Filozofia Nauki
Rok XVIII, 2010, Nr 4(72)

Zbigniew Tworak

O pojęciu prawdy w intuicjonizmie matematycznym

> Wydaje się, iż w bardzo dużej części matematyki decyzja matematyka pełni rolę podstawową — tworzenia odpowiedniej wiedzy. Zważywszy, że wiele jest możliwości tworzenia nowych teorii oraz ich wariantów, nie można twierdzić, iż prawda matematyczna polega wyłącznie na *adequatio intellectus et rei*. Są inne sposoby ustalania tej prawdy (F. M. Quesada, *Prawda w naukach formalnych*, s. 366).

1. WSTĘP

Intuicjonizm jest trzecim, obok logicyzmu i formalizmu, kierunkiem w ramach badań nad podstawami matematyki. Ukształtował się na początku XX wieku jako reakcja na tzw. drugi kryzys podstaw matematyki wywołany odkryciem antynomii na terenie Cantorowskiej teorii mnogości. Za jego twórcę uważa się matematyka holenderskiego L. E. J. Brouwera (1881-1966). Idee Brouwera spopularyzował i rozwinął jego uczeń A. Heyting (1898-1980). Krótko mówiąc, intuicjonizm jest kierunkiem antyplatońskim, przyznającym umysłowi ludzkiemu konstytutywną rolę wobec obiektów matematycznych. U jego podstaw leży teza konceptualizmu, wedle której matematyka jest wytworem wolnej życiowej aktywności umysłu ludzkiego wspartej aprioryczną intuicją następstwa czasowego, a nie systemem twierdzeń opartym na aksjomatach i regułach.[1] Nieco szczegółowiej matematykę intuicjonistyczną opisują następujące trzy tezy:

[1] Źródłem intuicjonizmu jako odrębnej koncepcji filozoficznej były pewne idee I. Kanta, który matematykę starał się oprzeć na apriorycznej intuicji czasu i przestrzeni oraz zwracał uwagę na rolę

1. Istnienie obiektów matematycznych o danych własnościach należy rozumieć jako konstruowalność przez myśl.[2] Aktywność konstrukcyjną cechuje twórczość, nieskrępowanie żadnymi regułami i podporządkowanie pierwotnej intuicji. Wiarę w istnienie transcendentalne, czyli niezależne od naszych myśli, należy odrzucić, w szczególności nie można z niej korzystać, uzasadniając twierdzenia matematyczne.

2. Sposobem dochodzenia do prawd matematycznych są umysłowe konstrukcje, które dowodzą ich prawdziwości. Prawdy się nie odkrywa, lecz się ją ustala. Oznacza to, że w celu wyjaśnienia pojęcia prawdy matematycznej należy odwołać się do pojęcia dowodu, a nie do pojęcia korespondencji z jakąś platońską, niezależną od myśli, sferą obiektów matematycznych.

3. Wszelkie konstrukcje matematyczne są niezależne od jakiegokolwiek języka (naturalnego lub sformalizowanego), będącego w istocie jedynie narzędziem umożliwiającym zapamiętywanie matematycznych konstrukcji i komunikowanie ich innym. Należy więc analizować myśl matematyczną, a nie język matematyki.

Wedle tezy konceptualizmu dowód zdania matematycznego jest umysłową konstrukcją na obiektach matematycznych uzyskaną w procesie twórczej aktywności poznającego podmiotu. Prowadzi to do odrzucenia wszelkich niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych, tj. dowodów nie podających sposobu konstrukcji postulowanych obiektów. Stosowanie takich dowodów — twierdzą intuicjoniści — jest nie tylko nieco dziwne, ale stanowi też źródło różnych trudności w matematyce. W szczególności ograniczyć należy użycie praw uprawniających budowanie owych niekonstruktywnych dowodów, przede wszystkim prawa wyłączonego środka $A \vee \neg A$ oraz prawa podwójnego przeczenia $\neg\neg A \rightarrow A$. Nierozważne jest przekonanie, że wspomniane prawa mają charakter uniwersalny i że można je bezpiecznie stosować również w dziedzinach niekontrolowanych przez intuicję, a mianowicie dziedzinach nieskończonych, których żadne wyliczenie elementów nie może wyczerpać. W odniesieniu do dziedziny nieskończonej traci walor alternatywa: uznać zdanie generalne $\forall x(A)$ albo uznać sprzeczne z nim zdanie egzystencjalne $\exists x \neg(A)$ (jest ono równoważne ze zdaniem $\neg\forall x(A)$). Chcąc uzasadnić zdanie egzystencjalne, nie możemy zadowolić się obaleniem sprzecznego z nim zdania generalnego. Taki dowód byłby właśnie niekonstruktywny, a co za tym idzie niedopuszczalny — dowód istnienia obiektu danego typu musi podawać sposób jego konstrukcji.

Krytyka logiki klasycznej przeprowadzona przez Brouwera kierowała się bezpośrednio przeciwko niektórym prawom, pośrednio zaś przeciwko realistycznej koncepcji prawdy i związanej z nią dychotomii prawdy i fałszu. Realistyczna koncepcja prawdy dopuszcza jako prawdziwe również te zdania, których prawdziwości nie po-

---

konstrukcji w uzasadnianiu istnienia obiektów matematycznych. Twierdzenia matematyki były według niego zdaniami syntetycznymi *a priori* (a nie analitycznymi). Zob. w tej kwestii np. (Posy 1974), (Dąbska 1976).

[2] Popper, nawiązując do Berkeleya, myśli tej nadał postać tożsamości: *esse* = *construi* (Popper 1968, s. 191).

trafimy rozpoznać. Z tego powodu jest ona niezrozumiała. Jeżeli zdanie ma być prawdziwe, to musi być prawdziwe na mocy czegoś, co da się rozpoznać i co skłonni będziemy uznać za świadectwo jego prawdziwości. Krótko mówiąc, prawda przekraczająca możliwości jej stwierdzenia jest pojęciem pustym. Pierwotne względem prawdziwości staje się więc pojęcie świadectwa (na korzyść lub niekorzyść danego zdania) lub pojęcie uzasadnienia. Wyraża to następująca zasada: Jeżeli *s* jest świadectwem na korzyść *A*, to każdy, kto rozpozna *s*, powinien uznać *A* za prawdziwe. Heyting, przeciwstawiając intuicjonistów matematykom „klasycznym", pisał:

> Kiedy ty myślisz w kategoriach aksjomatów i dedukcji, my myślimy w kategoriach świadectwa (Heyting 1956b, s. 13).[3]

W matematyce funkcję świadectwa uzasadniającego prawdziwość zdania pełni jego dowód. Zwykłe stwierdzenie matematyczne, na przykład stwierdzenie hipotezy Goldbacha (GH), jest tylko skróconą formą stwierdzenia o dowodliwości owej hipotezy: dowód GH jest dla nas osiągalny. Z tego powodu w „logice Brouwerowskiej" zdania dzieli się na prawdziwe, tj. takie, które umiemy efektywnie udowodnić, oraz absurdalne, tj. takie, z których umiemy wyprowadzić sprzeczność. Podział ów — w przeciwieństwie do klasycznej dychotomii prawdy i fałszu — nie jest zupełny, tj. nie każde zdanie matematyczne umiemy efektywnie udowodnić bądź sprowadzić do sprzeczności. Tak więc, związanie prawdziwości z dowodliwością (a fałszywości z obalalnością) dokonuje się w „logice Brouwerowskiej" za cenę tego, że przestaje w niej obowiązywać zasada dwuwartościowości, przede wszystkim zaś zasada wyłączonego środka.

Celem kolejnych paragrafów jest rekonstrukcja i analiza koncepcji prawdy występującej w intuicjonizmie klasycznym, reprezentowanym przez Brouwera i Heytinga, oraz intuicjonizmie współczesnym, reprezentowanym przez Dummetta i Prawitza.

2. AKTUALIZM *VERSUS* POSYBILIZM

Przypomnijmy, intuicjonizm opowiada się za epistemiczną (lub justyfikacyjną) koncepcją prawdy, łączącą prawdziwość z posiadaniem świadectwa przemawiającego na korzyść rozważanego zdania. W przypadku matematyki prawdziwe są tylko te zdania, o prawdziwości których możemy się dowiedzieć dowodząc ich.

Wyróżnić można kilka znaczeń terminu „dowód". Otóż może odnosić się on do psychicznej czynności dowodzenia („Dowód, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, zajął mi godzinę") lub do pewnego obiektu matematycznego („Dowód, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, znali już starożytni Grecy"). Znajduje to swój wyraz w następujących postulatach:

[3] While you think in terms of axioms and deductions, we think in terms of evidence.

(1) Udowodnić [to, że] $A =_{df}$ Podać konstrukcję ustalającą to, co opisuje A.

Dowód [tego, że] $A =_{df}$ Konstrukcja ustalająca to, co opisuje A.

Dowód w znaczeniu drugim można znowu rozumieć na dwa sposoby, mianowicie jako wytwór czynności dowodzenia lub jako obiekt bytowo samoistny. Dystynkcje te znajdują rozwinięcie w odrębnych stanowiskach na temat prawdy.

W sposób wstępny teoriodowodowe rozumienie prawdy i fałszu wyznaczają schematy:

(2) Zdanie A jest prawdziwe wtw istnieje konstrukcja będąca dowodem A.

Zdanie A jest fałszywe wtw istnieje konstrukcja będąca dowodem $\neg A$

wtw istnieje konstrukcja sprowadzająca A do sprzeczności.

Tym samym warunki prawdziwości zdania określone są przez: (a) warunki kodyfikujące reguły konstruowania dowodów, (b) pojęcie istnienia. Jak powiedziano, obowiązujące w intuicjonizmie reguły dowodzenia wykluczają wszelkie niekonstruktywne dowody twierdzeń, zwłaszcza „mocne" dowody nie wprost, a spełniająca je konstrukcja, czyli dowód-obiekt, pełni rolę uprawdziwiacza (ang. *truth-maker*) danego zdania.

Zajmijmy się pojęciem istnienia. Rozróżnienie na istnienie aktualne (faktyczne lub fizyczne) i istnienie potencjalne pozwala następująco uszczegółowić wyjściowy schemat:

(3) Zdanie A jest prawdziwe wtw istnieje aktualnie konstrukcja będąca dowodem A

wtw A zostało (przez kogoś) udowodnione.

(4) Zdanie A jest prawdziwe wtw istnieje potencjalnie konstrukcja będąca dowodem A

wtw A jest dowodliwe.

Sformułowanie (3) nadaje pojęciu prawdy (i fałszu) charakter wyraźnie epistemiczny i temporalny: zdanie staje się prawdziwe dopiero od momentu skonstruowania przez kogoś jego dowodu.[4] Innymi słowy, tym, co czyni zdanie prawdziwym — świadectwem przesądzającym o jego prawdziwości — jest faktycznie skonstruowany dowód (kategorię aktualności należy bowiem rozumieć jako kategorię rzeczywistości). Zdanie, dla którego został skonstruowany dowód, staje się prawdziwe „na zawsze". Oznacza to, że prawda jest wieczna, ale nie jest odwieczna.[5] Ten typ uwa-

[4] Właściwie predykat prawdy należałoby zrelatywizować do momentu czasu. Zdanie matematyczne, które obecnie nie jest prawdziwe, może nim stać się później; można powiedzieć np. Wczoraj GH nie było prawdziwe, lecz dzisiaj już jest prawdziwe.

[5] Zdanie jest wiecznie prawdziwe wtw istnieje punkt czasowy t taki, że jest ono prawdziwe w t

runkowania prawdy można nazwać *aktualizmem*. Rzecz jasna, z uwagi na istnienie zdań nierozstrzygniętych — tj. takich, których jeszcze ani nie udowodniono, ani nie obalono, np. z powodu ograniczeń fizycznych lub umysłowych — zasada wyłączonego środka traci ważność. Sformułowanie (4) różni się od sformułowania (3) tym, że odwołuje się do pojęcia możliwości zawartego *implicite* w pojęciu dowodliwości: zdanie dowodliwe to zdanie, które może być udowodnione. Z tego powodu ten typ uwarunkowania prawdy nazwijmy *posybilizmem*. Posybilizm ma dwie wersje w zależności od tego, czy owa możliwość jest rozumiana epistemicznie i temporalnie (tzn. jest ona uzależniona od zmieniających się stanów naszej wiedzy), czy też realistycznie i atemporalnie (tzn. jest ona obiektywnym stanem rzeczy, całkowicie niezależnym od naszej wiedzy i zmian, jakim podlega). W przypadku pierwszym, prawdziwość zdania sprowadza się do umiejętności jego udowodnienia na podstawie posiadanej wiedzy. Istnienie dowodu, jako że jest zakotwiczone w znajomości metody, która — jeśli zostanie zastosowana — doprowadzi do jego skonstruowania, oznacza możność aktualizacji:

(5) *A* jest dowodliwe w sensie epistemicznym wtw konstrukcja będąca dowodem *A* jest nam (obecnie) znana, tj. wiadomo, jak ją zrealizować.

Może więc się zdarzyć, że zdanie zostało zakwalifikowane jako prawdziwe, mimo że nikt go jeszcze nie udowodnił (a być może nigdy nie udowodni). Wystarczy, że wiadomo, jak to zrobić. Ponieważ wiedza o metodach dowodzenia zmienia się w czasie, prawda ma charakter temporalny, a w konsekwencji traci ważność zasada wyłączonego środka. W istocie wersja ta stanowi zliberalizowaną odmianę stanowiska aktualizmu. Natomiast w przypadku drugim, prawdziwość zdań wykracza poza naszą zdolność ich udowodnienia (w sensie znajomości metody konstrukcji dowodu). Tym, co sprawia, że zdanie jest prawdziwe, jest całkowicie niezależne od naszych aktów poznawczych i pozaczasowe istnienie jego dowodu:

(6) *A* jest dowodliwe w sensie realistycznym wtw konstrukcja będąca dowodem *A* istnieje w sposób obiektywny i pozaczasowy.

Dopuszcza się więc sytuację, że zdanie jest prawdziwe, chociaż aktualnie nikt go nie udowodnił, a nawet nie dysponuje wiedzą, jak to zrobić. Posiadanie przez zdanie dowodu (samo istnienie dowodu) oznacza, że możemy owo zdanie tylko w zasadzie udowodnić.[6] Słowo „możemy” nie odnosi się tu do stanu epistemicznego (tj. wiedzy, jak skonstruować dowód), lecz oznacza osiągalność stosownego stanu epistemicznego. Istnieje niezależna od aktywności poznawczej naszych umysłów dzie-

---

i w dowolnym punkcie późniejszym od *t*. Z kolei, zdanie jest odwiecznie prawdziwe wtw istnieje punkt czasowy *t* taki, że jest ono prawdziwe w *t* i w każdym punkcie wcześniejszym od *t*. Zasada odwieczności prawdy jest fundamentem absolutyzmu w pojmowaniu prawdziwości. Zob. np. (Woleński 2005, s. 136).

[6] W sensie: *Ab esse ad posse valet consequentia*.

dzina obiektów matematycznych (zdeterminowanych w aspekcie jakościowym), wśród których są dowody twierdzeń matematycznych, i do tej pory pozostają one niedostępne, dopóki nie zostaną przez nas odkryte, tj. dopóki nie posiądziemy odpowiedniej wiedzy. Podanie dowodu nie czyni zdania prawdziwym, a jedynie upewnia nas o jego prawdziwości. Tak więc, przy realistycznym rozumieniu dowodliwości prawda jest pozaczasowa (wieczna i zarazem odwieczna).

3. L. E. J. BROUWER I A. HEYTING

Brouwer problematykę prawdy traktował jako część swojej koncepcji twórczego podmiotu matematycznego. Prawda matematyczna nie może być pojęta w oderwaniu od doświadczeń matematycznego podmiotu, a mianowicie jego działalności konstrukcyjnej polegającej na kreowaniu nowych struktur matematycznych. Działalność owa stanowi jedyne kryterium istnienia w matematyce, a z uwagi na swobodę nie daje się w prosty sposób podporządkować regułom logicznym.

Niech symbol $\vdash_n A$ informuje, że twórczy podmiot w stadium n dysponuje wystarczającym świadectwem (dowodem) na korzyść A. Korpus Brouwerowskiej teorii twórczego podmiotu tworzą następujące trzy zasady (G. Kreisel):

1. $\forall n \forall m(\vdash_n A \rightarrow \vdash_{n+m} A)$;
2. $\forall n(\vdash_n A \vee \neg\vdash_n A)$;
3. $\mathrm{A} \equiv \exists \mathrm{n} \vdash_{\mathrm{n}} \mathrm{A}$.

Na mocy zasady pierwszej, raz zdobytego świadectwa twórczy podmiot nigdy nie traci. Według zasady drugiej, w każdym stadium twórczy podmiot jest w stanie rozstrzygnąć, czy dysponuje świadectwem na korzyść A, czy też nie. Akceptacja zasady trzeciej prowadzi do utożsamienia prawdziwości A z uzyskaniem świadectwa na korzyść A. Wyraża ona zarazem uczasowienie prawdy. Implikacja $\exists n \vdash_n A \rightarrow A$ nie budzi wątpliwości: uzyskanie świadectwa na korzyść A wystarcza do zagwarantowania prawdziwości A. Przez kontrapozycję uzyskujemy z niej twierdzenie, że nigdy nie uzyskamy świadectwa na korzyść fałszu: $\neg A \rightarrow \neg \exists n \vdash_n A$. Implikacja $A \rightarrow \exists n \vdash_n A$ jest mniej oczywista: jeżeli A jest prawdziwe, to twórczy podmiot wcześniej czy później uzyska świadectwo na korzyść A. Po pierwsze, przeczytana w ten sposób, wydaje się opierać na jakimś quasi-platońskim pojęciu prawdziwości. Po drugie, jej akceptacja likwiduje istnienie absolutnie niepoznawalnych prawd (lub absolutnie nierozwiązywalnych problemów). Kreisel nazwał ją z tego powodu *Zasadą Chrześcijańskiego Miłosierdzia* (ang. *the Principle of Christian Charity*).[7] Wymienione za-

[7] Inna jej nazwa to *Zasada Nieskończonej Próżności* (ang. *the Principle od Infinite Vanity*). Występuje ona również w wersji osłabionej: $A \rightarrow \neg\neg\exists n \vdash_n A$, tzn. jeżeli A jest prawdziwe, to absurdem jest założenie, że twórczy podmiot nigdy nie uzyska świadectwa na korzyść A. Można ją wyprowadzić z zasady $A \rightarrow \exists n \vdash_n A$ (ale nie na odwrót). Zależnie od tego, którą wersję wspomnianej zasady przyjmiemy, uzyskamy silniejszą lub słabszą koncepcję twórczego podmiotu.

sady uzupełnić można regułą wykluczającą niekonstruktywne dowody twierdzeń egzystencjalnych: $\vdash_n \exists x A(x) \, / \, \exists x \vdash_n A(x)$.

Najbardziej znane uwagi Brouwera na temat prawdy pochodzą z pracy *Consciousness*, *philosophy and mathematics* (1948 r.). Oto one:

> […] *prawda* jest tylko w *rzeczywistości*, tj. w teraźniejszych i przeszłych doświadczeniach świadomości. […] Lecz doświadczenia oczekiwane i doświadczenia przypisywane innym są prawdziwe tylko jako przewidywania i hipotezy; w ich treści nie ma żadnej prawdy. […] nie ma żadnych niedoświadczonych prawd […] (Brouwer 1948/1975, s. 488).[8]

Uzupełnia je zastrzeżenie, że „logika nie jest absolutnie wiarygodnym narzędziem odkrywania prawd".[9] Otóż według Brouwera matematyka jest niezależna od logiki, która kodyfikuje *a posteriori* zasady rządzące dowodami. Repertuar środków dowodowych nie jest raz na zawsze matematykowi dany, lecz zmienia się wraz ze wzrostem wiedzy matematycznej, przy czym zmiana ta nie polega na odkrywaniu, a na wynajdywaniu. I jeszcze jedna uwaga, choć z innej już pracy:

> sformułowanie matematycznego twierdzenia nie ma sensu, chyba że wskaże się na konstrukcję rzeczywistego matematycznego obiektu albo na sprzeczność […] warunku konstrukcyjnego narzuconego na hipotetyczny matematyczny system (Brouwer 1954/1975, s. 524).[10]

Wypowiedzi te dają określenie prawdy zgodne raczej ze stanowiskiem aktualizmu w wersji radykalnej. Jednak inne uwagi sugerują mniej rygorystyczne zapatrywania. Do zdań prawdziwych zaliczał Brouwer również pewne zdania dowodliwe, a mianowicie te, dla których (obecnie) znana jest metoda konstrukcji ich dowodu. Inaczej mówiąc, warunek bycia udowodnionym (tj. aktualnego istnienia dowodu) zastąpił bardziej liberalnym warunkiem dysponowania wiedzą o tym, jak skonstruować dowód.

Warto w tym miejscu zrobić dygresję i wyjaśnić kwestię warunku fałszywości zdań. Skoro prawdziwość zdania polega na znajomości metody jego dowodu, wydawać mogłoby się, że warunkiem fałszywości zdania powinno być posiadanie stanu mentalnego charakteryzującego się nieznajomością żadnej metody jego dowodu. Takie rozumienie fałszywości nie byłoby jednak właściwe. Po pierwsze, stan owej niewiedzy może być tylko chwilowy. Po drugie, gdy przyjmie się równoważność fałszu i prawdziwości negacji, wówczas warunek ów wchodzi w konflikt z zasadą konstruowalności. Najlepiej więc fałszywość zdania utożsamić z wiedzą o niemożliwości konstrukcji dowodu, przy czym niemożliwość owa nie może być rozumiana w sposób realistyczny (jako obiektywny stan rzeczy). Wiedza o niemożliwości udowod-

[8] […] *truth* is only in *reality* i.e. in the present and past experiences of consciousness. […] But expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth. […] there are no non-experienced truths […].

[9] […] logic is not an absolutely reliable instrument to discover truths.

[10] the wording of a mathematical theorem has no sense unless it indicates the construction either of an actual mathematical entity or of an incompatibility […] out of some constructional condition imposed on a hypothetical mathematical system.

nienia jakiegoś zdania to wiedza o tym, jak obalić każdy jego rzekomy dowód poprzez wyprowadzenie sprzeczności. Stąd: fałszywość = absurdalność.[11] G. F. C. Griss sformułował zarzut, że występujące tu rozumienie negacji jest niespójne z założeniami intuicjonizmu (Griss 1948). Skoro poprawne rozumowania matematyczne zawsze zaczynają się od prawd i prowadzą do prawd, więc rozumowanie prowadzące do absurdu nie może być uważane za poprawne. Albo wyjściowe zdanie jest intuicyjnie postrzeganą prawdą i wówczas poprzez konstrukcję można wyprowadzić z niego tylko prawdę (a nie sprzeczność), albo zdanie owo nie jest intuicyjnie postrzeganą prawdą (nie ma swego mentalnego odpowiednika). Brouwer odpowiadając na ten zarzut zauważył, że rezygnacja z negacji jako sprowadzalności do absurdu zmusiłaby do odrzucenia zbyt wielu uznanych dowodów (Brouwer 1948).

Wracając do wątku głównego, zmianę stanowiska Brouwera w kwestii prawdziwości można udokumentować jego wypowiedziami na temat możliwego statusu zdań matematycznych:

> Dopiero gdy intuicjonizm uznał matematykę za autonomiczną, wewnętrzną, konstrukcyjną, umysłową aktywność […] kryterium prawdy lub fałszu matematycznego twierdzenia zostało ograniczone do samej aktywności matematycznej, bez odwoływania się do logiki bądź jakiegoś hipotetycznego, wszechwiedzącego bytu. Bezpośrednią konsekwencją było to, że w matematyce żadna prawda nie może być uznana, jeśli wcześniej nie została doświadczona oraz że dla jakiegoś matematycznego twierdzenia α, jedyne dwa przypadki uprzednio dopuszczone [tj. dychotomia prawdy i fałszu — Z.T.] zastąpione zostają przez następujące cztery: 1. α zostało *dowiedzione jako prawdziwe*; 2. α zostało *dowiedzione jako fałszywe*, *tj. absurdalne*; 3. nie została dowiedziona ani prawdziwość α, ani jego absurdalność, ale znany jest algorytm prowadzący do stwierdzenia, że α jest prawdziwe bądź że α jest absurdalne; 4. nie została dowiedziona ani prawdziwość α, ani jego absurdalność, *ani nie znamy algorytmu prowadzącego do stwierdzenia, że α jest prawdziwe bądź że α jest absurdalne*. W pierwszym i drugim (pierwszym, drugim i trzecim) przypadku mówimy, że α jest *rozstrzygnięte* (*rozstrzygalne*). Zauważmy, że twierdzenie o możliwości pewnej konstrukcji o ograniczonym skończonym charakterze dotyczącej pewnego skończonego matematycznego gatunku jest z konieczności rozstrzygalne. […] Następnie zauważmy, że twierdzenie objęte przez przypadek czwarty może po pewnym czasie zmienić się na objęte przez jeden z pozostałych przypadków, nie tylko dlatego, że dalsze myślenie może przynieść konstrukcję dokonującą tego przejścia, ale także dlatego, że na gruncie intuicjonistycznej matematyki [żaden] matematyczny obiekt nie jest w sposób konieczny z góry zdeterminowany oraz może on, w procesie swego swobodnego rozwoju [tj. z każdym dokonanym wyborem — Z.T.], nabyć pewną własność, której przedtem nie posiadał. Przykładem czwartego przypadku jest twierdzenie: „Żadne trzy liczby naturalne a, b, n nie mogą spełniać równania $a^n + b^n = c^n$, dla $n > 2$.” Każde twierdzenie matematyczne, które podpada pod

[11] A. Heyting ujął te dwa rozumienia fałszu, przeciwstawiając sobie negację *de facto* i negację *de iure*. Przeciwstawienie to dotyczy — na zasadzie ekwiwalentności — także pojęcia fałszywości. Negacja *de facto* wyraża się przez „nie mamy prawa twierdzić, że” lub „nikt tego nie wie”. Z kolei, negacja *de iure* wyraża się przez „jeśli założymy prawdziwość zdania, dojdziemy do sprzeczności”. Według Heytinga wypowiedzi z negacją rozumianą faktualnie nie mają postaci twierdzeń matematycznych. Zob. (Heyting 1956b, s. 18-19).

przypadek czwarty prowadzi do odrzucenia prawa wyłączonego środka (Brouwer 1955/1975, s. 113-114).[12, 13]

Zawarta w powyższym fragmencie klasyfikacja zdań oprócz opozycji rozstrzygalne/nierozstrzygalne oraz prawda/absurd uwzględnia dodatkowo dystynkcję kompetencja/wykonanie (łączy się ona z dystynkcją metoda-dowodu/dowód). Podobna klasyfikacja znajduje się w wykładzie *Changes in the relation between classical logic and mathematics* (1951 r.). Brouwer wyróżnił wówczas tylko trzy przypadki, mianowicie 1, 2 i 4, oraz dodał uwagę:

> Przypadek, że nie została dowiedziona ani prawdziwość α, ani jego absurdalność, ale znamy skończony algorytm prowadzący do stwierdzenia, że α jest prawdziwe bądź że α jest absurdalne, oczywiście jest redukowalny do przypadków pierwszego i drugiego.[14]

Trzeba jednak zauważyć, że przytoczone fragmenty nie są jednoznaczne — wcale nie muszą oznaczać liberalizacji stanowiska aktualizmu. Zgodnie z nim prawdziwe (fałszywe) są zdania, które faktycznie zostały udowodnione (obalone). Natomiast zdania, dla których znamy konstrukcje je dowodzące lub obalające, są rozstrzygalne. Każde zdanie prawdziwe lub fałszywe jest rozstrzygalne, ale nie na od-

[12] Only after intuitionism had recognized mathematics as autonomic interior constructional mental activity […] the criterion of truth or falsehood of mathematical assertion was confined to mathematical activity itself, without appeal either to logic or to a hypothetical omniscient being. An immediate consequence was that in mathematics no truths could be recognized which had not been experienced, and that for a mathematical assertion α the two cases formerly exclusively admitted were replaced by the following four: 1. α has been *proved to be true*; 2. α has been *proved to be false*; 3. α has neither been proved to be true nor to be absurd, but an algorithm is known leading to decision either that α is true or that α is absurd; 4. α has neither been proved to be true nor to be absurd, *nor do we know an algorithm leading to the statement either that α is true or that α is absurd*. In the first and second (first, second and third) case α is said to be *judged* (*judgeable*). We remark that an assertion of possibility of some construction of bounded finite character in some finite mathematical species is necessarily judgeable. […] Furthermore we remark that an assertion which is in the fourth case may at some time pass into one of the other cases, not only because further thinking may generate a construction accomplishing this passage, but also because intuitionist mathematics a mathematical entity is not necessarily predeterminate, and may, in its state of free growth, at some times acquire a property which it did not possess before. An example of the forth case is assertion: Three natural numbers a, b, n, cannot satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for $n > 2$." Each mathematical assertion which is in the fourth case yields refutation of the principle of the excluded third.

[13] Twierdzenie, o którym tu mowa, to tzw. wielkie twierdzenie Fermata. Od czasu jego sformułowania w roku 1640 przez z górą trzysta pięćdziesiąt lat nikt nie potrafił go ani udowodnić, ani obalić (chociaż Fermat twierdził, że zna jego dowód). Dowód owego twierdzenia przedstawił A. Wiles w roku 1993 w stustronicowej pracy. Zawiera ona jednak wiele konstrukcji na pewno nieznanych Fermatowi.

[14] The case that a has neither been proved to be true nor to be absurd, but that we know a finite algorithm leading to the statement either that a is true, or that a is absurd, obviously is reducible to the first and second cases.

wrót. Na przykład, zdanie „$10^{10^{10}}$ + 1 jest liczbą pierwszą lub złożoną" jest na pewno zdaniem rozstrzygalnym. Ustalenie jego wartości logicznej wymaga wykonania określonych obliczeń i ustalenia wartości logicznych składników. Ograniczenia fizyczne mogą to jednak uniemożliwić.

Czwarta klasa w przedstawionej klasyfikacji składa się ze zdań, których obecnie — z uwagi na brak odpowiedniej wiedzy — nie potrafimy ani udowodnić, ani obalić. Są to zdania nierozstrzygalne i jako takie tworzą „lukę" pomiędzy prawdą i fałszem (absurdem).[15] Ponieważ stan niewiedzy może być tylko chwilowy (a wręcz jest chwilowy — na mocy *Zasady Chrześcijańskiego Miłosierdzia*), niektóre z nich — zauważa Brouwer — mogą przekształcić się w twierdzenia należące do jednej z pozostałych trzech klas. Powstaje więc pytanie, czy przypadkiem milcząco nie zakłada się niezależnego od podmiotu istnienia dowodów, które są niedostępne do momentu ich rozpoznania (odkrycia)? Odpowiedź na nie musi być negatywna, gdyż — zgodnie z tezą konceptualizmu — dowód jakiegoś zdania jest każdorazowo umysłową konstrukcją uzyskaną w procesie twórczej aktywności matematycznego podmiotu. Brouwer kładł duży nacisk na właśnie kreacyjny charakter konstruowania: skonstruowanie dowodu jest jego urzeczywistnieniem, tj. powołaniem go z nicości do istnienia. Wyklucza to realistyczne pojmowanie dowodliwości. W szczególności byłoby ono niezgodne z Brouwerowską koncepcją ciągów wolnych wyborów (ang. *free choice sequences*). Otóż realistyczne pojmowanie dowodliwości opiera się na założeniu, że każdy obiekt uniwersum dyskursu jest z góry i całkowicie zdeterminowany pod względem jakościowym. W konsekwencji, proces wybierania wartości poszczególnych wyrazów, zwłaszcza w ciągu nieokreślonym żadnym prawem (ang. *the lawless sequence*), byłby tylko pozornie swobodny i twórczy.

Podsumowując: wypowiedzi Brouwera na temat prawdy można interpretować zarówno w duchu radykalnego, jak i zliberalizowanego aktualizmu. Wątpliwości tej można uniknąć, przyjmując następujący argument: gdy wiadomo, jaka konstrukcja będzie dowodem danego zdania, może uchodzić ono za udowodnione (wydaje się to zwykłym postępowaniem). Tak czy owak zasada wyłączonego środka przestaje obowiązywać. W pracy *The Unreliability of the Logical Principles* (1908) znajduje się następująca uwaga Brouwera na jej temat:

> Wynika z tego, że pytanie o ważność zasady wyłączonego środka jest równoważne pytaniu, *czy mogą istnieć nierozwiązywalne matematyczne problemy*. Nie ma cienia dowodu dla przekona-

[15] Zasada Chrześcijańskiego Miłosierdzia określająca twórczy podmiot matematyczny — a przede wszystkim to, jak rozumie się negację w intuicjonizmie — wyklucza istnienie jakiegokolwiek zdania matematycznego A takiego, że znana jest konstrukcja dowodu niemożliwości udowodnienia A i niemożliwości udowodnienia $\neg A$. Innymi słowy, wyklucza się istnienie absolutnie nierozstrzygalnych matematycznych zdań lub absolutnie nierozwiązywalnych matematycznych problemów. Założenie przeciwne prowadzi natychmiast do sprzeczności. Wyraża to prawo: $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (alternatywnie: $\neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$); (Heyting 1974, s. 16). Kontrprzykłady dotyczące ważności prawa wyłączonego środka mają więc charakter temporalny (a nie absolutny).

nia, które czasami jest głoszone, że nie istnieje żaden nierozwiązywalny problem matematyczny (Brouwer 1908/1975, s. 109).[16]

Jest ona zagadkowa. W drugim zdaniu Brouwer nawiązuje do słynnej tezy Hilberta, że „w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus*", tak jakby zamierzał ją podważyć.[17] Teza owa jest klasycznie — ale nie intuicjonistycznie — równoważna zdaniu ogólnemu, że każdy dobrze sformułowany problem matematyczny ma rozwiązanie (da się rozwiązać). Intuicjonistycznie akceptowalna jest tylko zależność $\forall xD(x) \rightarrow \neg\exists x\neg D(x)$. Kłopot sprawia akceptacja tezy ogólnej $\forall xD(x)$, gdyż jej uzasadnienie wymaga podania metody pozwalającej znaleźć rozwiązanie każdego poszczególnego problemu (jest to po prostu niemożliwe). Z drugiej strony, na gruncie logiki intuicjonistycznej można z łatwością udowodnić, że nie istnieje żaden nierozwiązywalny problem matematyczny (zob. przypis 15). Wydaje się, że Brouwer miał tego świadomość. Zagadkę tę można rozwiązać, przyjmując, że przedmiotem krytyki Brouwera jest nie tyle teza Hilberta, ile logika klasyczna, zgodnie z którą każde zdanie matematyczne kwalifikuje się jako prawdziwe bądź fałszywe, co nie oznacza jednak, że każde takie zdanie da się udowodnić bądź obalić (choćby z uwagi na brak w niej wyraźnego związku między prawdziwością i dowodliwością). Można więc przyjąć następującą interpretację inkryminowanego zdania: nie ma żadnej gwarancji, że w przypadku każdego zdania matematycznego wiadomo, jak je udowodnić bądź wiadomo, jak je obalić.

Pod adresem teorii Brouwera można sformułować zarzut, że podstawy intuicjonistycznej matematyki całkowicie zawierają się w psychologii. Wszak dowód jakiegoś konkretnego zdania matematycznego jest zawsze umysłową konstrukcją uzyskaną w procesie twórczej aktywności określonego matematyka. Sugeruje to w szczególności, że twierdzenia matematyczne redukują się do zdań o stanach mentalnych. Zarzut ten można oddalić poprzez (a) normalizację pojęcia dowodu, tj. wskazanie czegoś powszechnego, co konkretyzuje się we wszystkich intuicjonistycznie poprawnych dowodach i sprawia, że relacja bycia dowodem staje się rozstrzygalna, oraz (b) pokazanie, że pojęcia i twierdzenia matematyczne dają się logicznie uporządkować. Zadań tych podjął się A. Heyting, podając teoriodowodową interpretację stałych logicznych. Przejdźmy więc do przedstawienia stanowiska Heytinga.

Heyting nie tylko dążył do wyjaśnienia i popularyzacji idei swego nauczyciela, ale także zbudował w pełni sformalizowany rachunek logiczny dostosowany do tez

[16] It follows that the question of the validity of the principium tertii exclusi is equivalent to the question *whether unsolvable mathematical problems can exist*. There is not a shred of a proof for the conviction, which has sometimes been put forward that there exist no unsolvable mathematical problems.

[17] Tezę tę wygłosił Hilbert w 1900 r. podczas swego wykładu na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu. Oto stosowny fragment tego wykładu: „To przekonanie o rozwiązywalności każdego problemu matematycznego jest dla nas silną zachętą podczas pracy; słyszymy w sobie ciągłe wołanie: Oto problem, szukaj rozwiązania. Możesz je znaleźć poprzez czyste myślenie; bowiem w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus*!" (Hilbert 1970, s. 298).

intuicjonizmu (ale z zastrzeżeniem, że o żadnym systemie aksjomatycznym nie da się zasadnie powiedzieć, iż jest adekwatnym przedstawieniem tez intuicjonizmu i obejmuje każdą ogólnie ważną metodę dowodu). Zapatrywania Heytinga w interesującej nas kwestii mają wyraźnie charakter antymetafizyczny i na ogół są zgodne ze stanowiskiem zliberalizowanego aktualizmu. Twierdzenie, że prawdziwość zdania (matematycznego) polega na dysponowaniu świadectwem (dowodem) przemawiającym na jego korzyść, opiera się na poglądach Heytinga na temat istnienia w matematyce:

> [Program Brouwera] polegał […] na badaniu myślowych konstrukcji jako takich, bez odwoływania się do zagadnień dotyczących natury konstruowanych obiektów, jak na przykład do problemu, czy te obiekty istnieją niezależnie od naszej wiedzy o nich. […] Nie mamy nic przeciwko temu, by matematyk wyznawał prywatnie dowolną teorię metafizyczną, którą lubi, ale program Brouwera domaga się, byśmy badali matematykę jako coś prostszego, bardziej bezpośredniego niż metafizyka. W rozważaniu więc myślowych konstrukcji matematycznych „istnieć" musi być synonimem „być skonstruowanym". […] Twierdzenie matematyczne jest stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna. Jasne, że przed wykonaniem konstrukcji nie ma jeszcze twierdzenia (Heyting 1956b/1986, s. 277-278).

> Nie jestem zdolny nadać zrozumiałego sensu twierdzeniu, że istnieje jakiś przedmiot matematyczny, jeśliby nie mógł być skonstruowany (Heyting 1959, s. 69; cytat za Dąmbska 1976, s. 9).[18]

Wprawdzie pierwsza z przytoczonych wyżej wypowiedzi definiuje istnienie w duchu aktualizmu radykalnego, jednak za bardziej reprezentatywną dla poglądów Heytinga należy uznać drugą z nich, w myśl której istnienie oznacza aktualną możność lub zdolność wykonania określonych konstrukcji, a nieistnienie — aktualną zdolność wyprowadzenia sprzeczności z postulowanej konstrukcji.

W opozycji do platonizmu Heyting głosił, że „pojęcie prawdy nie ma żadnego sensu […] w odniesieniu do intuicjonistycznej matematyki" — o prawdzie jako korespondencji z faktami można w matematyce mówić tylko, jeśli przyjmie się obiektywne i pozaczasowe istnienie uniwersum matematycznego (Heyting 1958, s. 279).[19] Właściwie zrezygnował on z pojęcia prawdy i zaproponował, aby zastąpić je pojęciem wiedzy (lub uznawania za prawdziwe). Bazą logiki intuicjonistycznej powinna być stosowna teoria wiedzy, a nie ontologia (Heyting 1956a):

logika intuicjonistyczna = logika wiedzy (*logique du savoir*),

logika klasyczna = logika istnienia (*logique de l'ętre*).

Spełnieniem intencji zastąpienia prawdy przez wiedzę są jego wyjaśnienia dotyczące intuicjonistycznej asercji oraz intuicjonistycznego sensu stałych logicznych. Krytykując utożsamienie prawdziwości i klasycznej dowodliwości, pisał:

---

[18] I am unable to give an intelligible sense to the assertion that mathematical object, which has not been constructed, exists.

[19] The notion of truth makes no sense […] in intuitionistic mathematics.

> Oto więc *Brouwerowska asercja p*: Wiadomo, jak udowodnić *p*. Będziemy oznaczać ją przez $\vdash$. Słowo „udowodnić" musi być wzięte w sensie „udowodnić przez dostarczenie konstrukcji". […] $\vdash \neg p$ będzie znaczyć: Wiadomo, jak sprowadzić *p* do sprzeczności (Heyting 1930, s. 959-960).[20]

Warunki odtwarzające intuicjonistyczny sens stałych logicznych są zarazem warunkami dającymi rekurencyjny opis relacji bycia konstruktywnym świadectwem. Są one następujące (Heyting 1956b, s. 102-103, 106-107; Heyting 1974, s. 86-88):

0. Zdanie matematyczne p zawsze wymaga pewnej matematycznej konstrukcji c o danych własnościach; można owo zdanie uznać z chwilą, gdy taka konstrukcja zostanie wykonana.
1. Można uznać zdanie $p \wedge q$ wtw można uznać p i zarazem q.
2. Można uznać zdanie $p \vee q$ wtw można uznać przynajmniej jedno ze zdań p lub q.
3. Można uznać zdanie $\neg p$ wtw dysponujemy konstrukcją, która wyprowadza sprzeczność z założenia, że dokonano konstrukcji dowodzącej p.
4. Można uznać zdanie $p \rightarrow q$ wtw dysponujemy konstrukcją, która każdą konstrukcję dowodzącą p przekształca w konstrukcję dowodzącą q.
5. Można uznać zdanie $\forall x\, p(x)$ wtw dysponujemy ogólna metodą konstrukcji, która dla dowolnego elementu a (należącego do zakresu zmiennej x) daje przez uszczegółowienie konstrukcję dowodzącą $p(a)$.
6. Można uznać zdanie $\exists x\, p(x)$ wtw podano konstrukcję pewnego elementu a oraz zostało dowiedzione $p(a)$.[21]

Dowód intuicjonistyczny, w przeciwieństwie do klasycznego, jest rozdzielny względem alternatywy, tj. $p \vee q$ jest dowodliwe wtw p jest dowodliwe lub q jest dowodliwe. Oznacza to, że intuicjonista na gruncie samej logiki, tj. bez pomocy matematyki, nie jest w stanie udowodnić np. GH $\vee$ $\neg$GH. Oczywiście, podobnie względem alternatywy zachowuje się prawdziwość.[22]

I jeszcze jedna rzecz, intuicjonistyczna asercja zmienia sposób rozumienia twierdzenia matematycznego. W artykule *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik* (1931 r.) przedstawiającym podstawowe założenia intuicjonizmu Heyting od-

---

[20] Here, then, is the Brouwerian assertion of p: It is known how to prove p. We will denote this by $\vdash$ p. The words „to prove" must be taken in the sense of „to prove by construction". […] $\vdash \neg$p will mean: „It is known how to reduce p to a contradiction."

[21] Warto zauważyć, że znaczenia stałych logicznych Heyting wyjaśnia tu w kategoriach uzasadniania. Alternatywą jest wyjaśnienie w kategoriach dowodu: Dowód zdania ___ jest konstrukcją ___ . Ma to związek z wspomnianą wcześniej dwuznacznością terminu „dowód". Jednak przedstawione tu wyjaśnienie uważał on — jak sądzę — za podstawowe. Teza konceptualizmu prowadzi do wniosku, że dowód-obiekt jest zależny od dowodu-czynności.

[22] Natomiast na gruncie logiki klasycznej alternatywę $p \vee q$ wolno uznać za prawdziwą, jeśli tylko pokazano, że oba jej składniki nie mogą być fałszywe, mimo że nie wskazano dowodu żadnego z nich. Jest tak, gdyż prawdziwość zdań determinowana jest przez niezależną od poznającego podmiotu rzeczywistość.

różnił zdania od ich asercji, czyli stwierdzeń. Warto na ten aspekt zwrócić uwagę. Zdanie matematyczne wyraża intencję (oczekiwanie) znalezienia konstrukcji je uzasadniającej (tj. dowodu), przy czym intencja ta „odwołuje się nie do stanu rzeczy pomyślanego jako istniejący niezależnie od nas, ale do doświadczenia pomyślanego jako możliwe" (Heyting 1931/2002, s. 67). Natomiast stwierdzenie danego zdania matematycznego jest ustaleniem faktu empirycznego, a mianowicie spełnienia wyjściowej intencji. Na przykład, zdanie „Stała Eulera *C* jest liczbą wymierną" wyraża oczekiwanie znalezienia konstrukcji takiej, że $C = n/m$, gdzie n i m są liczbami całkowitymi. Asercja jego oznacza, że taka konstrukcja została znaleziona.[23] Dodajmy, że w późniejszych pracach Heyting zrezygnował z owej fenomenologicznej dystynkcji intencja/spełnienie. Na przykład, w *Intuitionism. An Introduction* (1956 r.) pisał:

> [Każde] twierdzenie matematyczne wyraża jedynie fakt empiryczny, mianowicie pomyślny wynik pewnej konstrukcji (Heyting 1956b, s. 8). […] Każde stwierdzenie matematyczne można wyrazić w tej oto postaci: „Dokonałem w swoim umyśle konstrukcji A". Matematyczną negację tego stwierdzenia można wypowiedzieć jako: „dokonałem w umyśle konstrukcji B, która wyprowadza sprzeczność z przypuszczenia, że konstrukcję A doprowadzono do końca", co znowu ma tę samą postać (tamże, s. 19). […] Konieczne jest pojmować słowo „konstrukcja" w szerszym sensie, tak by mogło oznaczać także ogólną metodę konstrukcji (tamże, s. 103).[24]

Takie rozumienie stwierdzeń prowadzi do odrzucenia zasady wyłączonego środka:

> Formuła dla prawa wyłączonego środka ma teraz postać: $\vdash p \vee \neg p$. Można głosić to prawo dla określonego zdania p tylko wtedy, gdy p zostało udowodnione lub też sprowadzone do sprzeczności. Zatem dowód, że prawo wyłączonego środka jest prawem ogólnym, musiałby polegać na podaniu metody, za pomocą której, gdy dane jest dowolne zdanie, zawsze można udowodnić samo to zdanie albo jego negację. Formuła $p \vee \neg p$ oznacza więc oczekiwanie konstrukcji matematycznej (metody dowodu), która czyni zadość temu żądaniu; znaczy to, że formuła ta jest zdaniem matematycznym, a pytanie o jej prawdziwość jest pytaniem matematycznym, które może być rozwiązane za pomocą metod matematycznych, o ile w ogóle jest rozwiązywalne (Heyting 1931/2002, s. 68).

Zakwestionowanie zasady wyłączonego środka nie oznacza jednak wprowadzenia do „logiki Brouwerowskiej" trzeciej wartości logicznej.[25] W zgodzie z poglądami twórcy intuicjonizmu zostaje tylko wyróżniona trzecia kategoria zdań — poza $\vdash p$ i $\vdash \neg p$. Są to zdania (obecnie) nierozstrzygalne. Z założenia mają one inny status niż stwier-

[23] Widać tu pewne podobieństwo do Husserlowskiego rozumienia prawdziwości jako słuszności intencji.

[24] [Every] mathematical theorem expresses a purely empirical fact, namely the success of a certain construction. […] Every mathematical assertion can be expressed in the form: "I have effected the construction A in my mind". The mathematical negation of this assertion can be expressed as "I have effected in my mind a construction B, which deduces a contradiction from the supposition that the construction A were brought to an end", which is again of the same form. […] It is necessary to understand the word "construction" in the wider sense, so that it can also denote a general method of construction (Heyting 1956, s. 19, 103).

[25] Taki zarzut znajduje się w pracy (Barzin, Errera 1927).

dzenia. Nawiązując do Brouwera, można powiedzieć, że „w ich treści nie ma żadnej prawdy”.[26]

4. M. DUMMETT *VERSUS* D. PRAWITZ

Intuicjonizm w ujęciu M. Dummetta i D. Prawitza różni się od ujęcia klasycznego, reprezentowanego przez Brouwera i Heytinga. Jest to intuicjonizm odpsychologizowany, wpisany w filozoficzny spór realizm/antyrealizm, w którym logika poprzedza matematykę. Chociaż obaj wymienieni autorzy utożsamiają prawdziwość z dowodliwością, jednak inaczej wyjaśniają ostatnie pojęcie.

Według Dummetta spór realizm/antyrealizm jest jedną z głównych kontrowersji filozoficznych. Rozpatrywany na płaszczyźnie ontologicznej i w zastosowaniu do matematyki dotyczy on przedmiotu teorii matematycznych — istnienia obiektów matematycznych. Stanowiskami opozycyjnymi są, odpowiednio, platonizm i konstruktywizm (intuicjonizm). Podczas gdy platoniści „teorie matematyczne wiążą z pewną pozaczasową sferą abstrakcyjnych obiektów”, konstruktywiści „wiążą je z własnymi operacjami umysłowymi” w tym sensie, że „obiekty matematyczne same są umysłowymi konstrukcjami”, tzn. „istnieją tylko na mocy naszej matematycznej aktywności, która polega na umysłowych operacjach oraz mają tylko takie własności, jakie możemy rozpoznać jako im przysługujące” (Dummett 1977, s. 7).[27] Zdaniem Dummetta, wszelkie „odgórne” próby rozwiązania tego sporu są beznadziejne. Bardziej obiecujące i interesujące jest podejście „oddolne”, bazujące na ujęciu go na płaszczyźnie semantycznej. W ujęciu tym dąży się do sformułowania systematycznej teorii znaczenia, która wraz z pojęciem prawdy dopuszczalnym dla danej klasy zdań (np. matematycznych) będzie opisywała i wyjaśniała funkcjonowanie danego języka. Teoria ta oprócz tez semantycznych dotyczących warunków prawdziwości zdań (a stąd ustalających treść zdań) będzie też zawierała pewne tezy metafizyczne na temat zawartości i struktury rzeczywistości. Dla nas istotne jest to, że taka zmiana płaszczyzny rozważań nadaje kwestii epistemiczności i temporalności prawdy status centralnego zagadnienia. Przede wszystkim Dummett nie podziela poglądu Heytinga, że pojęcie prawdziwości można całkowicie wyeliminować z dyskursu logiczno-matematycznego.

Oto jedna z licznych charakterystyk realizmu semantycznego, jakie można znaleźć w pracach Dummetta:

> podstawowe założenie realizmu, w zastosowaniu do jakiejś danej klasy zdań [np. zdań matematycznych — Z.T.], sprowadza się do tego, że każde zdanie tej klasy jest zdeterminowane ja-

---

[26] Przypomnijmy, znak asercji ⊢ wprowadził Frege. Składał się on z poziomej kreski treści i pionowej kreski sądu. Napis: – *A* odczytuje się: zdanie, że *A*. Tak więc, według Brouwera i Heytinga, prawdę wprowadza dopiero kreska sądu, oznaczająca epistemiczną dowodliwość.

[27] Zaimek „nasza” należy rozumieć w sensie kolektywnym, a nie dystrybutywnym, tzn. podmiotem poznania matematycznego jest społeczność komunikujących się między sobą matematyków. Ma to oddalić groźbę subiektywizmu, który stanowi pewne obciążenie dla intuicjonistów.

ko prawdziwe lub nieprawdziwe, niezależnie od naszej wiedzy, przez jakąś obiektywną rzeczywistość, której istnienie i konstytucja jest także niezależna od naszej wiedzy" (Dummett 1981, s. 434; cytat za Szubka 2001, s. 70-71).

Owo zdeterminowanie specyfikują warunki prawdziwości właściwe dla klasycznej semantyki dwuwartościowej, zwane *weryfikacyjno-transcendentnymi* (ang. *verification transcendent*) lub *epistemicznie nieskrępowanymi* (ang. *epistemically unconstrained*). Z jednej strony, semantyka ta prowadzi do teorii znaczenia, w której rozumienie zdania jest zgodne ze schematem (T) Tarskiego, z drugiej zaś, uzyskana teoria znaczenia uprawomocnia przyjętą semantykę.[28] Dummett wysuwa szereg zarzutów przeciw takiej teorii znaczenia. Jeden z nich, tzw. argument manifestacyjny, można zrekonstruować następująco (Dummett 1975/1978, 1976/1993):

1. Znajomość znaczenia zdania, jego rozumienie, jest publicznie manifestowalna (*de facto* wymaganie to stanowi warunek niezbędny pomyślnej komunikacji).
2. Znajomość znaczenia zdania polega na znajomości jego (weryfikacyjno-transcendentnych) warunków prawdziwości (teza ta zakłada, że pojęcie prawdy jest centralnym pojęciem semantycznym).
3. Publiczna manifestowalność znaczenia jakiegoś zdania sprowadza się do zdolności zakomunikowania, że zostały uchwycone (znane są) jego warunki prawdziwości, czyli zdolności powiedzenia, czy rozważane zdanie jest bądź nie jest prawdziwe.
4. Jeżeli rozważane zdanie nie jest efektywnie rozstrzygalne (np. dotyczy niedostępnych obszarów czasoprzestrzeni lub wszystkich elementów jakiegoś zbioru nieskończonego, albo ma postać kontrfaktycznego okresu warunkowego), to nie da się zakomunikować, że doszło do uchwycenia jego warunków prawdziwości.
5. A zatem, znajomość warunków prawdziwości nie (zawsze) jest publicznie manifestowana.
6. A zatem, znajomość znaczenia zdania nie sprowadza się do znajomości jego warunków prawdziwości.
7. Stąd zaś znaczenie zdania nie sprowadza się do jego warunków prawdziwości.

Odrzucenie realizmu wiąże się z zastąpieniem klasycznej semantyki dwuwartościowej jakąś inną semantyką, w której nie będzie obowiązywała zasada dwuwartościowości i w której podstawą w opisie znaczenia zdania będą warunki jego stwierdzalności (zamiast weryfikacyjno-transcendentnych warunków prawdziwości). Przykładem takiej semantyki jest, zdaniem Dummetta, semantyka intuicjonistyczna zarysowana przez Heytinga. Kwalifikuje ona określone konstrukcje jako dowody danych zdań (relatywnie do ich budowy) i w ten sposób specyfikuje warunki usprawiedliwiające ich asercję. Warunki te zostają ściśle powiązane z naszymi zdolnościami poznawczymi, a zwłaszcza z umiejętnością rozpoznania w przypadku każdej określonej konstrukcji, czy stanowi ona poprawny dowód rozważanego zdania (zgodnie z ideą

[28] Współcześnie teorię taką przypisuje się. D. Davidsonowi.

argumentu manifestacyjnego relacja bycia świadectwem powinna być efektywnie rozstrzygalna). W efekcie, znajomość znaczenia jakiegokolwiek zdania matematycznego (jego rozumienie) sprowadza się do zdolności rozpoznania jego ewentualnego dowodu. Wedle Dummetta pojęcia znaczenia i prawdy są w sposób skomplikowany ze sobą powiązane i od siebie zależne, co powoduje, że powinny być wyjaśniane razem. Tym, co je wiąże, jest pojęcie świadectwa (dowodu) uzasadniającego stwierdzenie danego zdania.

Tak więc, idea prawdy pozaczasowej i całkowicie oderwanej od naszych zdolności poznawczych została przez Dummetta zastąpiona ideą rozpoznawalności prawdy na podstawie uzyskanego świadectwa:

> […] anty-realista w matematyce (czyli konstruktywista) musi utrzymywać, że zdanie matematyczne może być prawdziwe tylko na mocy *rzeczywistego* uzasadnienia, to znaczy na mocy dowodu, który jest nam rzeczywiście znany. […] z konstruktywistycznego punktu widzenia prawdziwość zdania musi oznaczać, że rzeczywiście mamy jego dowód. Utożsamienie prawdy matematycznej z intuicyjną dowodliwością nie jest więc dla konstruktywisty możliwym do przyjęcia punktem widzenia, jeśli „intuicyjna dowodliwość” oznacza *istnienie* intuicyjnie poprawnego dowodu, co z kolei miałoby znaczyć mniej niż jego rzeczywistą znajomość. Platonista, który uważałby, że pojęcie intuicyjnie poprawnego dowodu jest w pełni określone, powiedziałby, że, dla dowolnego zdania, albo istnieje jego dowód, albo nie istnieje, niezależnie od tego, czy znamy ten dowód lub metodę jego konstrukcji i rozumiałby to w taki sposób, że gdyby naraz odkryto dowód, to miałby on prawo powiedzieć, że dowód zawsze istniał (Dummett 1963/1992, s. 28-30).

> […] jakaś wypowiedź jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jesteśmy zdolni znaleźć się w położeniu, w którym możemy ją poprawnie stwierdzić (Dummett 1978, s. xxii).[29]

Pewien zamęt do tak zarysowanego stanowiska wprowadza następująca wypowiedź:

> Konstruktywista może zgodzić się z platonistą, że twierdzenie matematyczne, jeśli jest prawdziwe, to jest prawdziwe bezczasowo: kiedy zdanie udowodniono, to tym samym było prawdziwe przez cały czas. Powiedzieć tak to, w istocie, utożsamić „A jest prawdziwe” z „Możemy udowodnić A” zamiast z „A zostało udowodnione” i „A jest fałszywe” z „Nie możemy udowodnić A”. Taka interpretacja „prawdziwe” i „fałszywe” wiernie oddaje podstawowe zasady intuicjonizmu tylko wtedy, gdy „Możemy udowodnić A” („A jest dowodliwe”) nie jest interpretowane ani tak, że niezależnie od naszej wiedzy istnieje coś, co, jeśli to sobie uświadomimy, powinniśmy uznać za dowód A, ani tak, że faktycznie udowodniliśmy A lub [faktycznie] za jakiś czas udowodnimy. W pierwszym przypadku powinniśmy odwołać się do platonistycznie pojmowanej obiektywnej rzeczywistości dowodów; w drugim, powinniśmy mieć prawo zaprzeczyć, że A było dowodliwe na nie-matematycznych postawach (np. gdyby bliskie było unicestwienie rodzaju ludzkiego). „Możemy udowodnić A” musi być rozumiane jako czynienie prawdziwym tylko na mocy faktycznie przeprowadzonego przez nas dowodu A, ale [„Nie możemy udowodnić A” musi być rozumiane — Z.T.] jako czynienie fałszywym tylko na mocy

[29] […] a statement is true when and only when we are able to arrive at a position in which we may correctly assert it.

znalezienia przez nas czysto matematycznej przeszkody udowodnienia rozważanego zdania (Dummett 1977, s. 19).[30]

Otóż na początku wyjaśnia się prawdziwość w nawiązaniu do platońskiego świata obiektów matematycznych. Właściwie prawda zostaje pozbawiona epistemicznego i temporalnego charakteru. Z drugiej strony, skoro prawdziwość utożsamia się z możliwością udowodnienia, a możliwość udowodnienia z czynieniem prawdziwym w oparciu o faktycznie przeprowadzony dowód, to żadne zdanie przed rozpoznaniem jego dowodu nie może być prawdziwe. Nadaje to prawdzie charakter epistemiczny i temporalny. Trudno w tej sytuacji mówić o jakimś zbliżeniu konstruktywizmu i platonizmu. Jeżeli prawda ma mieć charakter atemporalny, to taki też charakter musi mieć występujące w jej określeniu pojęcie możliwości (dowodliwości). Dopóki więc przyjmujemy, że dysponowanie dowodem (posiadanie wiedzy o tym, jak skonstruować dowód) wyprzedza prawdę, powinniśmy odrzucić platońskie przekonanie o atemporalności prawdy.[31] Niezgodność ową można wyjaśnić tym, że według Dummetta konstruktywista wcale nie musi wykluczać istnienia na zewnątrz umysłu jakiejś rzeczywistości matematycznej. Sprzeciwia się on tylko temu, że owa rzeczywistość jest uprzednia w stosunku do praktyki badawczej matematyka i ją kształtuje. W sporze konstruktywistów z platonistami — pisze Dummett — nie chodzi o to, czy rzeczywistość, która czyni nasze zdania prawdziwymi lub fałszywymi, jest *zewnętrzna*, lecz o to, czy jest ona *w pełni zdeterminowana* (Dummett 1978, s. xxix). Wiara w to drugie opiera się na przekonaniu, że każdy fakt zachodzi bądź nie zachodzi. Chociaż „dociekania matematyczne ujawniają cechy rzeczywistości matematycznej, które zniewalają do ich uznania", niemniej jednak „nie powinno się na tej podstawie sądzić, że rzeczywistość ta odwiecznie posiadała te cechy, zanim je sobie uświadomiliśmy" (Dummett 1998b, s. 16; cytat za Wieczorek 2005, s. 160).[32]

[30] It would be possible for a constructivist agree with platonist that a mathematical statement, if true, is timelessly true: when a statement is proved, then it is shown thereby to have been true all along. To say this is, in effect, to equate "*A* is true" with "We can prove *A*" rather than with "*A* has been proved", and "*A* is false" with "We cannot prove *A*". Such an interpretation of "true" and "false" remains faithful to the basic principles of intuitionism only if "We can prove *A*" ("*A* is provable") is not interpreted to mean either, at one extreme, that, independently of our knowledge, there exists something which, if we became aware of it, we should recognize as a proof of *A*, nor, at the other, that as a matter of fact we either have proved *A* or shall at some time prove it. In the former case , we should be appealing to a platonistically conceived objective realm of proofs; in the letter, we should be entitled to deny that *A* was provable on non-mathematical grounds (e.g. if the obliteration of the human race were imminent). "We can prove *A*" must be understood as being rendered true only by our actually proving *A*, but as being rendered false only by our finding a purely mathematical obstacle to proving it.

[31] W innym miejscu cytowanej pracy Dummett jednoznacznie stwierdza, iż uzależnienie prawdziwości zdania matematycznego od posiadania jego dowodu każe traktować predykat prawdy jako znacząco uczasowiony (Dummett 1977, s. 336).

[32] Owo pojęcie zniewalania można przybliżyć przywołując Brouwerowskie pojęcie ciągu wyborów jako konstrukcji, w której wolność wyboru wartości kolejnych wyrazów zależy od wartości

Cechy owe powinno się traktować jako „cechy, które zaistniały wraz z ich odkryciem", natomiast „przed ich odkryciem rzeczywistość [matematyczna] była pod tym względem po prostu nieokreślona" (tamże, s. 16). Tak więc, na kształt rzeczywistości matematycznej, tj. na jej zawartość i strukturę, istotny wpływ ma nasza umiejętność konstruowania dowodów odpowiednich twierdzeń i to jest powodem, że nie jest ona w pełni zdeterminowana ani statyczna (lecz „rośnie" w miarę upływu czasu). Można rzec, że jest to rzeczywistość „dla nas". Natomiast o rzeczywistości matematycznej całkowicie niezależnej od naszej wiedzy, czyli „samej w sobie", niewiele da się powiedzieć. W konsekwencji, jeśli nawet założymy, że jakaś rzeczywistość matematyczna istnieje na zewnątrz umysłu, to i tak w czynieniu zdań prawdziwymi znaczenie ma tylko ta rzeczywistość, którą wyznacza nasza zdolność konstruowania dowodów. W szczególności, wytłumaczenie istnienia (na zewnątrz) dowodu zdania znajduje się w naszej zdolności jego przeprowadzenia. Prawitz komentując przytoczoną wyżej wypowiedź pisał, że osobiście nie ma nic przeciwko wyobrażeniu sobie „istnienia dowodu w nawiązaniu do obiektywnej sfery dowodów", gdyż „w takiej obiektywnej sferze dowodów nie może być mowy o istnieniu dowodu, którego w zasadzie nie jesteśmy zdolni rozpoznać" (Prawitz 1987, s. 154). Można to rozumieć w ten sposób, że nie ma nic złego w założeniu o platońskim i pozaczasowym istnieniu dowodów, dopóki w przyjmowanym przez nas pojęciu dowodliwości, za pomocą którego formułujemy warunki poprawnej stwierdzalności, będą występowały komponenty epistemiczne wiążące je z naszą aktywnością poznawczą.

Powtórzmy, pojęcie prawdziwości wiąże Dummett z pojęciem poprawnej asercji, a następnie z pojęciem dowodu: zdanie matematyczne zostaje zakwalifikowane jako prawdziwe, jeśli jesteśmy zdolni dokonać jego poprawnej asercji, czyli jeśli *rzeczywiście* posiedliśmy jego dowód. Określenie to budzi różne wątpliwości. Co to znaczy „*rzeczywiście* posiąść dowód"? Czy można posiadać dowód, którego konstrukcja jest tak skomplikowana, że przekracza zdolności zwykłego umysłu ludzkiego? Źródłem kłopotu jest tu pojęcie dowodu. Zdaniem Dummetta koncepcja dowodu przyjęta przez Heytinga jest nazbyt restryktywna. Nawet w intuicjonistycznej matematyce asercja (dowód) alternatywy nie zawsze wymaga wybrania jednego z jej składników i podaniu jego dowodu. Restryktywność ta ujawnia się też w warunku dla implikacji. Przypomnijmy, dowód implikacji $A \to B$ wymaga przekształcenia dowolnego dowodu A na dowód B. W przypadku jakiejś konkretnej konstrukcji rozstrzygnięcie i zamanifestowanie, że czyni ona zadość temu żądaniu (ma wskazaną własność), może być niezwykle trudne. Z tego powodu Dummett wyróżnia dwa rozumienia pojęcia dowodu — węższe i szersze. Rozumienie węższe odnosi się do dowodu właściwego, zwanego też *dowodem kanonicznym* lub *bezpośrednim*. Dowód kanoniczny jest konstrukcją wyrażoną w ustalonej notacji, znormalizowaną i odzwierciedlającą budowę dowodzonego zdania. Wychodząc od przesłanek będących zdaniami atomowymi,

---

uzyskanych uprzednio w taki sposób, że zostaje ona poddana coraz ostrzejszym i trwałym ograniczeniom, a nawet zostaje całkowicie zniesiona (tzw. *the lawlike sequence*).

w sposób kompletny realizuje wszystkie składające się nań operacje zgodnie z porządkiem wyznaczonym przez warunki interpretacji stałych logicznych Heytinga.[33] Natomiast rozumienie szersze odnosi się do czegoś, co potocznie określa się jako *wykazanie* (ang. *demonstration*) i co zwykle znajduje się w książkach. Wykazanie nie jest dowodem właściwym, a jedynie jest „planem operacyjnym" lub „programem" powiadamiającym nas, jak skonstruować dowód kanoniczny. Siła wykazania jako przekonującego argumentu polega na tym, że jest ono sformułowane w zinterpretowanym języku, oraz na możliwości podania dowodu kanonicznego:

> Wykazanie jest tak przekonującą podstawą asercji wniosku jak kanoniczny dowód, z którym wiąże się w następujący sposób: wykazanie twierdzenia dostarcza efektywnych środków do znalezienia kanonicznego dowodu (Dummett 1975a/1978, s. 240).[34]

Nie ma wątpliwości, że asercja twierdzeń matematycznych nie musi być równoznaczna z opartą na dowodach kanonicznych prawdziwością. Na czym wobec tego polega prawdziwość zdań? Gdyby przyjąć, że prawdziwość zdań jest determinowana przez dowody kanoniczne, wówczas prawdziwość przesłanek i logiczna poprawność przyjętych reguł wnioskowania nie gwarantowałaby prawdziwości wniosku. Rzecz w tym, że aby wniosek był prawdziwy, rozumowanie (lub jakaś jego część) nie może być wykazaniem, lecz musi uzyskać postać dowodu kanonicznego, co w praktyce może okazać się skrajnie trudne do zrealizowania (np. gdy rozumowanie dotyczy tego, czy jakaś olbrzymia liczba jest liczbą pierwszą czy jest liczbą złożoną). Gdyby natomiast przyjąć, że prawdziwość zdań jest determinowana przez wykazania, wówczas nie byłaby rozdzielna względem alternatywy, tzn. można by wykazać prawdziwość alternatywy, nie wykazując prawdziwości żadnego z jej składników (analogicznie w przypadku zdań egzystencjalnych). Czy można tych trudności uniknąć? Według Dummetta, są one spowodowane nie tyle przyjętym sposobem rozumienia dowodu, ile utożsamieniem prawdziwości z realizacją dowodu. Pojęcie prawdziwości należy określić w duchu stanowiska aktualizmu zliberalizowanego, tj. za prawdziwe uważać nie tylko takie zdania matematyczne, które zostały lub zostaną udowodnione, lecz również zdania, które wiemy, jak udowodnić, ale z różnych przyczyn być może nigdy nie udowodnimy. Oto dwa cytaty dotyczące tej kwestii:

> Zamiarem moim było uznać za prawdziwe stwierdzenie, dla którego dysponujemy efektywną procedurą rozstrzygającą, taką że *faktycznie* da nam ona pozytywne rozstrzygnięcie, nawet jeśli nie wiemy, jakie ono będzie (Dummett 1998a, s. 123).[35]

---

[33] Dummett prezentuje dowody korzystając z dedukcji naturalnej w stylu Gentzena. Istnieje duże podobieństwo pomiędzy obowiązującymi w niej regułami wprowadzania a warunkami Heytinga.

[34] A demonstration is just as cogent a ground for the assertion of its conclusion as is a canonical proof, and is related to it in this way: that a demonstration of a proposition provides an effective means for finding a canonical proof.

[35] It was intended to allow as true a statement for which we have an effective decision procedure that will *in fact* yield a positive result, even if we do not know this.

> […] stwierdzenie jest prawdziwe pod warunkiem, że faktycznie posiadamy środki pozwalające uzyskać jego dowód kanoniczny, bez względu na to, czy jesteśmy świadomi tego faktu [tj. faktu, że dowód ów daje się uzyskać — Z.T.] . Czy taki krok byłby zdradą intuicjonistycznych zasad? (Dummett 1975a/1978, s. 243).[36]

Mówiąc precyzyjniej: zdanie A jest prawdziwe wtw A zostało udowodnione lub dysponujemy efektywną metodą taką, że (a) wiemy, iż po jej zastosowaniu uzyskamy dowód (kanoniczny) A bądź $\neg A$ oraz (b) jej zastosowanie dostarczy dowodu A (chociaż akurat tego możemy nie wiedzieć). Co ewentualnie przemawia za takim określeniem prawdziwości? Rozważmy wykazanie jakiegoś zdania arytmetycznego postaci $\exists x A(x)$. Jeśli $A(x)$ jest predykatem rozstrzygalnym, wtedy dla każdej liczby naturalnej n procedura rozstrzygająca prowadzi do alternatywy $A(n) \vee \neg A(n)$, chociaż aż do momentu jej zastosowania nie wiemy, który jej składnik możemy udowodnić. Niewiedza ta — zauważa Dummett — nie koliduje z uznaniem *istnienia* odpowiedzi na pytanie, który ze składników owej alternatywy otrzyma dowód (Dummett 1975a/1978, s. 244). Uzasadnienie to kończy konkluzja:

> Jeśli poddamy się tej linii myślenia, to musimy utrzymywać, że każde twierdzenie utworzone przez zastosowanie jakiegoś rozstrzygalnego predykatu do konkretnej liczby ma już określoną wartość logiczną, prawdę lub fałsz, chociaż my możemy tego nie wiedzieć. Zarazem, gdy to przyjmiemy, nie sprawi żadnej różnicy, czy na początku postanowimy, że liczby naturalne są wytworami ludzkiego umysłu, czy też że są one wiecznie istniejącymi obiektami abstrakcyjnymi. […] Z tego powodu […] każde rozstrzygalne twierdzenie teorioliczbowe będzie ostatecznie zdeterminowanie prawdziwe bądź fałszywe, niezależnie od naszej wiedzy, dokładnie tak, jak to jest w ujęciu platońskim (Dummett 1975a/1978, s. 245-245).[37]

Przeciw aktualizmowi radykalnemu Dummett wysunął niezależnie kilka zastrzeżeń. Jedno z nich wykorzystuje tzw. *paradoks wnioskowania* (*the paradox of inference*). Przypomnijmy, od logicznie poprawnych reguł wnioskowania dedukcyjnego wymaga się, by zachowywały prawdziwość, tj. ilekroć przesłanki są prawdziwe, tylekroć wniosek też jest prawdziwy. Problem pojawia się, gdy prawdziwość utożsamimy z jej aktualnym rozpoznaniem (faktycznym posiadaniem) dowodu kanonicznego. Otóż takie ujęcie pozbawia wnioskowania dedukcyjne użyteczności, gdyż odbiera im zdolność do rozszerzania wiedzy — wnioskujący od jednych zdań rozpoznanych jako prawdziwe przechodzi do innych zdań również rozpoznanych jako prawdziwe (Dummett 1975b/1978, s. 297; Dummett 1991/1998, s. 309). Tymczasem

---

[36] […] a statement is true provided that we are in fact in possession of a means of obtaining a canonical proof of it, whether or not we are aware of the fact. Would such a step be a betrayal of intuitionist principles?

[37] If we yield to this line of thought, then we must hold that every statement formed by applying a decidable predicate to a specific natural number already has a definite truth-value, true or false, although we may not know it. And, if we hold this, it makes no difference whether we chose at the outset to say that natural numbers are creations of the human mind or that they are eternally existing abstract objects. […] For […] each decidable number-theoretic statement will already be determinately true or false, independently of our knowledge, just as it is on platonistic view.

wnioskowanie dedukcyjne „ma dla nas jakąś wartość jedynie wtedy, gdy od przesłanek, które już uznaliśmy za prawdziwe, nie zawsze prowadzi nas do wniosku, który tym samym już za prawdziwy uznaliśmy” (Dummett 1991/1998, s. 277). Usprawiedliwienie wnioskowania dedukcyjnego, zachowujące jego wiedzotwórczy charakter, „wymaga — pisze Dummett — *pewnej* luki pomiędzy prawdą a jej rozpoznaniem” (Dummett 1975b/1978, s. 314). Należy przyjąć, że prawdziwość zdania jest czymś odrębnym — choć nie całkowicie niezależnym — od rozpoznania jego prawdziwości opartego na faktycznie posiadanych podstawach (dowodzie). Wnioskowanie dedukcyjne zawsze wiąże się z pokonaniem pewnego „epistemicznego dystansu” dzielącego przesłanki od wniosku, a mianowicie przejście od rozpoznania prawdziwości przesłanek do rozpoznania prawdziwości wniosku dokonuje się za pośrednictwem rozpoznania logicznej poprawności stosowanej reguły wnioskowania. Inaczej rzecz ujmując, przejście od rozpoznania prawdziwości przesłanek do rozpoznania prawdziwości wniosku realizuje się (na terenie matematyki) poprzez rozpoznanie, która spośród dostępnych nam metod przekształcania dowolnego dowodu przesłanek na dowód wniosku wraz z dowodem przesłanek pozwoli nam udowodnić wniosek (tj. da nam metodę konstrukcji dowodu wniosku).

Druga trudność dotyczy *Zasady Chrześcijańskiego Miłosierdzia*, określającej twórczy podmiot matematyczny: $A \rightarrow \exists n \vdash_n A$. Za jej pomocą możemy uzasadnić następujące, nieintuicyjne, twierdzenie: $\forall m B(m) \rightarrow \forall m \exists n \vdash_n B(m)$, tzn. jeśli prawdziwe jest dane zdanie ogólne (zostało ono już udowodnione), to powinniśmy (jesteśmy zobowiązani) udowodnić w przyszłości — o ile jeszcze tego nie zrobiliśmy — każdą (z osobna) jego konkretyzację. Dummett odrzuca propozycję, aby operator $\vdash_n$ rozumieć jako informujący, że dowód twierdzenia ogólnego jest zarazem dowodem wszystkich jego konkretyzacji. Trzeba by ją bowiem rozszerzyć na każdą rozpoznaną konsekwencję logiczną, gdyż $\vdash_m A \wedge \vdash_k (A \rightarrow B) \rightarrow \exists n \vdash_n B$, gdzie $n = \max(m, k)$ (Dummett 1975a/1978, s. 233-237; Dummett 1977, s. 348-350). Wracamy w ten sposób do paradoksu wnioskowania. Powstały kłopot — zauważa angielski filozof — wynika z posługiwania się zbyt rygorystycznym pojęciem prawdy. Trzeba zliberalizować rozumienie wzoru $\exists n \vdash_n A$. Stwierdzenie, że istnieje stadium, na którym to a to obowiązuje, należy zastąpić stwierdzeniem, że dysponujemy efektywnymi środkami pozwalającymi na zrealizowanie owego stadium.

Podsumowując, mimo pewnego zbliżenia do platonizmu, Dummett odrzuca jakąkolwiek realistyczną interpretację pojęcia dowodliwości. Opowiada się za semantyką dzielącą zdania matematyczne na: (a) zdania, które wiadomo, jak udowodnić (tj. posiadamy efektywne środki konstrukcji ich dowodów kanonicznych), niezależnie od tego, czy odpowiedni dowód zostanie kiedykolwiek urzeczywistniony, (b) zdania, które wiadomo, jak obalić, niezależnie od tego, czy kiedykolwiek urzeczywistnimy odpowiednią procedurę obalającą, (c) zdania (obecnie) nierozstrzygalne, tj. zdania niemieszczące się w dwu powyższych klasach.

Wydaje się, że i ta koncepcja prawdziwości rodzi pewne trudności. Mianowicie, usuwa ona z pola uwagi pewne swoiste czynności poznawcze. Na przykład, na jej gruncie zdania „Osoba *a* zastanawia się nad prawdziwością hipotezy *A*" oraz „Osoba *a* zastanawia się nad możliwością udowodnienia (lub obalenia) hipotezy *A* za pomocą znanych sobie metod" wyrażają to samo. Można przeciw temu oponować: ktoś może zastanawiać się, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb zaprzyjaźnionych, nie zastanawiając się nad możliwością udowodnienia stosownego twierdzenia, gdyż wie, że nieznana jest żadna metoda jego dowodu, a jego rozważania mają charakter mistyczny. Rozważmy jeszcze przykład wzorowany na przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata. Załóżmy, iż osoba *a* przypuszcza, że zdanie *A* jest prawdziwe. Przyjmijmy ponadto, że wiele lat po śmierci *a* udowodniono *A*, wykorzystując pewne nowe metody, całkowicie nieznane *a*, oraz pokazano, iż na gruncie metod dostępnych w okresie życia *a* zdanie *A* było nierozstrzygalne. Czy przypuszczenie *a* o prawdziwości *A* było błędne? Zwolennik koncepcji Dummetta, wbrew intuicji, powinien odpowiedzieć na to pytanie twierdząco.

Przejdę obecnie do przedstawienia stanowiska Prawitza. Otóż próbuje on pogodzić intuicjonizm z przekonaniem, że twierdzenia matematyczne są prawdziwe na mocy obiektywnie istniejących dowodów (kanonicznych). Prawdziwość nie redukuje się do poprawnej stwierdzalności. Oto stosowne cytaty:

> Możemy powiedzieć, że jakieś zdanie matematyczne jest prawdziwe, jeżeli istnieje jego dowód, w pozaczasowym lub abstrakcyjnym sensie [słowa] istnieje […]. Alternatywnie tę samą ideę możemy wyrazić mówiąc, że zdanie *A* jest prawdziwe, jeżeli „możemy udowodnić *A*" […] To, że możemy udowodnić *A* nie jest rozumiane w tym sensie, że dowiedzenie *A* jest praktycznie osiągalne, lecz tylko tak, że jest możliwe w zasadzie udowodnienie *A*, kiedy abstrahujemy od długości naszego życia, braku wytrwałości i inteligencji, itd. Podobnie, to, że istnieje dowód *A* nie znaczy, że dowód *A* zostanie skonstruowany, lecz tylko że istnieje możliwość skonstruowania dowodu *A* (Prawitz 1987, s. 153-154).[38]

> Utrzymuję więc, że nawet w teorii znaczenia [danej] w kategoriach dowodów (lub weryfikacji) musimy uczynić miejsce dla możliwości przyjęcia idei dowodliwości lub abstrakcyjnego istnienia dowodów; interpretowanie naszych wypowiedzi jako o tym, co zostało udowodnione lub o faktycznie istniejących dowodach byłoby zbyt wąskie […] Możemy zatem powiedzieć, że poprawność stwierdzenia wymaga faktycznego istnienia dowodu, podczas gdy prawdziwość stwierdzonego zdania wymaga tylko (oraz jest identyczna z) potencjalnego istnienia dowodu tego zdania (Prawitz 1998a, s. 48).[39]

[38] We may say that a mathematical sentence is true if there exists a proof of it, in tenseless or abstract sense of exists. […] Or we may express the same idea by saying that a sentence *A* is true if "we can prove *A*" […] that we can prove *A* is not to be understood as meaning that it is within our practical reach to prove *A*, but only that it is possible in principle to prove *A* when we abstract from the shortness of our lives, the lack of perseverance and intelligence, and so on. Similarly, that there exists a proof of *A* does not mean that a proof of *A* will be constructed but only that the possibility is there for constructing a proof of *A*.

[39] I am thus arguing that even within a theory of meaning in terms of proofs (or verifications) we must make room for the possibility of entertaining ideas of provability or of abstract existence of proofs; it would be too narrow to construe our speech to be only about what is proved or about actual existence of proofs. […] We can then say that the correctness of an assertion requires the actual

Związek tak rozumianej prawdziwości z czasem i naszymi zdolnościami przeprowadzenia dowodów jest następujący: kiedy już pokazano, iż dane zdanie jest prawdziwe, pokazano tym samym, iż faktycznie wcześniej było ono prawdziwe, gdyż jego dowód istniał, zanim został odkryty. Wiedzę o tym, jaka ewentualnie konstrukcja będzie dowodem jakiegoś zdania, wyznacza znajomość warunków jego poprawnej asercji. Skoro jednak istnienie dowodu jest niezależne od aktu dowodzenia, konstruowanie dowodu zdania nie czyni owego zdania prawdziwym, a jedynie upewnia nas o jego prawdziwości. Ujęcie to ma niewątpliwe zalety. Po pierwsze, zachowany zostaje tradycyjny pogląd na naturę dowodu jako niepodważalnego argumentu dostarczającego wiedzy o obiektywnym uniwersum matematycznym. Po drugie, zachowane zostaje tradycyjne przekonanie o pierwotności prawdy względem stwierdzalności.

Dummett wskazuje, że stanowisko Prawitza prowadzi do uznania zasady dwuwartościowości, a następnie do obrazu rzeczywistości jakościowo zdeterminowanej, czyli realizmu. Wyjaśnia to następująco: jeżeli prawdziwość zdania *A* utożsamimy z istnieniem jego dowodu i przyjmiemy, że dowód *A* istnieje w sposób całkowicie niezależny od naszych możliwości odnalezienia go, to naturalną koleją rzeczy będzie utożsamienie fałszywości zdania *A* z nieistnieniem jego dowodu, a w konsekwencji rozważane zdanie będzie albo zdeterminowanie prawdziwe, albo zdeterminowanie fałszywe niezależnie od naszych zdolności przeprowadzenia jego dowodu. Wydaje się, że Prawitz przewidział ten zarzut:

> Chociaż idea dowodu istniejącego niezależnie od naszego uzyskania go z pewnością ma posmak realizmu, nie myślę, że jest równoznaczna z wykonaniem całego kroku w stronę realizmu. Zamierzam przedstawić dwie racje usprawiedliwiające to zapatrywanie. Po pierwsze, dowody rozumiane tak jak tutaj są czymś, co w zasadzie może być przez nas poznane i dlatego nie ma mowy o w zasadzie niepoznawalnych dowodach. Po drugie, nie rozumiem, dlaczego alternatywa „albo istnieje dowód *A*, albo nie istnieje dowód *A*" musi być interpretowana w sposób klasyczny. Mimo że myślimy o dowodach jako jakoś istniejących nawet przed ich odnalezieniem, intuicjonista może nadal utrzymywać, iż stwierdzenie alternatywy o istnieniu bądź nieistnieniu dowodu *A* wymaga, abyśmy wiedzieli, jak odnaleźć potwierdzenie istnienia dowodu *A* bądź nieistnienia dowodu *A*. Dla dowolnego *A* nie wiemy, jak odnaleźć takie potwierdzenie, a więc nie powinniśmy mieć żadnej trudności z powstrzymaniem się od pomyślenia, że owa alternatywa w zasadzie jest prawdziwa (Prawitz 1998a, s. 48).[40]

---

existence of a proof, while the truth of the asserted proposition requires only (and is identical with) the potential existence of a proof of the proposition.

[40] Although the idea of proofs existing independently of our hitting upon them certainly contains a flavour of realism, I do not think that it amounts to a full step to realism. I want to give two reasons for thinking so. Firstly, proofs as here understood are something that in principle can be known by us, and hence there is no talk about in principle unknowable proofs. Secondly, I do not see why the disjunction "either there exists a proof of A or there does not exist a proof of A" must be taken in a classical way. Although we think of the proofs as having some kind of existence even before we find them, an intuitionist may still maintain that to assert the disjunction that either there is or there is not a proof of A requires that we know how to find a verification either of the existence of a proof

W opinii Prawitza „filozofia matematyki, która nie potrafi wyjaśnić obiektywności matematyki, szwankuje" (Prawitz 1998a, s. 49).[41] Rzeczywistość matematyczna ujmowana przez pryzmat pojęcia prawdy jest pozaczasowa (statyczna), niezależna od naszej aktywności poznawczej i nie ma żadnych luk — wszystkie pytania, na które potrafimy poprawnie odpowiedzieć, miały wcześniej takie odpowiedzi. Natomiast ujmowana przez pryzmat poprawnej stwierdzalności zmienia się zależnie od naszej wiedzy oraz nie jest w pełni zdeterminowana w tym sensie, że nie możemy być pewni, iż każde matematyczne pytanie rozstrzygnięcia ma odpowiedź.[42]

Jeśli przyjmiemy punkt widzenia Prawitza, to spór konstruktywistów z platonistami (na płaszczyźnie semantycznej) można sprowadzić do wymogu rozpoznawalności prawdy. Jest on podstawowym motywem intuicjonistycznej rewizji logiki klasycznej, przede wszystkim zaś odrzucenia prawa wyłączonego środka.

5. ZAKOŃCZENIE

Mówiąc ogólnie, intuicjonizm jest kierunkiem zmierzającym do zrekonstruowania matematyki za pomocą wyłącznie metod konstruktywnych. Wśród jego przedstawicieli nie ma jednak zgody co do tego, czy prawdę utożsamić z aktualnie istniejącymi dowodami, czy ze znajomością metody realizacji dowodu, czy też realistyczną dowodliwością.

BIBLIOGRAFIA

Barzin M., Errera A. 1927, *Sur la logique de M. Brouwer*, Académie Royale de Belgique: Bulletin 13, s. 56-71.

Brouwer, L. E. J. 1907, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Mass & Van Suchelen, Amsterdam, przekład angielski: *On the Foundations of Mathematics*, [w:] Brouwer 1975, s. 11-101.

Brouwer, L. E. J. 1908, *The unreliability of logical principles*, [w:] Brouwer 1975, s.. 107-111.

Brouwer, L. E. J. 1912, *Intuitionism and formalism*, Bulletin of the American Mathematical Society 20, s. 81-96; przedruk [w:] Brouwer 1975, s. 123-138; przekład polski R. Murawski, *Intuicjonizm i formalism*, [w:] Murawski 1986, s. 263-275.

Brouwer, L. E. J., 1948, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam 1948, Proc. I, Fasc. II, s. 1235-1249; przedruk [w:] Brouwer 1975, s. 480-494.

Brouwer, L. E. J. 1951, *Note for a Lecture*, [w:] van Stigt 1990, appendix 8.

---

of A or of the non-existence of a proof of A. For an arbitrary A we do not know how to find such a verification, and we should then have no difficulty in resisting the thought that the disjunction in question is true.

[41] […] philosophy of mathematics that cannot account for the objectivity of mathematics is amiss.

[42] Istotnie, z dowodu twierdzenia o nieistnieniu matematycznego pytania rozstrzygnięcia bez odpowiedzi (jest ono intuicjonistycznie akceptowalne) nie da się uzyskać — w sposób intuicjonistycznie poprawny — dowodu twierdzenia, że każde matematyczne pytanie rozstrzygnięcia ma odpowiedź. Była już o tym mowa wcześniej.

Brouwer, L. E. J. 1951/52, *Changes in the relation between classical logic and mathematics*, [w:] van Stigt 1990, appendix 9.

Brouwer, L. E. J. 1952, *Historical background, principles and methods of intuitionism*, South African Journal of Science 49, s. 139-146; przedruk [w:] Brouwer 1975, s. 508-515.

Brouwer, L. E. J. 1954, *Points and Spaces*, Canadian Journal for Mathematics 6, s. 1-17, przedruk [w:] Brouwer 1975, s. 522-540.

Brouwer, L. E. J. 1955, *The effect of intuitionism on classical algebra of logic*, Proceedings of the Royal Irish Academy Sect. A 57, s. 113-116; przedruk [w:] Brouwer 1975, s. 551-554.

Brouwer, L. E. J. 1975, *Collected Works* I, ed. A. Heyting, Amsterdam: North-Holland.

Dales H. G., Oliveri G. (eds) 1998, *Truth in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Dąbska I. 1976, *Idee kantowskie w neointuicjonizmie Brouwera*, Logika 5, s. 7-13

Derra A. 2006, *Realizm a teoria znaczenia*. *Analiza poglądów Michaela Dummetta*, [w:] Żegleń 2006, s.19-116.

Dummett, M. 1959, *Truth*, Proceedings of the Aristotelian Society t. LIX, s.141-162; przedruk [w:] Dummett 1978, s. 1-24.

Dummett, M. 1963, *Realism*, [w:] Dummett 1978, s. 145-165; przekład polski T. Placek i P. Turnau, *Realizm*, Principia 6 (1992), s. 5-31.

Dummett, M. 1973, *Frege*: *Philosophy of Language*, London: Duckworth.

Dummett, M. 1975a, *The Philosophical Basis for Intuitionistic Logic*, przedruk [w:] Dummett 1978, s. 215-247.

Dummett, M. 1975b, *Justification of Deduction*, przedruk [w:] Dummett 1978, s. 290-318.

Dummett, M. 1975c, *What is Theory of Meaning (I)*, [w:] Guttenplan 1975, s. 97-138; przedruk [w:] Dummett 1993, s. 1-33.

Dummett, M. 1976, *What is Theory of Meaning (II)*, [w:] Evans, McDowell 1976, s. 67-137; przedruk [w:] Dummett 1993, s. 34-71.

Dummett, M. 1977, *Elements of Intuitionism*, Oxford: Oxford University Press.

Dummett, M. 1978, *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth.

Dummett, M. 1981, *The Interpretation of Frege's Philosophy*, London: Duckworth.

Dummett, M. 1982, *Realism*, przedruk [w:] M. Dummett, *The Seas of Language*, Oxford: Oxford University Press, 1993, s. 230-279.

Dummett, M. 1987, *Reply to Dag Prawitz*, [w:] Taylor 1987, s. 281-286.

Dummett, M. 1991, *The Logical Basis of Methaphysics*, London: Duckworth; przekład polski W. Sady, *Logiczna podstawa metafizyki*, PWN, Warszawa 1998.

Dummett, M. 1993, *The Seas of Language*, Oxford: Oxford University Press.

Dummett, M. 1998a, *Truth from the constructive standpoint*, Theoria 64, s. 122-138.

Dummett, M. 1998b, *The Philosophy of Mathematics*, [w:] Grayling 1998

Dummett, M. 2003, *Truth and the Past*, Journal of Philosophy 100, s. 5-53.

Evans G., McDowell J. (eds) 1976, *Truth and Meaning*: *Essays in Semantics*, Oxford: Clarendron Press.

Franchella, M. 1994, *Heyting's contribution to the change in research into the foundations of mathematic*, History and Philosophy of Logic 15, s. 149-172.

Franchella, M. 1995, *L. E. J. Brouwer*: *Toward Intuitionistic Logic*, Historia Mathematica 22, s. 304-322.

Griss, G. F. C. 1948, *Sur la negation* (*dans les mathtmatiques et la logique*), Synthese 7, s. 71-74.

Grayling A. C. 1998, *Philosophy 2*, Oxford: Oxford University Press.

Grzegorczyk A. 1971, *Klasyczne, relatywistyczne i konstruktywistyczne sposoby uznawania twierdzeń*, Studia Logica 27, s. 151-159.

Heyting, A. 1930, *Sur la logique intuitionniste*, Académie Royale de Belgique: Bulletin 16, s. 957-963; przekład angielski P. Mancosu, W. P. van Stigt, *On Intuitionistic Logic*, [w:] Mancosu 1998, s. 306-310.

Heyting, A. 1931, *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis 2, s. 106-115; przekład polski R. Murawski, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, [w:] Murawski 2002, s. 60-69.

Heyting, A. 1956a, *Les conception intuitionniste de la logique*, La études philosophiques 11, s. 226-233.

Heyting, A. 1956b, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland; pewne fragmenty zostały przetłumaczone na polski [w:] Murawski 1986, s. 276-286 oraz Misiek 1986.

Heyting, A. 1958, *On truth in mathematics*, Verlag van de plechtige viering van het honderdvijftig-jarig bestaan der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen met de teksten der bij die gelegenheit gehouden redevoeringen en voorgedrachte, Amsterdam: North-Holland, 1958, s. 277-279.

Heyting, A. 1957, *Some Remarks on Intuitionism*, [w:] Heyting (ed.) *Constructivity in Mathematics. Proceedings Colloquium Amsterdam 1957,* Amsterdam (North-Holland), s. 69-71.

Heyting, A. 1974, *Intuitionistic views on the nature of mathematics*, Synthese 27, s. 79-91.

Hilbert D. 1970, *Mathematische Probleme*, [w:] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin — Heidelberg — New York.

Mancosu P. 1998, *From Brouwer to Hilbert*: *The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, New York and Oxford.

Martin-Löf P. 1998, *Truth and knowability*: *on the principles C and K of Michael Dummett*, [w:] Dales, Oliveri 1998, s. 105-114.

Martino E., Usberti G. 1994, *Temporal and Atemporal Truth in Intuitionistic Mathematics*, Topoi 13, s. 83-92.

McGuinness, B. and G. Oliveri (eds) 1994, *The Philosophy of Michael Dummett*, Dordrecht: Kluwer.

Misiek J. (red.) 1986, *Filozofia matematyki*, wybór i przekład: B. Baran, Kraków 1986.

Miszczyński R. 1998, *Między językiem a prawdą. Z dziejów współczesnego intuicjonizmu matematycznego*, Wydawnictwo WSP, Częstochowa.

Murawski, R. (red.) 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań

Murawski, R. (red.) 1995, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Murawski, R. (red.) 2002, *Współczesna filozofia matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Placek T. 1997, *On Brouwer's Criticism of Classical Logic and Mathematics*, Logic and Logical Philosophy, s. 19-33.

Popper K. R. 1968, *Epistemology Without a Knowing Subject*, przekład polski: A. Chmielewski, *Epistemologia bez poznającego podmiotu*, [w:] K. R. Popper *Wiedza obiektywna*. *Ewolucyjna teoria epistemologiczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992, s. 148- 206.

Posy C. J. 1974, *Brouwer's Constructivism*, Synthese 27, s. 125-159.

Prawitz, D. 1980, *Intuitionistic logic*: *a philosophical challenge*, [w:] von Wright 1980, s. 1-10.

Prawitz, D. 1987, *Dummett on a theory of meaning and its impact on logic*, [w:] Taylor 1987, s. 117-165.

Prawitz, D. 1994, *Meaning theory and anti-realism*, [w:] McGuinness, Oliveri 1994, s. 79-89.

Prawitz, D. 1998a, *Truth and objectivity from a verificationist point of view*, [w:] Dales, Oliveri 1998, s. 41-51.

Prawitz, D. 1998b, *Comments on Michael Dummett's paper „Truth from the constructive standpoint"*, Theoria 64, s. 283-292.

Quesada F. M. 1994, *Prawda w naukach formalnych*, [w:] J. Pelc (red.), *Znaczenie i prawda. Rozprawy semiotyczne*, BMS 26, Warszawa, s. 365-378.

Sundholm B.G. 2000, *Proofs as Acts versus Proofs as Objects*: *Some Questions for Dag Prawitz*, Theoria 64, s. 187-216.

Szubka T. 1996, *Antyrealizm semantyczny. Studium analityczne*, Lublin: redakcja Wydawnictw KUL.

Szubka T. 2006, *Najnowsze poglądy Michaela Dummetta. Próba interpretacji*, [w:] Żegleń 2006, s.144-186.

Taylor B. (ed.) 1987, *Michael Dummett. Contributions to Philosophy*, Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers,

Troelstra, A. S. 1969, *Principles of Intuitionism*, Lecture Notes in Mathematics 95, Berlin: Springer.

Van Stigt, W. 1990, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: North-Holland.

von Wright G. H. (ed.) 1980, *Logic and Philosophy*, The Hague: Martinus Nijhoff Publishers.

Wieczorek R. 2005, *Antyrealizm — wybrane odmiany i ich konsekwencje epistemologiczne*, Uniwersytet Warszawski WFiS, Warszawa.

Woleński J. 2005, *Epistemologia*: *poznanie, prawda, wiedza, realizm*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Żegleń U. (red.) 2006, *Teoria znaczenia Michaela Dummetta i jej konsekwencje metafizyczne*, Dom Wydawniczy Duet, Toruń.