła drugiego rzędu: $(\exists f,g)(\exists x, y)[f \neq g \wedge x \neq y \wedge \Psi(f(x)) \bullet \Psi(g(y))]$, gdzie $\underline{f}$ oraz $\underline{g}$ są zmiennymi funkcyjnymi, $\underline{\Psi}$ zaś oznacza dowolny kontekst zdaniowy języka, w którym konstruowany jest model teorii (*Art* + KL + A + λ-conv). W związku z tym obrońca faktów matematycznych musi podać przykłady takich zdań wynikających z definicji klasy zamierzonych, sytuacyjnych modeli arytmetycznych, które są rezultatem opuszczenia kwantyfikatorów w wymienionej formule. Jeśli to uczyni, natychmiast wyprowadza wniosek, że zdania: $\underline{\Psi(f(a))}$ oraz $\underline{\Psi(f(b))}$, dla $f \neq g$ i $a \neq b$, denotują ten sam fakt.

3. KOMENTARZ

W zaprezentowanym wyżej dowodzie nie jest wykorzystana zasada Wittgensteina, która głosi, że dwa równoważne logicznie zdania denotują ten sam stan rzeczy

[17] Ten kontrargument został sformułowany przez recenzenta niniejszego artykułu.

(uprawdziwiacz); czy też że są ko-ekstensjonalne. Oznacza to, że zaprezentowany dowód jest niezależny od kwestii logicznego kryterium identyczności stanów rzeczy (faktów, uprawdziwiaczy). Jedynym niefregowskim narzędziem, które dowód wykorzystuje, jest aksjomat refleksywności identyczności międzyzdaniowej (A). Uznanie dowodu musi więc prowadzić do akceptacji wniosku, że niezależnie od tego, jak uprawdziwiacze (stany rzeczy, fakty czy sytuacje) są pojmowane, zdanie: $[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]$ przyjmuje wartość logiczną prawdy. Jeśli funkcja ekstensji jest utożsamiana z funkcją wartości logicznej, to analizowane zdanie jest bezdyskusyjnie prawdziwe. Dlatego też jego „paradoksalność" jest rezultatem zamierzonej interpretacji spójnika identyczności międzyzdaniowej jako służącego wyrażaniu informacji, że zdania połączone tym spójnikiem odnoszą do tego samego faktu (jako bytu różnego od Fregowskich wartości logicznych). Innymi słowy, fałsz udowodnionego zdania: $[(\lambda x)[x + 1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2 + x](1) = 3]$ ujawnia się dopiero przy zamierzonej, niefregowskiej interpretacji spójnika „$\bullet$" oraz przyjęcia zasady BP. Przedstawiony dowód pokazuje więc, że pojęcie uprawdziwiaczy (faktów) jako czegoś różnego od wartości logicznych odnosi do kategorii niewspółmiernej z kategoriami, którymi zajmują się matematycy.

Można unieważnić zaprezentowany dowód, odrzucając którąś z reguł inferencji w nim użytych. Co więc z punktu widzenia ontologii matematyki oznaczałoby odrzucenie reguły (Ext)? Ponieważ reguła (Ext) operuje na tezach matematycznych, skutkiem jej ewentualnej niepoprawności musiałoby być uznanie tego, że zastąpienie koekstensjonalnych wyrażeń indywiduowych w pewnych kontekstach produkuje fałszywe zdania. Miałoby to miejsce w takich jedynie wypadkach, w których kontekst zmieniałby ekstensję wyrażeń indywiduowych. Jeśli w arytmetycznych tezach stwierdzających identyczność faktów zabronione byłoby wzajemne zastępowanie koekstensjonalnych wyrażeń indywiduowych, to należałoby wyciągnąć wniosek mówiący, że identycznościowe fakty matematyczne nie są ekstensjonalnie skonstruowane, że standardowo rozumiane zasady kompozycyjności nie stosują się do nich.[18] Przyjąć należałoby zasadę ontologiczną, zgodnie z którą pewien typ faktów matematycznych wyznacza „z góry" swoje składniki. Takimi faktami byłyby matematyczne fakty polegające na tym, że pomiędzy pewnymi innymi faktami zachodzi relacja identyczności. Ponieważ jednak reguła (Ext) musi obowiązywać w matematyce niefregowskiej (to znaczy takiej, której język nie jest rozszerzony o spójnik identyczności międzyzdaniowej), wówczas należałoby przyjąć to, że wszystkie nieidentycznościowe fakty matematyczne są złożone ekstensjonalnie („z dołu"). Ostatecznie więc należałoby zgodzić się z dosyć kontrowersyjną tezą ontologiczną, że uniwersum faktów matematycznych z uwagi na zasady kompozycyjności nie jest homogeniczne (jest ontologicznie „pęknięte").

Zablokowanie przedstawionego dowodu poprzez unieważnienie Churcha-Curry'ego reguły lambda-konwersji również wymusza przyjęcie niestandardowej ontolo-

[18] W pracy (Krysztofiak 2007) przedstawiona jest koncepcja holistycznego składania sytuacji.

gicznej wizji obiektów matematycznych. Zgodnie z tą regułą, każdy obiekt matematyczny, w szczególności liczby, da się wygenerować na mocy zastosowania pewnej funkcji do pewnego innego obiektu. W ten sposób generowane są wszystkie liczby naturalne różne od zera (za pomocą funkcji następnika). Przyjmując regułę Churcha, można intuicyjnie objaśnić pojęcie faktu matematycznego jako faktu polegającego na poprawnym zastosowaniu określonej funkcji do danego argumentu w celu wygenerowania określonego obiektu matematycznego. Fakt, że 1+ 2 = 3, można by rozumieć tak oto: że liczba 3 powstaje w wyniku zastosowania funkcji (λx)[1 + x] do argumentu będącego liczbą 2. Ponieważ liczbę 3 można wygenerować również za pomocą odmiennej funkcji zastosowanej do odmiennego argumentu, wówczas zdanie: 1+ 2 = 3 należałoby potraktować jako wieloznaczne z uwagi na funkcję denotowania faktów. Akceptacja reguły lambda-konwersji prowadzi więc do uznania funkcyjnej ontologii obiektów matematycznych, których „modelami-obrazami” są fakty matematyczne. Przy czym zdania matematyczne są wieloznaczne denotacyjnie. Odrzucenie reguły lambda-konwersji skutkowałoby z kolei negacją funkcyjnej ontologii obiektów matematycznych za cenę przyjęcia zasady jednoznaczności denotacyjnej w odniesieniu do zdań matematycznych. W każdym razie, na gruncie reguły lambda-konwersji nie da się mówić o tym, że zdania matematyczne zbudowane wyłącznie ze stałych matematycznych i operatorów matematycznych denotują jednoznacznie fakty matematyczne; co więcej, im takie zdanie jest dłuższe, tym zbiór faktów denotowanych przez dane zdanie staje się coraz liczniejszy. Jeśli więc przyjmuje się regułę lambda-konwersji i chce się mieć w dziedzinach matematycznych fakty matematyczne (obok indywiduów, ich zbiorów oraz funkcji), to trzeba rozumieć je inaczej niż zgodnie ze sposobem rozumienia faktów wyznaczonym przez zasady semantyki i ontologii niefregowskiej.

4. ZAKOŃCZENIE

Jeśli zaprezentowaną argumentację uzna się za konkluzywną, to należy ją zinterpretować jako mówiącą, że w dziedzinach matematycznych nie ma żadnych faktów matematycznych. Postawić więc należy w tym kontekście następujące pytanie: Jeśli nie ma w modelu danej teorii fizykalnej faktów (sytuacji) matematycznych, to czy można wówczas sensownie mówić o faktach (sytuacjach) fizycznych? Obrońca ontologii sytuacji musi, o ile jego propozycje mają być traktowane „poważnie”, przynajmniej pokazać to, że w danej dziedzinie przedmiotowej mogą istnieć fakty fizyczne bez faktów matematycznych. Na przykład, że można założyć istnienie faktu oddziaływania grawitacyjnego o określonej wartości pomiędzy dwoma punktami materialnymi o określonej masie i określonej odległości pomiędzy nimi, bez zakładania faktu zachodzącego pomiędzy odpowiadającymi wartościami liczbowymi.

BIBLIOGRAFIA

Barwise J., Perry J. (1981), *Semantic Innocence and Uncompromising Situations*, *Midwest Studies in Philosophy*, 6, s. 387-403.

Barwise J., Perry J. (1983), *Situations and Attitudes*, The MIT Press: Cambridge, Mass.: London.

Biłat A. (red.), (2009), *Aporie ontologii sytuacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii-Curie Skłodowskiej: Lublin.

Donaho S. (1998), *Are Declarative Sentences Representations?*, „Mind", 107, s. 33-57.

Grzegorczyk A. (1981), *Zarys logiki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe: Warszawa.

Grzegorczyk A. (1983), *Zarys arytmetyki teoretycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe: Warszawa.

Krysztofiak W. (2007), *Spór o ontologię sytuacji jako spór o zasadę kompozycyjności. Argument z metafory*, „Filozofia Nauki", XV, 2007, nr 4(60), s. 51-70.

Omyła M. (1986), *Zarys logiki niefregowskiej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe: Warszawa.

Wójcicki R. (1984), *Romana Suszki semantyka sytuacyjna*, „Studia Filozoficzne", 1984, 7(224), s. 3-19.

Wójtowicz A. (2007), *Znaczenie nazw a znaczenie zdań. W obronie ontologii sytuacji*, Wydawnictwo Naukowe Semper: Warszawa.

Wójtowicz A. (2009), „Problemy ontologii sytuacji", [w:] Biłat A. (red.), *Aporie ontologii sytuacji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii-Curie Skłodowskiej: Lublin, s. 13-35.