Filozofia Nauki
Rok XVIII, 2010, Nr 4(72)

Daniel Chlastawa

Trzy argumenty przeciwko konstruktywizmowi matematycznemu

Przez *konstruktywizm matematyczny* rozumie się rozmaite stanowiska formułowane na gruncie filozofii matematyki i podstaw matematyki, których cechą wspólną jest dopuszczanie w matematyce wyłącznie tego, co konstruktywne. Własność konstruktywności (oraz niekonstruktywności) można przypisywać rozmaitym przedmiotom: definicjom, metodom, operacjom, obiektom, dowodom, problemom itd. Konstruktywność (lub inaczej: efektywność) polega ogólnie rzecz biorąc na związku z *finitystycznością* i *jawnością* (eksplicytnością); te dwa aspekty są ze sobą związane, jednakże w zależności od tego, który z nich weźmiemy pod uwagę, definicja konstruktywności będzie wyglądała nieco inaczej. Zacznijmy od finitystyczności. Powiemy, że definicja jest efektywna, gdy można w skończonej ilości kroków sprawdzić, jaki obiekt został w tej definicji wskazany. Operacja z kolei jest efektywna, gdy w skończonej ilości kroków można ją wykonać. Dalej, problem jest efektywny, gdy jest rozstrzygalny, tzn. gdy istnieje skończony algorytm (efektywna metoda) pozwalający udzielić odpowiedzi „tak" lub „nie" na każde szczegółowe sformułowanie tego problemu. Z kolei funkcja (a więc pewien obiekt matematyczny) jest efektywna, gdy istnieje skończona metoda obliczania wartości tej funkcji dla dowolnie zadanych argumentów. Rozważmy teraz konstruktywność w znaczeniu jawności. Powiemy, że pewien obiekt jest efektywnie definiowalny, gdy można podać skończony układ warunków wyznaczających ten obiekt. (Przykładem są tu te funkcje rzeczywiste jednej zmiennej, dla których można podać skończony wzór arytmetyczny.) Z jawnością związana jest również konstruktywność dowodów twierdzeń, a więc to, co najczęściej jest kojarzone z pojęciem konstruktywności. Dowód twierdzenia egzystencjalnego, głoszącego istnienie przedmiotów spełniających warunek Φ jest konstruktywny, gdy podaje konkretne przykłady przedmiotów podpadających pod Φ lub przynajmniej algorytm ich znajdowania.[1] Dowód twierdzenia egzystencjalnego ma charakter niekonstruktywny (lub nieefektywny), gdy nie jest konstruktywny, tzn. nie wskazuje żadnych konkretnych przykładów przedmiotów, których istnienie to twierdzenie głosi, ani nie podaje żadnej metody ich znajdowania. Przykładowo, można (niekonstruktywnie) udowodnić istnienie liczb przestępnych (tzn. liczb niebędących pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych) na podstawie faktu, że zbiór liczb algebraicznych (tzn. liczb nie-przestępnych) jest przeliczalny, w związku z czym w nieprzeliczalnym zbiorze liczb rzeczywistych muszą się znajdować jakieś liczby niealgebraiczne. Dowód ten jest niekonstruktywny, ponieważ nie podaje się w nim żadnych konkretnych liczb przestępnych ani żadnej metody znajdowania takich liczb.[2]

Wyjaśnienia te dostarczają ogólnego pojęcia na temat tego, czym jest konstruktywność. Dlaczego jednak ktoś miałby przywiązywać tak dużą wagę do tego, co konstruktywne? Otóż konstruktywizm matematyczny przyjmuje ogólne założenie filozoficzno-metodologiczne, że każdy obiekt matematyczny jest konstrukcją umysłową, a operacje matematyczne to operacje możliwe do przeprowadzenia przez ludzki umysł. To właśnie te przesłanki leżą u podstaw zakwestionowania stosowalności w matematyce wszelkich niekonstruktywnych pojęć i metod, w szczególności zaś zakwestionowania poprawności niekonstruktywnych dowodów istnienia. Ponieważ na gruncie klasycznej logiki (zawierającej m.in. prawo wyłączonego środka czy prawa De Morgana dla kwantyfikatorów) dowody takie są uprawnione, konstruktywiści kwestionują logikę klasyczną, proponując w zamian różne odmiany tzw. logiki intuicjonistycznej, pozbawionej tych inferencji, które na gruncie założeń konstruktywistycznych są nieakceptowalne. Konstruktywizm jest stanowiskiem mającym charakter normatywny: stawia on żądanie *ograniczenia* się do rozpatrywania i uznawania wyłącznie konstruktywnych obiektów, operacji i metod dowodzenia, odrzucając metody i wyniki niekonstruktywne jako bezpodstawne, spekulatywne i nienaukowe. W związku z tym konstruktywizm znajduje się w opozycji wobec przyjmowanej i uprawianej przez zdecydowaną większość matematyków matematyki klasycznej, w której pojęcia i metody niekonstruktywne są akceptowane na równi z konstruktywnymi.

Należy być w pełni świadomym faktu, że konstruktywizm jest stanowiskiem wewnętrznie niejednolitym: „konstruktywizm” jest określeniem równie pojemnym, jak „feminizm” czy „marksizm”, przypisywanym rozmaitym stanowiskom, które mimo zgodności co do pewnych zasadniczych założeń, różnią się między sobą, nieraz znacznie. W łonie konstruktywizmu również mają miejsce kontrowersje i spory,

[1] Ponieważ zaś twierdzenia egzystencjalne można traktować jako alternatywy formuł przypisujących pewną własność elementom pewnej dziedziny, można dokonać uogólnienia i powiedzieć, że dowód twierdzenia będącego alternatywą jest konstruktywny, gdy jest dowodem jednego z członów tej alternatywy.

[2] Więcej na temat pojęcia efektywności można znaleźć m.in. w monografii Grzegorczyk 1961, s. 313-452.

i to nie mniej poważne niż te, które toczą się między konstruktywizmem a stanowiskami wobec niego otwarcie opozycyjnymi. To, co jest konstruktywne dla jednego zwolennika konstruktywizmu, często nie jest konstruktywne dla innego. Rozbieżności te będą bliżej rozważone w dalszej części, gdy przejdę do omawiania argumentów przeciwko konstruktywizmowi.

Czasem zamiennie z terminem „konstruktywizm" używa się terminu „intuicjonizm". Często jednak terminy te rozróżnia się, uznając intuicjonizm za pewną szczególną odmianę konstruktywizmu, mianowicie tę, która została stworzona w pierwszej połowie XX wieku przez holenderskiego matematyka Luitzena E. J. Brouwera (1881-1966) oraz jego szkołę. Poglądy konstruktywistyczne nie ograniczają się bynajmniej do tego ostatniego nurtu. Zalążki idei konstruktywistycznych można znaleźć już u Arystotelesa, który kwestionował (aczkolwiek nie ze względów konstruktywistycznych) istnienie nieskończoności aktualnej. Wyraźną inspiracją dla późniejszych konstruktywistów były też poglądy Immanuela Kanta, który traktował matematykę jako twórczą aktywność podmiotu, operującego transcendentalnymi przedstawieniami czasu i przestrzeni. Powstanie konstruktywizmu współczesnego datuje się jednak na drugą połowę XIX wieku. Była to reakcja na rozwój w matematyce wysoce abstrakcyjnych pojęć oraz metod definiowania i dowodzenia, związany z powstaniem teorii mnogości — przykładowo — funkcje zaczęto wówczas definiować jako dowolne relacje jednoznaczne, a nie jako obiekty zadane przez pewne wzory arytmetyczne. Do tej fazy rozwoju konstruktywizmu należeli m.in. Henri Poincaré i Leopold Kronecker. Wystąpienie Brouwera oraz jego zwolenników i współpracowników, m.in. Arenda Heytinga i Hermanna Weyla, było przełomem w historii konstruktywizmu, gdyż był to pierwszy tak zwarty i konsekwentny ruch. U źródeł intuicjonizmu Brouwera — podobnie jak innych ówczesnych stanowisk w podstawach matematyki, tzn. logicyzmu i formalizmu — leżała chęć zaradzenia groźbie sprzeczności w matematyce, ujawnionej przez odkrycie w niej antynomii, takich jak antynomia Russella, antynomia Burali–Forti'ego itd. Brouwer zaproponował w związku z tym metody, które w odróżnieniu od innych propozycji okazały się bardzo radykalne i prowadziły w efekcie do podjęcia gruntownej, «rewizjonistycznej» przebudowy całej matematyki, a więc stworzenia intuicjonistycznej teorii mnogości, analizy, arytmetyki, topologii itd., a zwłaszcza logiki. Te części matematyki, które nie zdołały ułożyć się w ramy konstrukcji uznanych za zgodne z intuicją, zostały poddane krytyce i zakwestionowano ich wartość naukową.

Dla Brouwera i innych intuicjonistów przedmioty matematyczne to konstrukcje myślowe, dokonane przez (idealnego) matematyka, które poza tą konstrukcją nigdzie nie istnieją. Co więcej, w matematyce istnieje *tylko* to, co konstruowalne przez myśl. Jak pisze Heyting,

> przedmioty matematyczne z natury swej są zależne od ludzkiej myśli, i to nawet gdyby były niezależne od indywidualnych aktów myślenia. Istnienie ich jest zagwarantowane o tyle tylko, o ile mogą być określone przez myśl (za: Murawski 2001, s. 102).

O poprawności wnioskowań matematycznych rozstrzyga definitywnie nie zgodność z regułami logiki czy języka, lecz *oczywistość intuicyjna*. Nie można jednak bliżej określić, czym dokładnie ma być ta intuicja. Heyting np. uważa, że „trzeba ograniczyć się do tego, aby przez mniej lub bardziej nieokreślone opisy wywołać w słuchaczu matematyczne nastawienie" (za: Ładosz 1968, s. 37). Jeśli intuicjoniści używają terminu „istnienie", rozumieją przezeń fakt dokonania pewnego procesu myślowego i nic więcej. Koncepcje Brouwera nakazywały badać umysłowe konstrukcje matematyczne jako takie, bez odniesienia do zagadnień dotyczących natury konstruowanych obiektów, takich np. jak to, czy obiekty te istnieją niezależnie od naszej wiedzy o nich (Heyting 1956, s. 1). Jeżeli termin „istnieć" znaczy co innego niż „być skonstruowanym", to musi on mieć pewne znaczenie metafizyczne. Zadaniem matematyki nie jest badanie tego znaczenia ani rozstrzyganie, czy jest ono do utrzymania, czy nie. Intuicjonizm nie ma nic przeciwko temu, by matematycy prywatnie uznawali teorie metafizyczne, jakie im się tylko podobają, ale idee Brouwera wymagają, by uprawiać matematykę jako coś prostszego, bardziej bezpośredniego niż metafizyka. W badaniu umysłowych konstrukcji matematycznych „istnieć" musi być synonimem „być skonstruowanym" (Heyting 1956, s. 2). Heyting przyznaje, że w gruncie rzeczy wszyscy matematycy (włączając w to intuicjonistów) są przekonani, iż w jakimś sensie matematyka opiera się na prawdach wiecznych; kiedy jednak usiłuje się precyzyjnie zdefiniować ten sens, wikłamy się w labirynt metafizycznych problemów. Jedynym sposobem ich uniknięcia jest wyrzucenie ich z matematyki i ograniczenie się do badania konstrukcji matematycznych jako takich (Heyting 1956, s. 3); każde zdanie matematyczne musi dać się sprowadzić do formy: „Dokonałem konstrukcji *A* w moim umyśle" (Heyting 1956, s. 19).

W latach pięćdziesiątych XX wieku pojawiła się nowa, bardzo radykalna wersja intuicjonizmu, jaką był tzw. ultrafinityzm, zaproponowany przez radzieckiego matematyka Aleksandra Jesienina-Wolpina. Ultrafinityzm wymaga, by wszelkie konstrukcje matematyczne były wykonalne nie tylko w skończonej, ale i w *osiągalnie* skończonej liczbie kroków, czyli takiej liczbie kroków, których wykonanie jest nie tylko teoretycznie, ale i praktycznie (tzn. fizycznie) możliwe dla człowieka. W matematyce przyjmuje się bowiem zazwyczaj, że wszystkie liczby naturalne są obiektami tego samego rodzaju, niezależnie od tego, czy mówimy o liczbach małych (takich jak 3 lub nawet 100), których reprezentacje mogą być dane bezpośredniej obserwacji, czy też o bardzo wielkich liczbach w rodzaju $10^{100!}$, które z ludzkiego punktu widzenia są czysto pojęciowymi konstrukcjami, przekraczającymi wszelkie możliwe doświadczenie (zauważmy, że liczbę atomów we wszechświecie szacuje się na zaledwie 10^{80}). Według ultrafinityzmu należy brać pod uwagę nasze własne fizyczne ograniczenia, jakie są nałożone na konstruowanie przez nas przedmiotów matematycznych (Murawski 2001, s. 114). Intuicjonizm w klasycznej swojej postaci jest dla Jesienina-Wolpina nazbyt abstrakcyjny. Tę abstrakcję należy radykalnie ograniczyć: w matematyce dopuszczalne winny być wyłącznie takie obiekty, które mogą być faktycznie zrealizowane (w naszej wyobraźni). Ten punkt widzenia kwestionuje nie tylko aktualne istnienie wszelkich nieskończoności, lecz ponadto odnosi się sceptycznie do istnienia ogromnych liczb naturalnych. Mimo że niektóre liczby naturalne są tylko *względnie nieosiągalne* (np. w wyniku niedostatecznego rozwoju technik komputerowych), to, wobec ograniczoności naszej Galaktyki i możliwości ludzkiego myślenia, zapewne istnieją także liczby *absolutnie nieosiągalne* (Ładosz 1968, s. 119).

W chwili obecnej konstruktywizm nie posiada wielu konsekwentnych wyznawców. Należy do nich m.in. brytyjski filozof Michael Dummett (ur. 1925). Dummett dokonał powiązania konstruktywizmu matematycznego z ogólniejszym stanowiskiem filozoficznym, jakim jest tzw. *antyrealizm*, czyli pogląd, według którego (na płaszczyźnie semantycznej) znajomość znaczenia dowolnego zdania polega na znajomości warunków słusznej stwierdzalności tego zdania, prawda zaś ma charakter epistemiczny, tzn. jest niezależna od naszych zdolności do jej poznania.[3] Szczególnym przypadkiem sporu realizmu i antyrealizmu na wszystkich jego płaszczyznach jest spór o status twierdzeń matematyki, czyli spór konstruktywizmu i platonizmu. Zdaniem platonizmu, twierdzenia i teorie matematyczne odnoszą się do pewnej zewnętrznej, pozaumysłowej i pozazmysłowej rzeczywistości wiecznie istniejących obiektów abstrakcyjnych, które nie są tworzone przez naszą myśl i które jednoznacznie czynią formułowane przez nas zdania matematyczne prawdziwymi lub fałszywymi (Dummett 1977, s. 383). Stanowisko to zostaje zakwestionowane przez konstruktywizm, zgodnie z którym jedyną rzeczą zdolną uczynić zdanie matematyczne prawdziwym jest dowód, nie zaś stan rzeczy zachodzący w matematycznych zaświatach. Zdaniem konstruktywizmu, matematyka odnosi się do naszych własnych operacji mentalnych, a nie do jakiejkolwiek zewnętrznej rzeczywistości. Z konstruktywistycznego punktu widzenia rozumienie zdania matematycznego to zdolność do rozpoznania jego dowodu, gdy takowy zostanie przedstawiony. Prawdziwość takiego zdania sprowadza się więc wyłącznie do istnienia jego dowodu[4] (Dummett 1977, s. 6). Według konstruktywizmu zdania *są* prawdziwe lub fałszywe tylko wtedy, gdy *jesteśmy w stanie rozpoznać* je jako prawdziwe lub fałszywe. Nie posiadamy pojęcia prawdy, przekraczającego nasze własne zdolności rozpoznawania prawdziwości zdań (Dummett 1977, s. 383-384). Przykładowo, zdanie, w którym dokonuje się kwantyfikacji po skończonym zbiorze, jest dla nas w pełni zrozumiałe, ponieważ wiemy, jak moglibyśmy (przynajmniej w zasadzie) określić, czy jest ono, czy nie jest prawdziwe — mianowicie, poprzez sprawdzenie każdego elementu tego zbioru po kolei pod względem posiadania danej własności. Nie mamy jednak takiej możliwości w przypadku nieskończonym, a stąd uznanie, że zdanie posiada określoną, obiektywną wartość logiczną, niezależnie od naszej możliwości jego dowiedzenia lub

[3] Szczegóły na temat dyskusji realizmu i antyrealizmu oraz różnych płaszczyzn tej dyskusji znajdują się w monografii Szubka 2001.

[4] Do tego, co to właściwie znaczy w ustach konstruktywisty, że istnieje dowód, jeszcze wrócę w części krytycznej.

obalenia, jest *fałszywą analogią*: wyobrażamy sobie, że jesteśmy jakimś «ponadludzkim arytmetykiem», który — w przeciwieństwie do nas — mógłby w skończonym czasie sprawdzić wartości logiczne nieskończenie wielu poszczególnych podstawień danej funkcji zdaniowej. Następuje tutaj odwołanie do hipotetycznych władz, których nie posiadamy, ale co do których sądzimy, że stanowią dające się wyobrazić rozszerzenie tych, które mamy. Ograniczenia nałożone na nasze własne możliwości obserwacji i operacji umysłowych zostają uznane za czysto przygodne i nieistotne (Dummett 1977, s. 59, 379). Rozumienie zdań zostaje zatem ostatecznie wyjaśnione w terminach analogicznych do tych, jakich użylibyśmy opisując istoty ze zdolnościami poznawczymi przekraczającymi nasze własne. Koncepcja taka jest dla Dummetta nie do przyjęcia: język, którego używamy, zajmując się matematyką lub innymi dziedzinami, jest *naszym* językiem, i jego znaczenie musi być powiązane z naszymi własnymi możliwościami poznawczymi. Nie może ono być wyprowadzone z hipotetycznej koncepcji zdolności, których nie mamy, a próba wyjaśnienia ich w taki sposób pokazuje tylko złudzenie zawarte w niezrozumieniu naszego własnego języka (Dummett 1977, s. 380). „Odwoływanie się do hipotetycznych istot nie pomoże nam przy wyjaśnianiu znaczeń, jakie *my* przypisujemy zdaniom *naszego* języka” (Dummett 1998, s. 548).

Przedstawiony tu pogląd nie jest bynajmniej wyjątkiem. Podobne idee głosił wszakże ultrafinitysta Jesienin-Wolpin. Analogiczną argumentację spotkać można u francuskiego matematyka Émile Borela:

> Nie rozumiem, co może oznaczać abstrakcyjna możliwość aktu, który jest niemożliwy dla rozumu ludzkiego. Dla mnie jest to czysto metafizyczna abstrakcja bez naukowej realności (za: Murawski 2001, s. 100).

W duchu takim wypowiada się również amerykański matematyk Errett Bishop:

> Matematyka przynależy do człowieka, nie do Boga. Nie jesteśmy zainteresowani własnościami liczb naturalnych, które nie mają deskryptywnego sensu dla skończonych istot ludzkich. Kiedy człowiek dowodzi istnienia pewnej liczby naturalnej, powinien pokazać, jak ją znaleźć. Jeżeli istnieje jakaś matematyka boska, którą należałoby się zająć, pozostawmy ją Bogu (Bishop, Bridges 1985, s. 4-5, przekład własny).

Z kolei inny matematyk, John Myhill, próbuje się odwoływać do odkryć w zakresie fizjologii procesów nerwowych, w tym do zastosowań cybernetyki do badania tych procesów (Ładosz 1968, s. 69). W jednym ze swoich artykułów przedstawił on pewien wariant konstruktywnej arytmetyki, konkludując go następująco:

> Podstawowy wynik tego artykułu z punktu widzenia filozofii matematyki stanowi to, że niezupełność zwykłych systemów matematycznych może być przypisana niekonstruktywnym ideom w nich zawartym. Reprezentują one dziedzinę, w ramach której ludzki centralny system nerwowy, jako poddany wszystkim ograniczeniom właściwym maszynie Turinga, niezdolny jest do operowania i dlatego mogą być one odrzucone jako bezsensowne (za: Ładosz 1968, s. 103).

Przedstawione tu przykłady stanowisk pozwalają dostrzec, że konstruktywiści odrzucają matematykę klasyczną zasadniczo z powodów *epistemologicznych*, twierdząc, że (1) pojęcia matematyki klasycznej są niezrozumiałe, ponieważ mają charakter metafizyczny, są pozbawione operacyjnego sensu i (2) procedury, o których mówi się w klasycznej matematyce, przekraczają ludzkie możliwości poznawcze. Czy racje konstruktywizmu dla wydania takiego orzeczenia i uznania siebie za jedyną właściwą koncepcję matematyki można uznać za uzasadnione? Zadaniem poniższej argumentacji będzie wykazanie, że tak nie jest.

KRYTYKA KONSTRUKTYWIZMU

Wyraźnie negatywny stosunek do postulatów konstruktywistycznych istnieje od równie dawna, jak sam wyraźnie sformułowany konstruktywizm, czyli co najmniej od czasu wystąpienia Brouwera. Konstruktywizm, formułując żądania dość drastycznego ograniczenia dopuszczalnych przedmiotów i metod matematyki, wywołał protest wielu matematyków, przekonanych o zasadności i wartości klasycznej matematyki. Czołową postacią we wczesnej fazie tego nurtu był David Hilbert, który (obok ogromnych osiągnięć matematycznych) sam jest patronem innego znaczącego stanowiska w filozofii matematyki, mianowicie formalizmu. Hilbert obawiał się, że działalność intuicjonistów doprowadzi do trwałego okaleczenia matematyki, że intuicjonistyczne ograniczenia nałożone na matematykę okażą się tak silne, iż uczynią uprawianie matematyki niemożliwym. Sądził na przykład, że „zabrać matematykowi zasadę wyłączonego środka to tak, jak gdyby zakazać astronomowi korzystania z lunety lub zabronić bokserowi używać swoich pięści” (za: Bridges www, przekład własny). Z dzisiejszego punktu widzenia można stwierdzić, że obawy Hilberta nie sprawdziły się: po pierwsze, poglądy konstruktywistyczne nie zostały przyjęte przez większość matematyków, a po drugie, okazało się później, że spora część matematyki klasycznej może zostać ugruntowana metodami czysto konstruktywnymi (Bridges www). Jednak niezależnie od tego, nadal mogą istnieć powody, które pozwalają krytycznie odnosić się do konstruktywizmu. Sądzę, że takie powody faktycznie istnieją i przechodzę teraz do ich przedstawienia.

1. Pluralizm

Pierwszym narzucającym się spostrzeżeniem jest fakt *pluralizmu*, tzn. istnienia rozmaitych, wzajemnie niezgodnych poglądów i tendencji, występujących pod ogólnym szyldem konstruktywizmu. Zarzut ten w ogólnym przypadku nie jest poważny: sam fakt istnienia w obrębie zwolenników pewnej tezy sporów i niezgodności nie świadczy jeszcze przeciwko tej tezie — jej zwolennicy mogą bowiem błądzić, mogą mylić się co do szczegółów, ale ich zasadnicza idea może pozostać słuszna. Inaczej jednak wygląda sprawa, gdy zwolennicy tej tezy deklarują, że przedstawiane przez nich treści są *oczywiste same przez się*. Tak jest właśnie w wypadku konstruktywistów. Heyting np. pisze, że konstrukcja matematyczna powinna być czymś tak *bezpośrednim* dla umysłu, a jej rezultat tak *jasny*, że w ogóle nie potrzebowałaby żadnych podstaw; można dobrze wiedzieć, czy pewne rozumowanie jest poprawne, nawet bez odwołania do logiki — ma do tego wystarczać „jasna, naukowa świadomość" (Heyting 1956, s. 6). Z intuicjonistycznego punktu widzenia matematyka, uprawiana we właściwy sposób, nie potrzebowałaby dla siebie żadnego zewnętrznego uzasadnienia czy podstawy, lecz byłaby uzasadniona *sama przez się*, w sposób *oczywisty* (Dummett 1977, s. 2). Po takim stwierdzeniu należy natychmiast zadać pytanie: *która* matematyka intuicjonistyczna? Istnieje *wiele* systemów matematyki intuicjonistycznej, oskarżających się wzajemnie o nieoczywistość, wręcz mętność, a czasem o całkowitą nonsensowność — tak do intuicjonizmu Brouwera odnosił się ultrafinityzm Jesienina–Wolpina czy tzw. matematyka beznegacyjna George'a Grissa, kwestionująca matematyczną sensowność pojęcia negacji oraz przydatność jakichkolwiek, nawet słabych form rozumowania przez redukcję do absurdu (Heyting 1956, s. 120-122). Gdyby rzeczywiście matematyka intuicjonistyczna miała przypisywane przez jej zwolenników cechy oczywistości i bezpośredniości, niewątpliwie nie powinno to mieć miejsca. Wobec tego absolutystyczne roszczenie matematyki intuicjonistycznej do bezwzględnej oczywistości należy uznać za całkowicie bezpodstawne. Pod tym względem intuicjonizm przypomina fenomenologię Edmunda Husserla, która miała być ścisłą nauką, bezzałożeniową, bezwzględnie pewną i całkowicie oczywistą, odwołującą się do źródłowej, bezpośredniej intuicji, a tymczasem rozpadła się na wiele niezgodnych ze sobą odłamów i koncepcji, wypalając się obecnie w dekonstrukcjonizmie i innych antyracjonalistycznych nurtach. Źródła problemów zarówno fenomenologii, jak i konstruktywizmu można upatrywać w szczególnej roli, jaką przypisuje się w nich pojęciu *oczywistości* (bądź pojęciom pokrewnym: intuicyjności, bezpośredniości, źródłowości, naoczności itd.). Nie ulega bowiem wątpliwości, że pojęcie oczywistości jest pojęciem nadzwyczaj *chwiejnym*. Paradoksalnie, jest zupełnie nieoczywiste, jakie jest znaczenie i zakres słowa „oczywiste" (tzn. co jest, a co nie jest oczywiste, i w jaki sposób można by to rozstrzygać, inaczej niż przez koliste odwołanie do metakryterium oczywistości: „jest oczywiste, że *X* jest oczywiste, a *Y* nie jest oczywiste"). Dowodem tego jest mnogość poglądów konstruktywistycznych, z których każdy odwołuje się do kryterium oczywistości, ale dla każdego co innego ono oznacza i co innego zostaje uznane za oczywiste. To ostatnie zależy od względnych i bardzo subiektywnych odczuć poszczególnych ludzi w poszczególnych momentach i okolicznościach. Nierzadko różnice te dotyczą nawet jednej i tej samej osoby: przykładowo, sam Brouwer początkowo uznawał continuum liczb rzeczywistych za coś, co jest bezpośrednio dane intuicyjnie (Ładosz 1968, s. 46), ale później odrzucił ten pogląd, uważając, że jedyną sensowną nieskończonością jest potencjalna nieskończoność przeliczalna. Ponadto należy pamiętać, że pozornie jasne i intuicyjne pojęcia (jak choćby samo pojęcie zbioru) mogą prowadzić do rozmaitych antynomii (jak antynomia Russella). Wszystko to sprawia, że należy odrzucić pojęcie oczywistości jako pojęcie podstawowe i naczelne. Nie jest ono kryterium bezpiecznym i solidnym, wykluczającym możliwość błędów i gwarantującym niezawodność rezultatów osiąganych przez odwoływanie się do niego. Nie prowadzi ono również do porozumienia między zwolennikami różnych poglądów, wprost przeciwnie — przyczynia się do jeszcze większego rozmnożenia sporów, których w żaden sposób nie można rozsądzić, gdyż opierają się one na czynnikach skrajnie subiektywnych.

Nie oznacza to wszakże, że mamy całkowicie zrezygnować z odwoływania się w matematyce do oczywistości. Przykładowo, nie ma chyba innego niż oczywistość kryterium przy dobieraniu aksjomatów podczas formalizowania teorii matematycznych. Nie należy jednak traktować oczywistości jako kryterium centralnego i ostatecznego. Odwoływanie się do niej powinno mieć charakter *umiarkowanie pozytywny* („przyjmujemy to, co oczywiste, przynajmniej tymczasowo") zamiast *silnie negatywnego* („kategorycznie odrzucamy to, co nieoczywiste"). Z pewnością nie ma nic rozsądnego w całkowitym zarzuceniu kryterium oczywistości, ale zdecydowanie bardziej nierozsądne jest zrobienie z niego nieomylnej — i jedynej! — podstawy matematyki. Intuicjoniści, podobnie jak logicyści i formaliści, dążyli do tego, aby matematyka stanęła na twardym gruncie, aby nie była narażona na niebezpieczeństwo pojawienia się antynomii. Dla intuicjonistów tym twardym gruntem miała być właśnie intuicja. To jednak — jak się okazuje — są ruchome piaski, na których po prostu nie da się budować obiektywnej nauki. Jeżeli spory, w których każda ze stron odwołuje się do pojęcia oczywistości, mają charakter czysto filozoficzny, to można przymykać na nie oko; gdy jednak spory takie mają mieć implikacje w postaci nałożenia ograniczeń na praktykę naukową, nie należy być wobec nich równie wyrozumiałym. Postulat taki jest zastosowaniem do matematyki ogólnometodologicznego postulatu, by chronić metodę i dorobek nauki przed zagrożeniem ze strony różnych form pseudonauki, w imię hasła: „podważanie dobrze ugruntowanych teorii naukowych wymaga nadzwyczajnie silnych argumentów". Tymczasem kontrowersje, w jakie wikłają się między sobą konstruktywiści, sprawiają, że nie można się zgodzić, by w imię skrajnie chwiejnego kryterium oczywistości formułować kategoryczne wyroki, radykalnie potępiające matematykę klasyczną. Ugruntowanie matematyki klasycznej opiera się na wielowiekowym doświadczeniu matematyków oraz na powodzeniu, z jakim matematyka znajduje zastosowanie w nauce i technice. Żądanie absolutnego, filozoficznego ugruntowania matematyki, abstrahującego od wszelkiej praktyki, jest po prostu matematyczną wersją „fundamentalizmu" w sensie Quine'a, czyli krytykowanego przez Quine'a dążenia neopozytywistów do oparcia całej naszej wiedzy empirycznej na absolutnie pewnych fundamentach doznań zmysłowych, abstrahującego od tego, czy w ten sposób będziemy w stanie ugruntować wszystko, co uważamy za potrzebne i cenne. Konstruktywiści (np. Heyting 1956, s. 2) uważają, że *matematyka ma pierwszeństwo przed metafizyką*, tzn. nie można podtrzymywać pewnych teorii matematycznych w imię wątpliwych, realistycznych założeń filozoficznych, lecz należy dać prym matematyce „czystej", oczywistej samej przez się, matematyce „jako takiej". Jednakże postulat pierwszeństwa matematyki przed metafizyką można interpretować *zupełnie odwrotnie*, w wyniku czego to konstruktywizm będzie się jawił jako postawa degradująca matematykę. Można bowiem uznać, że matematyka „jako taka" to nic innego niż matematyka klasyczna, faktycznie istniejąca, będąca owocem długotrwałego i naturalnego rozwoju, efektem doświadczeń wielu pokoleń badaczy i środkiem dobrze sprawdzającym się w praktyce. Matematyka ta jest czymś, co ma pierwszeństwo przed wszelką metafizyką (ogólnie: filozofią) — w szczególności, przed wszelkimi filozoficznymi rozważaniami konstruktywistów, którzy pewne koncepcje filozoficzne chcą postawić ponad historycznie ugruntowaną matematyką i z ich pozycji oceniać, co w matematyce jest dobre, a co nie.

2. Słabość argumentów epistemologicznych

W poprzednim paragrafie wskazywałem, w jaki sposób chwiejność stanowisk konstruktywistycznych wypływa z odwoływania się do pojęcia oczywistości. Teraz będę chciał pokazać, że chwiejność ta jest często spowodowana również wątpliwą wartością argumentów, jakie się przywołuje dla uzasadnienia poszczególnych poglądów. Rozważmy np. przedstawione wcześniej argumenty epistemologiczne, jakimi posługują się Dummett, Borel, Bishop i Myhill w krytyce matematyki klasycznej. Ich wspólna idea była następująca: pewne pojęcia i operacje matematyki klasycznej to czysto abstrakcyjne możliwości, które nie są wykonalne dla ludzkiego umysłu, a zatem w prawdziwie naukowej matematyce nie ma dla nich miejsca. Zauważmy, że *dokładnie takim samym argumentem* mógłby się posłużyć ultrafinitysta dla wykazania, że pozbawione sensu są operacje na bardzo dużych liczbach naturalnych: jeśli bowiem są to dostatecznie duże liczby, to dokonanie na nich jakichkolwiek operacji również jest czysto abstrakcyjną możliwością, niedostępną ograniczonemu umysłowi ludzkiemu. W ten sposób podważone zostałoby bardzo wiele z tego, co dopuszczają umiarkowani konstruktywiści, niebędący ultrafinitystami. Wygląda więc na to, że konsekwentni zwolennicy konstruktywizmu, posługujący się argumentami epistemologicznymi, nie są w stanie uniknąć radykalizacji swojego stanowiska do ultrafinityzmu, a tymczasem to ostatnie jest dla większości konstruktywistów skrajnością, od której się stanowczo odcinają. Przykładowo, Dummett motywuje swoją rezerwę wobec ultrafinityzmu następująco: gdybyśmy odrzucili „względnie liberalne" intuicjonistyczne kryterium rozstrzygalności, to musielibyśmy

> powrócić do ścisłego finityzmu, doktryny dopuszczającej nieskończone ciągi o skończonych ograniczeniach górnych na liczbę ich wyrazów, a logiczna spójność tej doktryny budzi zasadnicze wątpliwości (Dummett 1998, s. 550).

Niezależnie od sporów między konstruktywistami, należy zwrócić uwagę na następujący fakt. Jeżeli konstruktywiści twierdzą, że matematyka klasyczna błądzi, ponieważ rozważa operacje niewykonalne dla człowieka, a wykonalne dla Boga, to powstaje wątpliwość, w jaki sposób wytłumaczyć sam fakt istnienia matematyki klasycznej: gdyby opierała się ona na operacjach niemożliwych do przeprowadzenia, to w ogóle nie mogłaby istnieć, a tymczasem jest ustaloną dziedziną o trwałych wynikach, a matematycy klasyczni bez trudu rozumieją i dowodzą należących do niej twierdzeń. Dlaczego tak się dzieje? Rozważmy jedną z operacji matematyki klasycznej, polegającą na ustalaniu wzajemnie jednoznacznego odwzorowania między zbiorem wszystkich liczb naturalnych a zbiorem liczb naturalnych parzystych. Zadanie to istotnie byłoby niewykonalne, gdyby rozumieć je jako branie po kolei po jednym elemencie z każdego zbioru, zespalanie ich w parę, odkładanie na bok, branie następnych itd., w nieskończoność; utworzenie każdej pary zajmuje pewną niezerową ilość czasu, wobec czego istota o skończonych możliwościach poznawczych czy manipulacyjnych (taka, jak człowiek) w skończonym czasie nie jest w stanie go zrealizować. Jednakże coś takiego wcale nie jest potrzebne; wystarczy bowiem podać *ogólną metodę* łączenia elementów w pary, tzn. podać wzór funkcji, która to odwzorowanie ustanawia; w tym przypadku będzie to funkcja o wzorze $f(x) = 2x$, gdzie $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Można łatwo wykazać, że funkcja ta spełnia warunek wzajemnej jednoznaczności. Podanie wzoru tej funkcji oraz sprawdzenie jej własności to procedury całkowicie finitystyczne, możliwe do wykonania przez skończoną istotę w skończonym, a nawet bardzo krótkim czasie. Wobec tego nie ma żadnego powodu, by przyjmować, że są to procedury ponadludzkie, od których matematykę należałoby uwolnić. Złudzenie owych nadludzkich wymagań powstaje przez to, że żąda się zbyt wiele, wymagając, by pewne konstrukcje były przeprowadzane *explicite*, krok po kroku. Przedstawiony powyżej przykład pokazuje, że wrażenie niezdolności skończonego umysłu ludzkiego do operowania na pewnych obiektach może być złudne. Pewne konstrukcje da się bowiem przeprowadzić w sposób ogólny i abstrakcyjny, w którym *implicite* zawierają się wszelkie możliwe konkretne konstrukcje, i że sposób taki jest, po pierwsze, całkowicie wystarczający dla celów dowodu, a po drugie — finitystycznie realizowalny. Wobec tego, należy co najmniej podejrzliwie patrzeć na motywowane względami kognitywistycznymi kwestionowanie przez konstruktywistów sensowności pojęć matematycznych; *może* ono bowiem opierać się na złudzeniu podobnym do tego, które powstaje w odniesieniu do równoliczności. Warto w tym miejscu przytoczyć sposób, w jaki Jarosław Ładosz komentuje próbę „fizjologicznego" usprawiedliwienia konstruktywizmu przez J. Myhilla (zob. wyżej):

> Ten radykalny dekret o bezsensowności niekonstruktywnych pojęć *wydany zostaje w imieniu fizjologii* bez kropli uzasadnienia empirycznego, całkowicie arbitralnie, bez jakiejkolwiek próby zarysowania bodaj że programu badań układu nerwowego i związków pojęć matematycznych z tym układem, programu, który mógłby ewentualnie usprawiedliwić wydany dekret. […] Nie sądzimy zresztą, by można było zarysować taki program, istnieją bowiem takie «przyrodnicze» fakty, jak żywi i zdrowi nerwowo matematycy operujący składnie klasycznymi pojęciami niekonstruktywnej arytmetyki (Ładosz 1968, s. 103).

Uwaga ta wydaje się bardzo trafna. Zauważmy, że teza Myhilla, iż umysł ludzki jest maszyną Turinga, nie jest ani oczywista, ani poparta żadnym uzasadnieniem. Nie jest ona również twierdzeniem żadnej zajmującej się umysłem nauki empirycznej. Niektórzy — jak John Lucas czy Roger Penrose — wręcz otwarcie kwestionują tę tezę, przyjmując za punkt wyjścia właśnie to, że ludzki umysł jest w stanie operować pojęciami niekonstruktywnymi i mieć dostęp do prawd, których nie można udowodnić. Niezależnie od tego, jakie jest właściwe rozwiązanie tego problemu (również koncepcje Lucasa i Penrose'a spotykają się ze zdecydowaną i przypuszczalnie słuszną krytyką; zob. np. Krajewski 2003), to jest to, jak słusznie wskazuje Ładosz, kwestia zależąca przede wszystkim od badań empirycznych i umiar w spekulacji jest tu jak najbardziej wskazany. Ponadto, gdyby nawet problem mechaniczności umysłu został kiedyś przekonująco rozwiązany, to nie przesądzałoby to jeszcze w gruncie rzeczy niczego na temat tego, czy matematyka niekonstruktywna w jakimkolwiek sensie wykracza poza możliwości umysłu funkcjonującego w taki czy inny sposób.

3. Czy prawda to dowodliwość czy bycie dowiedzionym?

Jak było już wspomniane, konstruktywiści utożsamiają prawdziwość zdania matematycznego z istnieniem jego dowodu. Nie wiadomo jednak, czy przez „dowód" należy tu rozumieć pewien abstrakcyjny przedmiot, mogący istnieć niezależnie od naszej wiedzy, czy też coś, co znajduje się w danej chwili w posiadaniu przez ludzi. Innymi słowy: konstruktywizm nie chce lub nie może podjąć stanowczej decyzji co do tego, czy za prawdziwe należy uznać te zdania matematyczne, które są *faktycznie dowiedzione* (nazwijmy to stanowisko „faktualizmem"), czy te, które są *dowodliwe* (określmy ten pogląd jako „possybilizm"). Autorzy piszący na temat konstruktywizmu często są świadomi istnienia tego rozróżnienia; wspomina o nim m.in. Dummett:

> nasze zdania są prawdziwe tylko wtedy, gdy stwierdziliśmy, że są takie, to znaczy — w odniesieniu do zdań matematycznych — gdy je udowodniliśmy lub przynajmniej gdy dysponujemy efektywną metodą uzyskiwania ich dowodu (Dummett 1977, s. 375, przekład własny).

oraz Crispin Wright:

> Dla intuicjonisty prawdziwość zdania matematycznego może polegać jedynie na tym, że istnieje dla niego dowód lub, w bardziej radykalnej wersji, na tym, że rzeczywiście dysponujemy jego dowodem (Wright 1995, s. 304).

Jak wśród konstruktywistów wygląda rozkład poparcia dla tych dwóch stanowisk? Heyting, na przykład, skłania się ku faktualizmowi. Na pytanie realisty, czy pewna liczba posiada pewną własność, zanim zostanie to wykazane, odpowiada: zdanie matematyczne zdaje sprawę z faktu, że *dokonano* pewnej konstrukcji myślowej, więc dopóki konstrukcja taka nie zostanie przeprowadzona, nie można mówić, że coś na temat danej liczby było udowodnione *przed* tym wydarzeniem. Ponieważ jednak odpowiedź taka jest dla realisty niezadowalająca, Heyting mówi, że aby w pełni wyjaśnić sens postawionego pytania należałoby odwołać się do pojęć metafizycznych, do świata bytów matematycznych istniejących niezależnie od naszej wiedzy (Heyting 1956, s. 3). Na to jednakże nie ma zgody, gdyż Heyting domaga się całkowitego uwolnienia matematyki od metafizyki. Z kolei Dummett początkowo zdawał się sprzyjać possybilizmowi — uważał zrównanie prawdziwości z faktycznym dowiedzeniem za pogląd skrajny, którego wcale nie trzeba akceptować, aby dochować wierności innym zasadom intuicjonistycznym; dodatkową zaletą possybilizmu miało być również oddanie sprawiedliwości podzielanej też przez realistów intuicji, że zdania matematyczne są prawdami wiecznymi (Dummett 1977, s. 18-19). Jednak w swoich późniejszych pracach Dummett staje na stanowisku faktualistycznym. Niezmienność prawdy matematycznej może, jego zdaniem, polegać tylko na tym, że jeśli udowodniono prawdziwość pewnego twierdzenia, to prawdziwość ta nie może ulec zmianie. Jednakże „nie wynika z tego to, że takie twierdzenie posiada tę wartość logiczną od zawsze, ani też to, że rozpoznanie przez nas wartości logicznej owego twierdzenia nie ma żadnego wpływu na posiadanie przez niego tej wartości" (za: Szubka 2001, s. 157). Przyznając, że poznanie matematyczne nie polega na arbitralnym „tworzeniu prawdy", lecz jest w pewnym sensie odkrywaniem niearbitralnej rzeczywistości matematycznej, dodaje zarazem: „nie powinno się na tej podstawie sądzić, że rzeczywistość ta odwiecznie posiadała te cechy zanim je sobie uświadomiliśmy. Powinniśmy je raczej pojmować jako cechy, które zaistniały wraz z ich odkryciem; przed tym odkryciem rzeczywistość matematyczna była pod tym względem po prostu nieokreślona" (za: Szubka 2001, s. 255).

Tak wyglądają przedstawiane przez konstruktywistów przykładowe rozwiązania dylematu faktualizmu i possybilizmu. Postaram się wykazać, że na gruncie konstruktywizmu dylemat ten jest niemożliwy do satysfakcjonującego rozwiązania. Będę mianowicie argumentował, że (1) faktualizm jest stanowiskiem w najlepszym razie wysoce nieintuicyjnym, a w najgorszym — niedorzecznym, natomiast (2) possybilizm, choć jest poglądem rozsądnym, to jednak nie da się go utrzymać *na gruncie konstruktywizmu*. Zacznijmy od faktualizmu, wprowadzając na wstępie pewne ustalenia pojęciowe. Zauważmy, że jeśli, przykładowo, Szekspir nie napisał nic o kolorze oczu Hamleta, to kolor ten jest obiektywnie nieokreślony, jest *nijaki*; każdy może więc dopisać swoje uzupełnienie i określić kolor oczu Hamleta mocą własnej arbitralnej decyzji. Tej *ontologicznej* nieokreśloności nie wolno mieszać z czymś zupełnie innym, mianowicie z nieokreślonością *epistemiczną*, tzn. nieokreślonością przekonań i brakiem wiedzy pewnego podmiotu w odniesieniu do pewnego sądu. Skoro kolor oczu *Hamleta* jest ontologicznie nieokreślony, to nie ma w ogóle sensu mówić o nieokreśloności epistemicznej jakiegokolwiek podmiotu w tym względzie, ponieważ po prostu nie ma tu niczego, co by można było wiedzieć. (Wszak do natury wiedzy, według klasycznego określenia, od którego nie znam lepszego, wchodzi prawdziwość, czyli zgodność z rzeczywistym stanem rzeczy, który — na mocy założenia — jest nieokreślony.) Natomiast kolor oczu *Szekspira* jest — jak każdy rozsądny człowiek się zgodzi[5] — ontologicznie określony, tzn. Szekspir *miał* oczy tego lub innego koloru, nawet jeśli nie wiemy, jakiego (nieokreśloność epistemiczna!), a nawet jeżeli wszelkie świadectwa na ten temat zostały bezpowrotnie utracone i już nigdy nie będziemy w stanie się tego dowiedzieć. Przejdźmy teraz od koloru oczu do wartości logicznej zdań. Nie ulega wątpliwości, że Heyting i Dummett (z okresu faktualistycznego) interpretują nieokreśloność prawdziwości zdań matematycznych w sposób mocny, czyli ontologiczny (interpretacja epistemiczna byłaby trywialna i nie miałaby żadnych szczególnych związków z konstruktywizmem). Skoro zatem — w myśl faktualizmu — zdania matematyczne same w sobie nie mają żadnej obiektywnej wartości logicznej, dopóki nie przedstawimy dowodu lub obalenia tych zdań, to znaczy (na mocy sensu pojęcia nieokreśloności), że ich wartość logiczną można determinować na (co najmniej dwa) różne sposoby. To jest jednak po prostu niezgodne ze znaczeniem słowa „dowód". Jeżeli bowiem wartość logiczna dowolnego zdania matematycznego jest nieokreślona, to może być swobodnie określana na różne sposoby, a skoro sposobem określania tej wartości jest podawanie dowodu, to znaczy, że w dowolnej teorii matematycznej można *udowadniać sprzeczne ze sobą twierdzenia*; można równie dobrze udowodnić, że liczba $2^{100!} + 1$ jest liczbą pierwszą, jak i można udowodnić, że liczba $2^{100!} + 1$ jest liczbą złożoną, jednakże z natury rzeczy jest to niemożliwe. Zdania matematyczne to nie oczy Hamleta, nie można określać (podkreślmy: w sensie ontologicznym) ich cech mocą arbitralnej twórczości, gdyż matematyka nie jest arbitralną twórczością, lecz formułowaniem ścisłych dowodów o obiektywnej ważności, wykluczających możliwość podania kontrdowodu (przynajmniej w odniesieniu do teorii niesprzecznych). Jeśli zaś, aby uchylić się przed taką konsekwencją, faktualizm przyzna, że wartości logicznej zdań matematycznych nie można określać na różne sposoby, że można ją określić na *jeden* tylko sposób, to trudno byłoby zrozumieć, na czym miałaby wówczas polegać teza, że wartość logiczna tych zdań była nieokreślona. Jeżeli coś może być określone na jeden tylko sposób, to naturalne wydaje się uznanie, że to coś jest *po prostu określone*, że bycie określonym jest *powodem* tego, że można to określić na jeden sposób. Pogląd, że coś nie jest określone, ale mimo to może zostać określone na dokładnie jeden sposób, wydaje się nie do przyjęcia. (Pamiętajmy, że cały czas chodzi nam tu o określoność ontologiczną, a więc o to, że pewne zdanie obiektywnie *posiada* daną wartość logiczną, niezależnie od tego, co sobie o niej myślimy.) Wygląda więc na to, że jedyny spójny sens, jaki można nadać idei nieokreślenia wartości logicznej zdań matematycznych, to właśnie nieokreśloność czysto epistemiczna: pewien podmiot nie wie, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie, może co najwyżej mieć na ten temat pewne intuicje lub poszlakowe świadectwa. Jeśli jednak znajdzie dowód tego

[5] Oczywiście, przyjmuję w tym miejscu (zdroworozsądkowy) realizm i odrzucam antyrealizm, jednakże nie oznacza to, że już na wstępie zakładam coś, co będę chciał dowieść. To realistyczne założenie służy bowiem *wyłącznie* do łatwiejszego wyjaśnienia pewnej różnicy terminologicznej i nie ma żadnego wpływu na przebieg dalszej argumentacji.

zdania lub jego negacji, to jego wiedza i przekonania dotyczące tego zdania zostaną w pełni określone. Nieokreślenie *przekonań* i brak *wiedzy* na temat czegoś nie ma nic wspólnego z nieokreśleniem *tego czegoś*. Tezy Dummetta, że nasze rozpoznanie prawdziwości twierdzeń matematycznych ma jakiś wpływ na tę prawdziwość, że rzeczywistość matematyczna jest sama w sobie nieokreślona, a cechy bytów matematycznych zaczynają istnieć dopiero wraz z ich odkryciem, brzmią tak zdumiewająco, że na usta od razu ciśnie się pytanie: „skoro cechy te zaczynają istnieć dopiero wraz z ich odkryciem, to jaki w ogóle sens można nadać tezie, że je *odkrywamy* czy *rozpoznajemy*, że matematyka jest obiektywną wiedzą, a nie fantazją? Jeżeli cokolwiek odkrywamy bądź rozpoznajemy, to musi to być coś, co już istniało i było określone przed dokonaniem odkrycia, a jeśli coś zaczyna istnieć dopiero jako wynik naszej działalności intelektualnej, to nie sposób powiedzieć, że zostało przez nas odkryte". Takie pytanie stanowi jednak po prostu zwięzłe sformułowanie argumentu, który został przedstawiony w tym akapicie, a którego konkluzja brzmi: faktualizm jest stanowiskiem trudnym lub zgoła niemożliwym do utrzymania.

Przedstawiona powyżej argumentacja przeciwko faktualizmowi spotkała się z pewnymi zarzutami. Pierwszy z nich polegał na zakwestionowaniu tezy, jakoby coś, co było ontologicznie nieokreślone, mogło zawsze być determinowane na co najmniej dwa różne sposoby (lub, przez transpozycję, równoważnej tezy, że jeżeli coś może być określone na dokładnie jeden sposób, to dlatego, że jest ontologicznie określone). Kontrprzykładem dla tej tezy miało być zdanie „Sto dwudziesty ford jest czarny", które nie ma żadnej wartości logicznej, dopóki nie został wyprodukowany sto dwudziesty ford. Jednocześnie, jak głosi legenda, na początku produkowano tylko czarne fordy, wobec czego wartość logiczną tego zdania można determinować (zarówno ontologicznie, jak i epistemicznie) tylko na *jeden* sposób — jeżeli w ogóle ma ono wartość logiczną, to wartością tą jest prawda, a ponadto już zawczasu wiemy, że jest to właśnie ta wartość, jaką to zdanie przyjmie. Powodem określalności tego zdania na jeden tylko sposób (w sensie ontologicznym i epistemicznym) była zachcianka Henry'ego Forda, by wszystkie fordy były czarne, a nie to, że dany obiekt był już uprzednio określony co do koloru, gdyż nie mógł być, bo w ogóle jeszcze nie istniał. Moja odpowiedź na ten argument jest następująca: czym innym jest ontologiczne określenie pewnego obiektu (forda), a czym innym jest ontologiczne określenie pewnego zdania, które — przynajmniej *prima facie* — dotyczy tego obiektu. Zdanie „Sto dwudziesty ford jest czarny" wbrew temu, co głosi zarzut, *może* być ontologicznie określone co do wartości logicznej, nawet jeśli nie istnieje jeszcze sto dwudziesty ford. Przykładowo, gdyby Henry Ford był potężnym i nieodmiennym w swych wyrokach bóstwem, które obwieściło nam, że wyprodukuje tysiąc fordów i wszystkie one będą czarne, to sto dwudziesta maszyna, która zjedzie z taśmy produkcyjnej, *z konieczności* będzie czarna, i fakt ten będzie ontologicznie określony nawet wtedy, gdy ten konkretny samochód nie został jeszcze zbudowany. Rzeczywistym podmiotem logicznym zdania „Sto dwudziesty ford jest czarny" nie będzie w tej sytuacji rzekomy przedmiot nieistniejący, jakim jest sto dwudziesty ford, lecz nieodwołalne boskie zarządzenie Forda. Gdyby natomiast Ford był — jak to faktycznie miało miejsce — tylko człowiekiem, to wówczas nie można powiedzieć, jak głosi zarzut, że zdanie „Sto dwudziesty ford jest czarny" jest epistemicznie określone pomimo nieokreśloności ontologicznej i że może zostać ontologicznie zdeterminowane wyłącznie jako prawdziwe. Ford bowiem, jako człowiek, może zmieniać swoje zarządzenia i nie możemy wykluczyć, że pewnego dnia nakaże, by wszystkie fordy począwszy od sto dziewiętnastego były niebieskie. To sprawia, że zdanie „sto dwudziesty ford jest czarny" *może* zostać ontologicznie zdeterminowane na co najmniej *dwa* sposoby, a w związku z tym, nie możemy *wiedzieć*, że sto dwudziesty ford jest czarny, wobec czego, zdanie to nie jest epistemicznie określone. Jeżeli naprawdę wiemy, że *p*, to wartość logiczna zdania „*p*" jest ontologicznie określona, a jeśli nie jest ona określona, to w istocie nie możemy mówić, że wiemy, że *p*. Zostawmy już jednak motoryzację i przejdźmy do drugiego zarzutu, w myśl którego pewne fakty z dziedziny fizyki kwantowej podważają przedstawione tu tezy dotyczące pojęć określoności i zależności między nimi. Chodzi tu o wartość spinu cząstki elementarnej, która jest nieokreślona przed dokonaniem pomiaru, i dopiero w jego wyniku określa się ona na jeden z dwóch sposobów. Ponadto nie jest możliwe uzyskanie obu wyników na raz ani wcześniejsze wpłynięcie na to, który wynik się pojawi. Wobec tego, nic nie stoi na przeszkodzie, by uznać, że podobna sytuacja ma miejsce w przypadku matematyki: zdania matematyczne są ontologicznie nieokreślone co do swojej wartości logicznej i uzyskują ją dopiero w wyniku dokonanych przez nas operacji, przy czym nie od nas zależy, jaką wartość te zdania uzyskają, a ponadto (w przypadku teorii niesprzecznych) jeśli już określimy wartość pewnego zdania, to nie można jej określić na inny sposób. Zarzut ten można znacząco osłabić i sproblematyzować poprzez wskazanie na fakt, że zdanie „spin cząstki elementarnej jest ontologicznie nieokreślony przed dokonaniem pomiaru" trudno uznać za twierdzenie empiryczne. W istocie rzeczy nie należy ono do fizyki kwantowej, lecz do jednej z jej filozoficznych interpretacji, jaką jest tzw. interpretacja kopenhaska, której głównym rzecznikiem był Niels Bohr. Nie jest to interpretacja jedyna ani wiążąca, miała ona i ma nadal wielu przeciwników, wobec czego nie można się na nią powoływać jako na oficjalne stanowisko nauki. Gdyby jednak nawet uznać ją za najbardziej adekwatną, to istnieje inny powód, sprawiający, że przykład fizyczny nie ma zastosowania w przeprowadzanych tu rozważaniach o matematyce. Jak bowiem wiadomo, pomiar jest zdarzeniem, w którym dochodzi do kauzalnej interakcji między dwoma układami przedmiotów fizycznych — podmiotem pomiaru (obserwatorem) i przedmiotem pomiaru, takiej jak np. ekspozycja przedmiotu pomiaru na wiązkę fotonów służącą do oświetlenia. Podczas pomiaru jego przedmiot ulega więc mniejszym lub większym modyfikacjom w wyniku działań obserwatora. Taka sytuacja nie ma jednak miejsca w przypadku matematyki: przedmiot pomiaru nie jest niczym fizycznym i według powszechnie przyjętego przekonania jest całkowicie niezmienny (niezależnie od opinii na temat tego, czym właściwie on jest). Wobec tego nie jest możliwe jakiekolwiek oddziaływanie obserwatora na matematyczne przedmioty czy stany rzeczy, nie jest możliwe dokonanie w nich jakichkolwiek zmian. O ile jest możliwe, że pewne determinacje przedmiotów fizycznych są skutkiem oddziaływań obserwatora podczas pomiaru, o tyle jest to wykluczone w przypadku „pomiarów” rzeczywistości matematycznej. Wszelkie określenia i cechy, posiadane przez obiekty matematyczne, muszą być przez nie posiadane zupełnie niezależnie od naszej działalności, która nie jest w stanie wywrzeć na nie żadnego wpływu. Poznanie tych obiektów nie może więc być niczym innym, jak myślowym odzwierciedleniem stanu rzeczy, ontologicznie określonego niezależnie od wszelkich aktów mentalnych. W związku z tym, nie da się utrzymać analogii między poznaniem matematycznym a poznaniem fizycznym, jaką sugeruje zarzut. To zaś pozwala pozostawić w mocy argument przeciwko faktualizmowi.

Przejdźmy teraz do possybilizmu. Być może bowiem pewien konstruktywista, zniechęcony do faktualizmu wiążącymi się z nim trudnościami, będzie chciał przejść na to bezpieczniejsze stanowisko. To jednak, niestety, wiązałoby się z porzuceniem konstruktywizmu jako takiego. Dlaczego? Otóż przyjęcie possybilizmu wiąże się z pewnym kosztem metafizycznym, być może niewielkim dla przeciętnego filozofa, ale zdecydowanie zbyt dużym dla konstruktywisty. Jeśli bowiem zgodzimy się, że pewne zdanie jest dowodliwe niezależnie od tego, czy faktycznie dysponujemy jego dowodem, to fakt jego dowodliwości jest *faktem obiektywnym*, zachodzącym niezależnie od czyjejkolwiek wiedzy i woli. W świetle konstruktywistycznego założenia głoszącego, że konstrukcje matematyczne mają charakter mentalny, należałoby przyjąć, że za taki stan rzeczy odpowiadają jakieś *stałe dyspozycje* umysłowe (pojmowanie bądź transcendentalnie, bądź naturalistycznie), które sprawiają, iż ludzie niezależnie od czasu, miejsca i okoliczności przeprowadzają konstrukcje matematyczne w pewien ściśle określony sposób. Można by wówczas uznać, że dyspozycje te leżą u podstaw wszelkiego konstruowania, wyprzedzają wszelkie faktycznie przeprowadzone konstrukcje i określają, które zdania matematyczne są dowodliwe, a które nie. W tym momencie stało się już jednak widoczne, że ceną takiego uzasadnienia possybilizmu jest uwikłanie się w spekulatywne i daleko idące założenia metafizyczne, co na gruncie konstruktywizmu (np. u Heytinga) jest bardzo trudne lub wręcz niemożliwe do zaakceptowania. Podobny problem staje przed konstruktywizmem w stylu Dummetta. Jeśli bowiem przyjmiemy possybilizm i zgodzimy się, że zdania matematyczne są dowodliwe nawet wtedy, gdy nie zostały jeszcze dowiedzione, to nie eliminujemy wcale realistycznego pojęcia prawdy, lecz przesuwamy je o jeden poziom wyżej. Jeśli bowiem nawet pewne zdanie matematyczne p nie jest prawdziwe, dopóki go nie udowodnimy, to przecież — przy założeniu possybilizmu — *meta*matematyczne zdanie „p jest dowodliwe” będzie zdaniem *prawdziwym*, i jego prawdziwość będzie zupełnie niezależna od tego, czy ją znamy (np. twierdzenie Pitagorasa *było* dowodliwe nawet wtedy, gdy nikt jeszcze nie miał o nim pojęcia); odrzucenie tej konsekwencji wiązałoby się z odrzuceniem samego possybilizmu. Można zresztą sformułować jeszcze bardziej bezpośredni argument. Jeżeli zdanie matematyczne p w dowolnym momencie czasu posiada — zgodnie z possybilizmem —

własność bycia dowodliwym, to czym w istocie takie stwierdzenie różni się od powiedzenia, że zdanie to jest po prostu *prawdziwe*? Jeśli uznajemy jakieś zdanie za wieczyście dowodliwe, to z czego owa dowodliwość może wynikać, jeśli nie z tego, że zdanie to jest po prostu prawdziwe?[6] Przykładowo, jeżeli można udowodnić pierwszość jakiejś liczby — np. metodą sita Eratostenesa — to dzieje się tak *dlatego*, że liczba ta *naprawdę jest* liczbą pierwszą — i co więcej, *była nią od zawsze*, gdyż dowód jej pierwszości mógł z równą poprawnością przeprowadzić jakikolwiek wcześniej żyjący człowiek. Konsekwencją przyjęcia dowolnej z zarysowanych tu linii argumentacji musiałoby jednak być odrzucenie jednej z centralnych dla filozofii Dummetta tez o epistemiczności prawdy, tzn. tezy, że prawda jest zależna od naszych zdolności do jej rozpoznawania i że dopiero akt rozpoznania konstytuuje ją jako prawdę. Dlatego wydaje się wątpliwe, by Dummett lub zwolennik jego poglądów był skłonny na to przystać. Być może chciałby próbować bronić swojej koncepcji poprzez dokonanie rozróżnienia na prawdziwość „potencjalną" (posiadaną przez zdania dowodliwe przed ich dowiedzeniem) i prawdziwość „aktualną", czyli prawdziwość zaktualizowaną przez podanie dowodu. Takie sztuczne dystynkcje nie wnosiłyby jednak niczego istotnego do sprawy, ani nie uchylały prostego faktu, że (przynajmniej niektóre) zdania matematyczne są *po prostu* prawdziwe, niezależnie od tego, czy o tym wiemy, czy nie. Jeżeli zaś jakaś koncepcja filozoficzna nie jest w stanie zdać z tego faktu sprawy, to należy raczej pomyśleć o zmianie tej koncepcji niż o przebudowywaniu matematyki od podstaw.

PODSUMOWANIE

W niniejszym artykule przedstawiłem i broniłem trzech argumentów przeciwko matematycznemu konstruktywizmowi. Skłaniają mnie one do sądzenia, że zarzuty formułowane przez konstruktywistów pod adresem klasycznej matematyki nie są przekonujące, a ponadto, że można wskazać na istotne — być może nieprzezwyciężalne — problemy, w jakie wpada sam konstruktywizm. Celem tego artykułu była krytyka pewnego stanowiska (lub raczej typu stanowisk) w filozofii matematyki. Nie był to cel wyłącznie negatywny, gdyż jego realizacja wiąże się z urzeczywistnieniem celu jak najbardziej pozytywnego, jakim jest obrona matematyki klasycznej. Negatywny charakter tych rozważań polega na tym, że nie przesądzają one pozytywnie żadnego alternatywnego wobec konstruktywizmu stanowiska w filozofii matematyki. Znalezienie i uzasadnienie koncepcji, która możliwie najpełniej i z jak najmniejszymi trudnościami tłumaczyłaby sam fenomen matematyki, pozostaje zagadnieniem otwartym.

---

[6] Przynajmniej w odniesieniu do tak naturalnych i elementarnych teorii, jak teoria pierwszości liczb naturalnych.

BIBLIOGRAFIA

Bishop E., Bridges D. (1985), *Constructive Analysis*, New York, Springer-Verlag.

Bridges D. (www), *Constructive Mathematics*, http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive/ (dostęp: 26.08.2010).

Dummett M. (1977), *Elements of Intuitionism*, Oxford, Clarendon Press.

Dummett M. (1998), *Logiczna podstawa metafizyki*, przeł. W. Sady, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Grzegorczyk A. (1961), *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Heyting A. (1956), *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Krajewski S. (2003), *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN.

Ładosz J. (1968), *Szkice z epistemologii matematyki. Matematyka jako działalność konstruktywna*, Warszawa, Książka i Wiedza.

Murawski R. (2001), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Szubka T. (2001), *Antyrealizm semantyczny. Studium analityczne*, Lublin, Redakcja Wydawnictw KUL.

Wright C. (1995), *Realizm, znaczenie i prawda* (fragm.), przeł. T. Szubka, [w:] *Metafizyka w filozofii analitycznej*, red. Szubka T., Lublin, Towarzystwo Naukowe KUL.