Filozofia Nauki
Rok XVIII, 2010, Nr 3(71)

Piotr Wilczek

Nowy postulat teorii mnogości — aksjomat Leibniza–Mycielskiego

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie kryteriów identyczności oraz nieodróżnialności należy do jednych z najszerzej omawianych i badanych zagadnień we współczesnej filozofii analitycznej oraz filozofii logiki.[1] Jest tak zapewne nie tylko ze względu na czysto poznawczy status tego zagadnienia, ale także ze względu na to, że rozstrzygnięcia kwestii dotyczących identyczności oraz nieodróżnialności mają zastosowanie w obrębie wszystkich szeroko rozumianych dyscyplin humanistycznych, a nawet w naukach empirycznych i społecznych. Dla przykładu wymieńmy choćby takie grupy zagadnień jak

[1] Przywołajmy tutaj tylko ważniejsze opracowania książkowe poświęcone temu zagadnieniu, gdyż wyczerpująca bibliografia wszystkich pozycji, w tym również artykułów, sama mogłaby stanowić temat odrębnego artykułu będącego przeglądem literatury na temat identyczności oraz nieodróżnialności. Por. B. B. Brody, *Identity and essence*, Princeton 1980, Princeton University Press; S. French oraz D. Krause, *Identity in physics: historical, philosophical and formal analysis*, Oxford 2006, Clarendon Press; A. Gallois, *Occasions of identity. The metaphysics of persistence, change and sameness*, Oxford 1998, Clarendon Press; N. Griffin, *Relative identity*, Oxford 1997, Clarendon Press; M. Grygianiec, *Identyczność i trwanie. Studium ontologiczne*, Warszawa 2007, Wydawnictwo Naukowe Semper; C. O. Hill, *Rethinking identity and metaphysics. On the new foundations of analytic philosophy*, New Haven 1997, Yale University Press; E. Hirsch, *The concept of identity*, Oxford 1982, Clarendon Press; M. K. Munitz (red.), *Identity and individuation*, New York 1971, New York University Press; H. Noonan, *Objects and identity*, Den Haag 1980, Martinus Nijhoof; H. Noonan (red.), *Personal identity*, Aldershot 1993, Dartmouth; D. Wiggins, *Sameness and substance*, Oxford 1980, Blackwell; C. J. F. Williams, *What is identity*, Oxford 1989, Clarendon Press; T. Williamson, *Identity and discrimination*, Oxford 1990, Blackwell oraz literatura tam cytowana. W dalszym ciągu będziemy się odwoływali tylko do konkretnych artykułów oraz opracowań.

tożsamość osoby ludzkiej i związane z tym zagadnienia natury społeczno-prawno-etycznej,[2] nieodróżnialność cząstek elementarnych we współczesnej fizyce kwantowej,[3] konstytucja przedmiotów materialnych, ontologia czasu realnego oraz wiele innych. Jak sugeruje tytuł niniejszego artykułu, będzie on dotyczył pewnej aksjomatycznej wersji prawa Leibniza (LL), sformułowanej przez Jana Mycielskiego, oraz jej interpretacji metalogicznej oraz filozoficznej.[4] Aksjomatyczna wersja LL nosi nazwę *aksjomatu Leibniza–Mycielskiego*. Termin ten został wprowadzony przez innego badacza podstaw teorii mnogości — Ali Enayata.[5] Zgodnie z poglądami metafizycznymi Leibniza każda substancja różni się wewnętrznie od każdej innej substancji. Wnioskujemy z tego, że żadne dwie substancje nie mogą być absolutnie jednakowe i musi istnieć między nimi jakaś różnica jakościowa. Nie istnieją dwie substancje, które byłyby tylko i wyłącznie numerycznie różne. W pismach Leibniza czytamy:

> […] nieprawdą jest, aby dwie substancje były całkiem do siebie podobne i różniły się tylko **solo numero**”,[6] „Nie istnieją nieodróżnialne dwa indywidua. […] Jeśli dane są dwie rzeczy nierozróżnialne, to dana jest rzecz ta sama pod dwiema nazwami”[7] oraz „Każda monada musi nawet różnić się od każdej innej. Gdyż nie ma w naturze dwóch bytów, z których by jeden był w zupełności taki sam jak drugi i między którymi nie można by znaleźć różnicy wewnętrznej lub polegającej na znamionach wewnętrznych”.[8]

Jeżeli dwie substancje są nieodróżnialne, to są one tożsame numerycznie. Zgodnie z terminologią Leibniza, prawo to nosi nazwę „zasady tożsamości bytów nierozróżnialnych”. Zasada ta stanowi jeden z filarów Leibnizjańskiej metafizyki. Zgodnie z tą zasadą, dwie substancje a oraz b są tożsame numerycznie wtedy i tylko wtedy, gdy substancja a posiada wszystkie własności, które przynależą substancji b oraz substancja b ma wszystkie własności, które również przynależą substancji a. Symbolicznie, powyższa zasada — znana we współczesnej literaturze przedmiotu jako prawo Leibniza (LL) — może być zapisana w logice drugiego rzędu w następującej postaci:

---

[2] Por. T. Czeżowski, *Identyczność a indywiduum i jego trwanie*, [w:] tegoż, *Odczyty filozoficzne*, Łódź 1958, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, s. 160-168; M. Grygianiec, *Identyczność…*, s. 119-123; H. Noonan (red.), *Personal…*; P. Wilczek, *Ontologia i logika identyczności — parę komentarzy do artykułu Tadeusza Czeżowskiego „Identyczność a indywiduum i jego trwanie”*, „Ruch Filozoficzny”, 2009 nr 4 (66), s. 725-738.

[3] Por. S. French oraz D. Krause, *Identity…* .

[4] Por. J. Mycielski, *New set-theoretic axioms derived from a lean metamathematics*, „Journal of Symbolic Logic”, 1995 nr 1 (60), s. 191-198.

[5] A. Enayat, *On the Leibniz-Mycielski axiom in set theory*, „Fundamenta Mathematicae”, 2004 nr 3 (181), s. 215-231; A. Enayat, *Leibnizian models of set theory*, „Journal of Symbolic Logic”, 2004 nr 3 (69), s. 775-789.

[6] G. W. Leibniz, *Rozprawa metafizyczna*, [w:] tegoż, *Wyznanie wiary filozofa. Rozprawa metafizyczna. Monadologia. Zasady natury i łaski oraz inne pisma filozoficzne*, przeł. S. Cichowicz, J. Domański, H. Krzeczkowski, H. Moese, Warszawa 1969, Paragraf 9, s. 106.

[7] G. W. Leibniz, *Polemika z Clarke'iem. Czwarte pismo Leibniza*, [w:] tamże, s. 347.

[8] G. W. Leibniz, *Monadologia*, [w:] tamże, Paragraf 9, s. 298.

$$\forall F(F(a) \leftrightarrow F(b)) \leftrightarrow a = b$$

gdzie F to zmienna predykatowa, która może być interpretowana na poziomie ontologicznym jako własność przysługująca danej substancji, a stałe a oraz b desygnują substancje (przedmioty) indywidualne. LL stwierdza, że a jest tożsamy (identyczny) z b wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich własności (wszystkich predykatów dostępnych w danym języku) F, zachodzi, że a ma własność F zawsze i tylko wtedy, gdy b też ma własność F.[9] Wnioskujemy więc, że prawo Leibniza ustala pewną logiczną zależność między przedmiotami a własnościami: *każde dwa różne przedmioty muszą różnić się co najmniej jedną własnością*. Prawo to może być zinterpretowane teoriomodelowo. Załóżmy, że $U = \langle M, \ldots \rangle$ to model dla pierwszorzędowego języka L, gdzie obiekty (przedmioty) są desygnowane przez elementy zbioru M oraz własności tych obiektów są wyrażalne w języku L przez pierwszorzędowe formuły z jedną zmienną wolną. W tym przypadku model U spełnia prawo Leibniza wtedy i tylko wtedy, gdy w U nie ma elementów nieodróżnialnych. W języku teorii modeli można tę zależność wyrazić w następujący sposób: U nie posiada pary różnych elementów a oraz b takich, że dla każdej pierwszorzędowej formuły $\varphi(x)$ języka L z dokładnie jedną zmienną x zachodzi, że:

$$(U, a, b) \vDash \varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b).$$

To przeformułowanie prawa Leibniza nie może być wyrażone w języku pierwszego rzędu, ponieważ twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego stwierdza, że każda pierwszorzędowa teoria z nieskończonym modelem ma model z elementami nieodróżnialnymi. Jak już zostało wspomniane, istnieje pierwszorzędowy aksjomat wyrażalny w języku teorii mnogości z predykatem $\{\in\}$, nazwany aksjomatem Leibniza–Mycielskiego (LM), który oddaje główne założenia LL dla modeli teorii mnogości. Ma on następującą postać:

Aksjomat Leibniza–Mycielskiego: Dla każdej pary różnych zbiorów a oraz b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a i b oraz formuła $\varphi(x)$ taka, że $(V_\alpha, \in)$ spełnia formułę $\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$. Symbolicznie:

(LM) $$\forall a \forall b[a \neq b \rightarrow \exists \alpha > \max\{\rho(a), \rho(b)\}\ Th(V_\alpha, \in, a) \neq Th(V_\alpha, \in, b)].$$

W powyższym aksjomacie $p(x)$ oznacza rangę porządkową elementu (zbioru) x, V_α to α poziom hierarchii von Neumanna składającej się ze zbiorów o randze porządkowej mniejszej niż α oraz $Th(V_\alpha, \in, x)$ denotuje pierwszorzędową teorię struktury $(V_\alpha, \in, a)$.[10] Jan Mycielski w cytowanej już pracy dowiódł następującego twierdzenia:

[9] P. Gut, *Leibniz. Myśl filozoficzna w XVII wieku*, Wrocław 2004, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.

[10] Przypomnijmy, że modelem dla teorii mnogości Zermelo–Fraenkla (ZF) jest *hierarchia zbiorów von Neumanna* (czyli *uniwersum von Neumanna*) oznaczane przez V. Można utożsamić V z klasą dobrze ufundowanych zbiorów. Hierarchia von Neumanna jest określona przez *indukcję pozaskończoną* w następujący sposób: $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$, gdzie $\wp(V_\alpha)$ to zbiór potęgowy V_α oraz

Twierdzenie 1 (Mycielski).[11] Zupełne rozszerzenie T teorii mnogości ZF spełnia aksjomat LM wtedy i tylko wtedy, gdy T ma model bez elementów nieodróżnialnych.

Przyjmijmy teraz konwencję terminologiczną, zakładając, że struktura U w pierwszorzędowym języku L nazywa się *modelem Leibnizjańskim* (ang. *Leibnizian model*), gdy U nie ma par elementów nieodróżnialnych. Z tego wynika, że w modelach Leibnizjańskich nie istnieją dwa różne elementy a oraz b takie, że dla każdej formuły $\varphi(x)$ języka L z jedną zmienną wolną x zachodzi:

$$U \models \varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b).$$

Można udowodnić, że ciało liczb rzeczywistych R jest ciałem Leibnizjańskim, ponieważ każde dwie różne liczby rzeczywiste mają różne przekroje Dedekinda.[12] Ale już na przykład rozpatrując ciało liczb zespolonych C, widzimy, że nie jest ono ciałem Leibnizjańskim, ponieważ jego elementy i oraz $-i$ są nieodróżnialne. Również można wykazać, że pierścień liczb całkowitych Z jest typu Leibnizjańskiego. Za pomocą twierdzenia Tarskiego o eliminacji kwantyfikatorów (dla domkniętych ciał rzeczywistych)[13] można wykazać, że Leibnizjańskie domknięte ciała rzeczywiste to dokładnie Archimedesowe domknięte ciała rzeczywiste.[14] Ale nie na odwrót. Zacho-

$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, jeżeli λ to *graniczna liczba porządkowa*. Graniczna liczba porządkowa to liczba porządkowa niebędąca następnikiem żadnej innej liczby porządkowej. Zakładając, że S to *operacja następnika*, zachodzi, że dla każdej liczby granicznej λ, jeżeli $\alpha < \lambda$, to $S(\alpha) < \lambda$. Każda liczba graniczna jest sumą teoriomnogościową swoich elementów. Gdyby liczba porządkowa nie była liczbą graniczną, to suma ta byłaby równa jej poprzednikowi. Zachodzi, że dla każdego zbioru x istnieje liczba porządkowa α taka, że $x \in V_\alpha$. Ranga zbioru x jest określona w następujący sposób: *ranga*(x) = najmniejsza liczba porządkowa α taka, że $x \in V_{\alpha+1}$. Por. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel oraz A. Levy, *Foundations of set theory*, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 67*, Amsterdam — London 1973, North-Holland Publishing Company; R. Murawski, *Z filozoficznych problemów teorii mnogości*, [w:] tegoż, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 2001, Wydawnictwo Naukowe PWN, s. 173-203.

[11] J. Mycielski, *New*..., s. 191-198.

[12] Załóżmy, że $(X, \leq)$ to porządek liniowy. Wtedy *przekrój Dedekinda* zbioru X to para zbiorów (A, B) taka, że $A, B \subseteq X$ oraz zachodzą następujące warunki: i) $A \neq \varnothing$ oraz $B \neq \varnothing$, ii) $A \cup B = X$, iii) jeżeli $a \in A$ oraz $b \in B$ to $a < b$. Tak określony zbiór A nazywamy *klasą dolną*, a zbiór B *klasą górną* przekroju Dedekinda. Por. R. Murawski, *Richard Dedekind*, [w:] tegoż, *Filozofia*..., s. 63-66; H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 2003, Wydawnictwo Naukowe PWN, s. 135.

[13] Mówimy, że teoria T dopuszcza *eliminację kwantyfikatorów* w języku L, gdy dla każdej L-formuły $\varphi(\overline{x})$, gdzie $\overline{x}$ to n-tka zmiennych, istnieje bezkwantyfikatorowa L-formuła $\varphi(\overline{x})$ taka, że $T \models \forall\overline{x}[\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \phi(\overline{x})]$. Własność eliminacji kwantyfikatorów jest bardzo mocną własnością teoriomodelową. *Twierdzenie Tarskiego–Seidenberga* mówi, że dla każdej pierwszorzędowej formuły nad ciałem rzeczywistym istnieje równoważna formuła bezkwantyfikatorowa. Co więcej, istnieje efektywny algorytm pozwalający obliczyć tę bezkwantyfikatorową formułę. Por. L. van Den Dries, *Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields*, „The Journal of Symbolic logic", 1988 nr 1 (53), s. 7-19.

[14] *Aksjomat Archimedesa* to aksjomat geometryczny mówiący, że każdy odcinek jest krótszy od pewnej wielokrotności długości każdego innego odcinka. Z tego aksjomatu wynika nieograniczo-

dzi bowiem, że nie-Archimedesowe Leibnizjańskie ciała uporządkowane istnieją w każdej nieskończonej mocy $\leq 2^{\aleph_0}$. Udowadnialna jest asercja mówiąca, że aksjomat LM jest niezależny od aksjomatów teorii mnogości ZFC oraz że aksjomat wyboru jest niezależny od ZF+LM.[15]

Aby dokładnie zrozumieć metateoretyczne implikacje aksjomatu LM, przedstawimy w części drugiej niniejszej pracy związki między skolemizacją języka a konstrukcją nieskończonych modeli z elementami nieodróżnialnymi. To właśnie stanowi treść wspomnianego już twierdzenia Ehrenfeuchta–Mostowskiego. Wprowadzimy takie pojęcia jak: funkcja Skolema, otoczka Skolema, rozszerzenie Skolema, teoria Skolemowa, zbiór Ehrenfeuchta–Mostowskiego, model Ehrenfeuchta–Mostowskiego oraz inne w celu eksplikacji metody konstruowania modeli z elementami nieodróżnialnymi. W części trzeciej natomiast podamy przykłady konstrukcji wewnętrznych modeli teorii mnogości z elementami nieodróżnialnymi otrzymanych właśnie dzięki zastosowaniu twierdzenia Ehrenfeuchta–Mostowskiego. Będziemy pracowali w środowisku hierarchii zbiorów konstruowalnych Gödla. Pokażemy, że wewnątrz uniwersum konstruowalnego L liczby porządkowe stanowią zbiór elementów nieodróżnialnych. Część czwarta pracy składa się z przedstawienia pewnych równoważnych form aksjomatu Leibniza–Mycielskiego. Pokażemy ekwiwalencję między aksjomatem LM a globalnymi wersjami zasad selekcji Kinny–Wagnera. Przedyskutujemy kwestię rozumienia aksjomatu LM jako jednej z wersji zasad wyboru. Przedstawimy i omówimy wyniki stwierdzające, że teoria mnogości Zermelo–Fraenkla z dodatkowym aksjomatem stwierdzającym, że wszystkie zbiory są porządkowo definiowalne ($V = OD$), implikuje aksjomat Leibniza–Mycielskiego. Tym samym zastanowimy się nad kwestią, dlaczego możliwość określenia definiowalnego dobrego porządku na uniwersum wszystkich zbiorów (co wypływa z postulatu $V = OD$ oraz z tzw. rozszerzonej zasady refleksji Myhilla–Scotta) pociąga za sobą aplikowalność prawa Leibniza względem tego uniwersum. Omówimy również tzw. słabą wersję aksjomatu LM, jego wersję teorioklasową oraz parametryczną, jak również aksjomat Leibniza–Gödla. W części piątej dokonamy podsumowania wyników naszych badań, naszkicujemy kierunki dalszych rozważań nad kwestiami poruszanymi w tym artykule oraz zwrócimy uwagę na istnienie *systemów nie-Leibnizjańskich* teorii mnogości oznaczanych przez ZFC($I^{<\omega}$).

---

ność prostej rzeczywistej. Ma on swój odpowiednik w arytmetyce orzekający, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a oraz b istnieje liczba naturalna n taka, że $a < n \cdot b$. W matematycznej teorii ciał uporządkowanych zachodzenie aksjomatu Archimedesa charakteryzuje ciała izomorficzne z podciałami ciała liczb rzeczywistych. Jest to równoważne stwierdzeniu, że jeżeli ciało uporządkowane *nie* jest izomorficzne z podciałem ciała liczb rzeczywistych, to ma elementy większe od wszystkich liczb naturalnych. Nazywamy te elementy nieskończenie wielkimi. C. C. Chang oraz H. J. Keisler, *Model theory*, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 73, Amsterdam–London 1973, North-Holland Publishing Company, s. 70.

[15] Por. A. Enayat, *On the Leibniz-Mycielski*..., Rozdział 3.

2. SKOLEMIZACJA
ORAZ TWIERDZENIE EHRENFEUCHTA–MOSTOWSKIEGO

Rozpocznijmy nasze rozważania formalno-logiczne od sprecyzowania pojęć, którymi posługiwaliśmy się we wprowadzeniu w sposób intuicyjny. Język pierwszego rzędu L utożsamiamy ze zbiorem symboli, czyli ze zbiorem symboli relacyjnych, symboli funkcyjnych oraz symboli stałych. Otrzymujemy następującą strukturę:

$$L = \{P, \ldots, F, \ldots, c, \ldots\}$$

gdzie P to n-arna relacja dla pewnego $n \geq 1$oraz F to m-arna funkcja dla pewnego $m \geq 1$. Modelem dla danego języka L jest para uporządkowana $U = \langle A, I \rangle$, gdzie A to uniwersum dla struktury U oraz I to *funkcja interpretacji* odwzorowująca symbole języka L na odpowiednie relacje, funkcje oraz stałe w uniwersum A. Model U dla języka L ma więc postać:

$$U = \langle A, P^U, \ldots, F^U, \ldots, c^U, \ldots \rangle.$$

Za pomocą rekursji po długości danego termu $t(x_1,\ldots, x_n)$ można określić jego wartość, która jest oznaczona $t^U[a_1,\ldots, a_n]$. Analogicznie, za pomocą rekursji po długości danej formuły $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ można określić dla niej *relację spełniania* $U \models \varphi[a_1,\ldots, a_n]$, gdzie t to term, $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ to formuła ze zmiennymi wolnymi $x_1,\ldots, x_n$ oraz $a_1,\ldots, a_n$ to skończony ciąg elementów ze zbioru A. Mówimy, że dwa modele są *elementarnie równoważne* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają te same zdania. Podmodel U'modelu U to podzbiór $B \subset A$ z relacjami $P^U \cap B^n, \ldots$, funkcjami $F^U \upharpoonright B^m, \ldots$, oraz stałymi $c^U, \ldots$ Wszystkie stałe c^U należą do B oraz zbiór B jest domknięty ze względu na wszystkie funkcje F^U. Oznacza to, że jeżeli $(x_1,\ldots, x_n) \in B^m$, to $F^U(x_1,\ldots, x_n) \in B$. Podmodel $U' \subset U$ jest elementarnym podmodelem, symbolicznie $U' \prec U$, gdy spełnia te same zdania co model U. Funkcja $h\colon A^n \to A$ to *funkcja Skolema* dla formuły $\varphi(x, x_1,\ldots, x_n)$ jeżeli:

$$(\exists a \in A)\ U \models \varphi[a, a_1,\ldots, a_n] \text{ implikuje, że } U \models \varphi[h(a_1,\ldots, a_n), a_1,\ldots, a_n]$$

dla wszystkich $a_1,\ldots, a_n$.[16] Z aksjomatu wyboru wynika, że można określić funkcję Skolema dla każdej formuły φ. Załóżmy, że $L = L^0$ oraz dla każdego $i < \omega$ niech L^{i+1} oznacza język otrzymany przez dołączenie do L^i n-arnego symbolu funkcyjnego $F_{\exists x\varphi}$ dla każdej L^i-formuły $(\exists x)\varphi(x, \overline{y})$ w której zmienna $\overline{y}$ nie jest związana oraz nowej stałej $c_{\exists x\varphi}$ dla każdego zdania $\exists x\varphi$ *języka L*. n-arność powyższego symbolu funkcyjnego jest równa długości n-tki $\overline{y}$. Wtedy L^{sk} to *język Skolemowy* sprzężony z języ-

[16] Dla przykładu rozpatrzmy formułę o postaci $\forall x \exists y R(x, y)$ mówiącą, że „*dla każdego x istnieje y taki, że zachodzi relacja R(x, y)*”. Skolemizacja języka polega na określeniu *funkcji Skolema f* od argumentu x. Otrzymujemy wtedy formułę o postaci $\exists f \forall x R(x, f(x))$ mówiącą, że „*istnieje funkcja (Skolema) f odwzorowująca każdy x na y taka, że dla każdego x zachodzi relacja R(x, f(x))*”. Por. C. C. Chang oraz H. J. Keisler, *Model*…, Paragraf 3.3.

kiem L. Ma on postać $L^{sk} = \bigcup_{i<\omega} L^i$. Otrzymujemy, że język L^{sk} to rozszerzenie języka L, czyli, że $L^{sk} = \mathrm{L} \cup \{F_{\exists x\varphi}$: dla każdej formuły języka $L\}$. Jest to tzw. *rozszerzenie Skolema* języka L. Dalej, dla każdej teorii T w języku L (czyli L-teorii), *teoria Skolemowa*, oznaczana przez T^{sk}, sprzężona z T jest otrzymywana przez dodanie do T wszystkich *aksjomatów Skolema* o postaci:

$$(\forall \overline{y})(\exists x)\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(F_{\exists x\varphi}(\overline{y}), \overline{y})$$

dla każdej L^{sk}-formuły $(\exists x)\varphi$, gdzie zmienna $\overline{y}$ nie jest związana. A więc w formule $\varphi(x, \overline{y})$ zastępujemy wszystkie niezwiązane wystąpienia zmiennej x przez term $F_{\exists x\varphi}(\overline{y})$. Jeżeli T to L-teoria oraz zachodzi, że $U \models T$, to *rozszerzenie Skolema modelu* U, oznaczone przez U^{sk}, jest określone jako każdy model zbudowany przez interpretację wszystkich nowych symboli funkcyjnych tak, aby spełniały aksjomaty Skolema. Można udowodnić, że dla każdej pierwszorzędowej formuły φ logiki predykatów zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2. Jeżeli φ to formuła bez zmiennych wolnych oraz w preneksowej postaci normalnej oraz φ^{sk} to rezultat jej skolemizacji, gdzie $f_1,\ldots, f_n$ to symbole funkcji Skolema, to dla każdej L-struktury U istnieje język (tzw. język Skolemowy) $L^{sk} = \mathrm{L} \cup \{ f_1,\ldots, f_n\}$ oraz L^{sk}-struktura U^{sk} rozszerzająca L-strukturę U taka, że $U^{sk} \restriction L = U$ oraz $U^{sk} \models \varphi \leftrightarrow \varphi^{sk}$.[17]

Twierdzenie 3. Niech ϕ to pierwszorzędowa formuła bez zmiennych wolnych. Załóżmy, że $\neg\varphi$ to preneksowa postać normalna formuły ϕ oraz φ^{sk} to wynik jej skolemizacji. Wtedy zachodzi następujący warunek: $\vdash \phi \leftrightarrow \vdash \neg(\varphi^{sk})$.

Twierdzenie Skolema: Jeżeli T to teoria w pierwszorzędowej logice predykatów, to istnieje teoria Skolemowa T^{sk} będąca konserwatywnym rozszerzeniem teorii T, powstała przez dodanie do T wszystkich aksjomatów Skolema.[18]

Formułę — wynik procesu skolemizacji — przedstawiamy w tzw. *Skolemowej postaci normalnej*. Formuła w tej postaci ma kształt $\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\varphi$, gdzie φ to formuła w *koniunkcyjnej postaci normalnej*.[19] Mając zbiór funkcji Skolema, jedną dla

[17] Mówimy, że formuła jest w *preneksowej postaci normalnej* (ang. *prenex normal form*), gdy wszystkie jej kwantyfikatory są przesunięte na początek. Inna nazwa formuły o takiej postaci to *przedrostkowa postać normalna*. Istnieje twierdzenie mówiące, że każą formułę klasycznego rachunku predykatów można sprowadzić do preneksowej postaci normalnej. Por. M. Ben-Ari, *Logika matematyczna w informatyce*, Warszawa 2005, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 160.

[18] Jeżeli mamy dwa języki $L \subseteq L'$ oraz dwie teorie $T \subseteq T'$ takie, że T to L-teoria oraz T' to L'-teoria, to T' jest *konserwatywnym rozszerzeniem* teorii T', jeżeli każde L-zdanie, które jest konsekwencją logiczną teorii T' jest też konsekwencją logiczną teorii T.

[19] Formuła jest w *koniunkcyjnej postaci normalnej*, gdy jest koniunkcją *klauzul*. Klauzula to formuła zdaniowa będąca alternatywą *literałów*. Literał to litera zdaniowa (*literał pozytywny*) lub litera zdaniowa poprzedzona negacją (*literał negatywny*).

każdej formuły języka L oraz zakładając, że $X \subset A$, to podzbiór uniwersum modelu U, można określić tzw. *otoczkę Skolema* (ang. *Skolem hull*) dla zbioru X, oznaczaną przez $H(X)$. Otoczka Skolema dla zbioru X to domknięcie zbioru X ze względu na funkcje Skolema. Mówimy równoważnie, że zbiór $X \subset A$ generuje otoczkę Skolema $H(X)$. Załóżmy, że mamy model U z uniwersum A. Wtedy określmy model $H^U(X) = \langle H(X),\ldots\rangle$ dla $X \subset A$, gdzie $H(X)$ to domknięcie zbioru X ze względu na wszystkie termy modelu U. Zachodzi, że model $H^U(X)$ może być elementarnie zanurzony, jako podmodel właściwy, w model U. A więc, pamiętając, że $X \subset A$ otrzymujemy, że model, którego uniwersum stanowi otoczka Skolema zbioru X, to elementarny podmodel modelu U, który ma moc co najwyżej $|X| \cdot |L| \cdot \aleph_0$.[20]

Wprowadźmy teraz następne pojęcie teoriomodelowe, z którego będziemy korzystali. *Typ* to zbiór pierwszorzędowych formuł w języku L ze zmiennymi wolnymi $x_1,\ldots, x_n$, które są prawdziwe o ciągu elementów z uniwersum A L-struktury U. Załóżmy, że $L(B)$, gdzie $B \subset A$, to język otrzymany z L przez dodanie stałych c_b dla każdego $b \in B$. Czyli $L(B) = \mathrm{L} \cup \{c_b : b \in B\}$. Mówimy wtedy, że formuła języka $L(B)$ ma parametry w zbiorze B. Załóżmy, że $n \geq 1$ oraz $\overline{a}$ to n-tka elementów z modelu U, czyli że $\overline{a} =(a_1,\ldots, a_n) \in A^n$. Typ zupełny elementu $\overline{a}$ nad zbiorem parametrów B to zbiór wszystkich pierwszorzędowych formuł $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ w języku $L(B)$, dla których $U \models \varphi(a_1,\ldots, a_n)$.

Pojęcie elementów nieodróżnialnych (ang. *indiscernibles*) wyrosło z rozważań teoriomodelowych dotyczących modeli teorii aksjomatycznych z wieloma nietrywialnymi automorfizmami. Badania te zostały zapoczątkowane przez polskich logików Andrzeja Mostowskiego oraz Andrzeja Ehrenfeuchta.[21] W celu zachowania klarowności ekspozycji przytoczmy najpierw definicję teoriomnogościową pojęcia elementów nieodróżnialnych, a dopiero później jej teoriomodelowy odpowiednik.[22] Załóżmy, że U to pierwszorzędowa L-struktura z uniwersum A oraz $X \subset A^n$ to liniowo uporządkowany przez relację < podzbiór uniwersum. Wtedy $\langle X, <\rangle$ jest zbiorem elementów nieodróżnialnych dla L-struktury U wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej L-formuły $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ oraz wszystkich ciągów elementów $x_1 < \ldots < x_n$ oraz $y_1 < \ldots < y_n$ w X zachodzi, że:

$$U \models \varphi[x_1,\ldots, x_n] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } U \models \varphi[y_1,\ldots, y_n].$$

Oznacza to, że dla każdego $n \in \omega$, wszystkie wstępujące n-tki w X mają takie same własności pierwszorzędowe. W ujęciu teoriomodelowym różnicujemy między *zbiorem elementów nieodróżnialnych* (ang. *set of indiscernibles*) a *ciągiem elementów*

[20] Na temat otoczek Skolemowych por. J. T. Baldwin, *Fundamentals of stability theory*, New York 1988, Springer Verlag; S. Buechler, *Essential stability theory*, Berlin–Heidelberg 1996, Springer Verlag.

[21] A. Ehrenfeucht oraz A. Mostowski, *Models of axiomatic theories admitting automorphisms*, „Fundamenta Mathematicae", 1956 (43), s. 50-68.

[22] A. Kanamori, *The higher infinite: Large cardinals in set theory from their beginnings*, Berlin — Heidelberg 1994, Springer Verlag; T. Jech, *Set theory*, Berlin–Heidelberg 2003, Springer Verlag.

nieodróżnialnych (ang. *sequence of indiscernibles*).[23] Niech U to pierwszorzędowa L-struktura oraz $X \subset A^n$ to liniowo uporządkowany przez relację < podzbiór uniwersum. Wtedy $\langle X, <\rangle$ jest ciągiem elementów nieodróżnialnych w L-strukturze U, gdy dla wszystkich n oraz wszystkich ciągów $x_1 < \ldots < x_n$ oraz $y_1 < \ldots < y_n$ z X zachodzi, że $tp_U(x_1,\ldots, x_n) = tp_U(y_1,\ldots, y_n)$. X to zbiór elementów nieodróżnialnych w danej L-strukturze U, gdy $tp_U(x_1,\ldots, x_n) = tp_U(y_1,\ldots, y_n)$ dla wszystkich ciągów $(x_1,\ldots, x_n)$, $(y_1,\ldots, y_n) \in X^n$ takich, że $x_i \neq x_j$ oraz $y_i \neq y_j$ dla wszystkich $1 \leq i < j \leq n$. Oznacza to, że X jest zbiorem elementów nieodróżnialnych w U, gdy $\langle X, <\rangle$ jest ciągiem elementów nieodróżnialnych dla *każdego* liniowego porządku na podzbiorze X. Równoważnie przyjmujemy, że dane dwa ciągi elementów są *zupełnie nieodróżnialne* (ang. *totalny indiscernible*), gdy są nieodróżnialne dla *każdej* permutacji indeksów $1 < \ldots < n$. Wtedy otrzymujemy definicję zbioru elementów nieodróżnialnych. Można przyjąć, że U to model z uniwersum A oraz $\langle X, <\rangle$, gdzie $X \subset A^n$, to liniowo uporządkowany podzbiór taki, że dla każdej pary ciągów elementów z X $x_1 < \ldots < x_n$ oraz $y_1 < \ldots < y_n$ istnieje automorfizm f modelu U taki, że $f(x_i) = y_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wtedy $\langle X, <\rangle$ to ciąg elementów nieodróżnialnych w U. Przytoczmy teraz twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego dotyczące modeli z elementami nieodróżnialnymi. Twierdzenie to ma postać:

Twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego. Jeżeli T to teoria z nieskończonym modelem, to dla każdej liczby kardynalnej κ, T ma model, który jest otoczką Skolema ciągu elementów nieodróżnialnych o mocy κ. Inaczej, niech $\langle X, <\rangle$ to liniowo uporządkowany zbiór. Wtedy istnieje model U (z uniwersum A) teorii T taki, że $X \subset A^n$ oraz X jest zbiorem elementów nieodróżnialnych dla U.[24]

Modele z elementami nieodróżnialnymi zbudowane zgodnie z twierdzeniem Ehrenfeuchta–Mostowskiego nazywają się *modelami Ehrenfeuchta–Mostowskiego*, w skrócie *EM modelami*. Jak się je konstruuje? Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Ehrenfeuchta–Mostowskiego można wyprowadzić następujący lemat:[25]

Lemat 4. Niech $L' = L \cup \{c_n : n \in \omega\}$ to rozszerzenie języka L o nowe stałe c_n. Niech T to L-teoria z nieskończonym modelem. Wtedy następujący zbiór T' zdań języka L' jest niesprzeczny:

$$\mathrm{T}' = \mathrm{T} \cup \{\varphi(c_{i_1},\ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1},\ldots, c_{j_n})\colon \varphi(v_1,\ldots, v_n) \text{ to formuła języka } L \text{ dla } n \in \omega \text{ oraz } i_1 < \ldots < i_n, j_1 < \ldots < j_n\} \cup \{\neg c_{i_1} \equiv c_{i_2} : i_1 \neq i_2\}.$$

Wprowadźmy teraz następującą definicję.[26] Teoria T w języku L ma *wbudowane funkcje Skolema* (ang. *built-in Skolem functions*) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej

[23] Por. S. Buechler, *Essential*..., Definicja 2.4.1.

[24] Por. J. T. Baldwin, *Fundamentals*..., Twierdzenie 3.26; S. Buechler, *Essential*..., Wniosek 2.5.1; A. Kanamori, *The higher*..., Twierdzenie 92.

[25] Por. C. C. Chang oraz H. J. Keisler, *Model*...., Lemat 3.3.9.

[26] Por. C. C. Chang oraz H. J. Keisler, *Model*..., Paragraf 3.3.

formuły $(\exists x)\varphi$ z dokładnie n wolnymi zmiennymi $(x_1,\ldots, x_n)$, istnieje n-arny term $t_{\exists x\varphi}$ języka L taki, że

$$\mathrm{T} \vdash (\forall \overline{y})(\exists x)\varphi(x, \overline{y}) \rightarrow \varphi(t_{\exists x\varphi}(\overline{y}), \overline{y}).$$

Każda teoria T może być rozszerzona do teorii z wbudowanymi funkcjami Skolema. Jeżeli U to model dla T, to rozszerzenie Skolema U^{sk} modelu U może być otrzymane z U przez proste dodanie funkcji, które są definiowalne w U, czyli funkcji, które są interpretacjami termów języka L w U. Dlatego nie ma istotnych różnic między modelem U^{sk} a modelem U. Co więcej, U^{sk} oraz U^{sk} to dokładnie takie same modele, gdy funkcje Skolema modelu U są interpretacjami symboli funkcyjnych języka L, co można założyć. Wprowadźmy teraz pojęcie *zbioru Ehrenfeuchta–Mostowskiego* (w skrócie EM-zbioru) dla ciągu elementów nieodróżnialnych. EM-zbiór dla ciągu elementów nieodróżnialnych to zbiór wszystkich formuł $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$, które są prawdziwe o elementach tego ciągu. Jeżeli dla danego ciągu elementów nieodróżnialnych wyszczególnimy jego EM-zbiór, to w pełni określiliśmy typ tego ciągu, a więc zbiór wszystkich formuł, które są spełnialne przez jego elementy. *Model Ehrenfeuchta–Mostowskiego określa się jako model, którego uniwersum stanowi otoczka Skolema dla zbioru elementów nieodróżnialnych.* Równoważnie, EM-model $H^U(X)$ jest generowany przez zbiór elementów nieodróżnialnych $X \subset A^n$, którego otoczka Skolema $H(X)$ stanowi uniwersum tego EM-modelu. Teraz twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego może być wyrażone w postaci mówiącej, że jeżeli teoria T ma nieskończony model, to dla każdej liczby kardynalnej κ, T ma EM-model.

Stawiamy hipotezę stwierdzającą, że tak samo jak twierdzenia Löwenheima–Skolema oraz twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy odgrywają kluczową rolę w pewnych rozważaniach natury epistemologicznej, tak twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego odgrywa fundamentalną rolę w badaniach typu ontologicznego. Twierdzenie to orzeka *explicite*, że każda teoria wyrażona w języku pierwszego rzędu, jeżeli posiada model nieskończony, to dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ, teoria ta ma model będący otoczką Skolema ciągu elementów nieodróżnialnych o mocy κ. A więc teorie z nieskończonymi modelami generują modele zawierające podzbiory złożone z elementów nieodróżnialnych, przy czym te wyróżnione podzbiory mogą mieć dowolnie duże moce kardynalne. Dlatego można przyjąć, że w naszych badaniach ontologicznych, fakt istnienia EM-modeli stanowi kontrprzykład dla prawa Leibniza, orzekającego, że nie ma dwóch nieidentycznych nieodróżnialnych przedmiotów. Zauważmy, że istnieje głęboki związek między skolemizacją języka teorii pierwszorzędowych, a możliwością istnienia modeli tych teorii, które zawierają elementy nieodróżnialne. To właśnie podatność teorii pierwszego rzędu na proces skolemizacji oraz możliwość konstruowania otoczek Skolema generuje modele, których uniwersa zawierają dowolnie duże podzbiory elementów nieodróżnialnych. Z samego prawa Leibniza można wywnioskować, że pojęcie identyczności, choć jest pojęciem z dziedziny ontologii, to jego określenie jest zrelatywizowane względem naszego języka i naszych zdolności poznawczych. Przypomnijmy, że definicja relacji identyczności zawarta w LL nie jest definicją absolutną, zawiera bowiem w sobie komponent teoriopoznawczy, jak również pragmatyczny. Mianowicie definiując identyczność poprzez relację nieodróżnialności, wprowadzamy element epistemologiczny, gdyż owa nieodróżnialność ma bezpośrednie ufundowanie w zdolnościach kognitywnych poznającego podmiotu. Tym samym ontologiczna relacja identyczności zostaje zdefiniowana poprzez teoriopoznawczą relację nieodróżnialności. Ponieważ zgodnie z prawem Leibniza dwa obiekty a oraz b są identyczne, gdy nie możemy wskazać między nimi żadnej różnicy. Wnioskujemy więc, że orzeczenie identyczności między dwoma przedmiotami (a więc stwierdzenie, że są one jednym i tym samym obiektem mogącym — ewentualnie — występować pod dwoma różnymi *nazwami*) zależy od zasobu środków poznawczych, którymi dysponuje podmiot ową identyczność stwierdzający. Dalej zauważmy, że na poziomie języka pojęcie identyczności jest zrelatywizowane względem liczby predykatów dostępnych w uniwersum dyskursu. Jest to równoważne z faktem, że stwierdzając identyczność dwóch przedmiotów a oraz b poprzez orzeczenie ich nieodróżnialności zakładamy, że każdej własności wyrażalnej w danym języku odpowiada jedna zmienna predykatowa. Tym samym o nieodróżnialności tych dwóch obiektów decyduje liczba dostępnych zmiennych predykatowych. Nie jest wykluczone, że gdy wzbogacimy język dyskursu o nowe zmienne predykatowe, to może mieć miejsce sytuacja, że dla pewnego nowo dodanego predykatu G spełniona będzie formuła $G(a) \wedge \neg G(b)$. Wtedy to za pomocą tej nowej zmiennej predykatowej będzie można dokonać zróżnicowania przedmiotów a oraz b. A więc, w tak wzbogaconym języku będą one odróżnialne, co — w konsekwencji — uniemożliwi stwierdzenie ich identyczności. Istnieją teorie względnej identyczności np. teoria Tadeusza Czeżowskiego, zakładająca, że przebieg zmiennej predykatowej F z prawa Leibniza może być ograniczony do pewnego podzbioru uniwersum dyskursu.[27] Wtedy mówimy o nieodróżnialności dwóch przedmiotów a oraz b ze względu na pewien fragment uniwersum dyskursu. Dwa przedmioty są nieodróżnialne tylko i wyłącznie ze względu na pewien podzbiór własności, które mogą im przysługiwać. Przez tak określone pojęcie względnej nieodróżnialności definiujemy pojęcie względnej identyczności. Powyższe idee mają fundamentalne znaczenie w badaniach nad strukturalizmem matematycznym, właśnie bowiem na gruncie tego prądu metamatematycznego prowadzone są badania nad pojęciami nieodróżnialności oraz identyczności zrelatywizowanymi względem pewnych struktur matematycznych lub ich fragmentów.[28]

---

[27] P. Wilczek, *Ontologia…*, s. 725-738.

[28] J. I. Bermúdez, *Indistinguishable elements and mathematical structuralism*, „Analysis”, 2007 nr 2 (67), s. 112-116; J. Ketland, *Structuralism and the Identity of Indiscernibles*, „Analysis”, 2006 nr 4 (66), s. 303-315.

3. ELEMENTY NIEODRÓŻNIALNE W MODELACH TEORII MNOGOŚCI

W tej części pracy poruszamy się w uniwersum zbiorów konstruowalnych Gödla L. Jest to pewien *wewnętrzny* model teorii mnogości ZF. Klasa zbiorów konstruowalnych składa się tylko z tych zbiorów, które *muszą* istnieć, aby były spełnione aksjomaty ZF. Każdy z jej elementów jest konstruowany (budowany) przy użyciu elementów prostszych. Gödel podał zasady konstrukcji uniwersum L w celu wykazania, że jeżeli teoria ZF jest niesprzeczna, to również ZF z aksjomatem wyboru oraz z hipotezą continuum jest niesprzeczna. Z konstrukcją uniwersum Gödla związany jest aksjomat teorii mnogości zwany *aksjomatem konstruowalności*, orzekający, że każdy zbiór jest zbiorem konstruowalnym, czyli, że $V = L$, gdzie V to ogół zbiorów. Aksjomat ten jest niezależny od pozostałych aksjomatów teorii ZFC.[29] Przy opisie hierarchii zbiorów konstruowalnych przyjmujemy założenie, że zbiór X jest definiowalny nad modelem teorii mnogości $\langle M, \in\rangle$, gdy istnieje formuła $\varphi \in Form$ (gdzie $Form$ to zbiór wszystkich formuł języka teorii mnogości z predykatem $\{\in\}$) oraz pewne $a_1,\ldots, a_n \in M^n$ takie, że $X = \{x \in M : (M, \in) \models \varphi[x, a_1,\ldots, a_n]\}$. Przyjmijmy oznaczenie:

$$\mathrm{def}(M) = \{X \subset M : X \text{ jest zbiorem definiowalnym nad } \langle M, \in\rangle\}$$

Teraz za pomocą indukcji pozaskończonej budujemy uniwersum L:

1. $L_0 = \varnothing$,
2. $L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$,
3. $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ gdy λ to graniczna liczba porządkowa,
4. $L = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha$.[30]

Klasa definiowalna L to klasa zbiorów konstruowalnych. Można wywnioskować z powyższej definicji, że $\langle L_\alpha : \alpha \in Ord\rangle$ (gdzie Ord to klasa wszystkich liczb porządkowych) to hierarchia kumulatywna. Również dla każdej liczby porządkowej α zachodzi, że $\alpha \subset L_\alpha$ oraz $L_\alpha \cap Ord = \alpha$.. L jest modelem teorii ZF. Kluczowe w naszych rozważaniach dotyczących elementów nieodróżnialnych w uniwersum L jest następujące twierdzenie Silvera:

Twierdzenie Silvera: Jeżeli istnieje liczba kardynalna Ramseya to zachodzą następujące warunki:[31]

---

[29] Więcej na temat ontologii zbiorów konstruowalnych oraz zagadnień epistemologicznych związanych z aksjomatem $V = L$ por. P. Maddy, *Realism in mathematics*, Oxford 1992, Clarendon Press, Rozdziały 4 oraz 5; P. Maddy, *Does V equal L*, „Journal of Symbolic Logic”, 1993 (58), s. 15-41; K. Wójtowicz, *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Warszawa 1999, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego; K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Tarnów 2002, Biblos.

[30] Por. T. Jech, *Set....,* Rozdział 13.

[31] *Liczba kardynalna Ramseya* jest określona jako liczba kardynalna taka, że gdy $[\kappa]^{<\omega}$ oznacza

1. jeżeli κ oraz λ to nieprzeliczalne liczby kardynalne takie, że $\kappa < \lambda$ to $(L_\kappa, \in)$ jest elementarnym podmodelem modelu $(L_\lambda, \in)$,

2. istnieje jednoznacznie określona oraz domknięta i nieograniczona klasa liczb porządkowych zawierająca wszystkie nieprzeliczalne liczby kardynalne taka, że dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ zachodzą następujące warunki:[32]

i) $|I \cap \kappa| = \kappa$,

ii) $I \cap \kappa$ to zbiór elementów nieodróżnialnych dla $(L_\kappa, \in)$ oraz

iii) każdy zbiór $\alpha \in L_\kappa$ jest definiowalny w $(L_\kappa, \in)$ z $I \cap \kappa$.[33]

Elementy klasy I to *elementy nieodróżnialne Silvera* (ang. *Silver indiscernibles*).[34] Z zasady odzwierciedlania otrzymujemy, że jeżeli φ to formuła, to istnieje nieprzeliczalna liczba kardynalna κ taka, że

$$L \models \varphi(x_1,\ldots, x_n) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } L_\kappa \models \varphi(x_1,\ldots, x_n)$$

dla wszystkich $x_1,\ldots, x_n \in L_\kappa$.[35] Prawa strona powyższej równoważności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $L_\lambda \models \varphi(x_1,\ldots, x_n)$ dla wszystkich liczb kardynalnych $\lambda \geq \kappa$. Wtedy relację spełniania w L dla wszystkich formuł $\varphi \in Form$ określamy w następujący sposób: jeżeli $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$ to formuła języka $L = \{\in\}$ oraz jeżeli $\langle a_1,\ldots, a_n\rangle$ to n-arny ciąg termowy w L to relacja spełniania $L \models \varphi[a_1,\ldots, a_n]$ dla L ma postać: dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ takiej, że $a_1,\ldots, a_n \in L_k$ zachodzi, że $L_k \models \varphi[a_1,\ldots, a_n]$. Z punktu drugiego twierdzenia Silvera otrzymujemy, że elementy nieodróżnialne Silvera są nieodróżnialne dla L, czyli jeżeli $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$ to formuła, to

$$L \models \varphi[\alpha_1,\ldots, \alpha_n] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } L \models \varphi[\beta_1,\ldots, \beta_n]$$

gdzie $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ oraz $\beta_1,\ldots, \beta_n$ to wstępujące ciągi liczb porządkowych w I. *Każdy zbiór konstruowalny jest definiowalny z I.* Można udowodnić, że gdy $a \in L$, to ist-

zbiór wszystkich skończonych podzbiorów liczby κ; to liczba kardynalna κ taka, że dla każdej funkcji $f : [\kappa]^{<\omega} \to \{0,1\}$ istnieje zbiór A o mocy κ (który jest *homogenny* dla f), to liczba Ramseya. Pojecie, że zbiór A o mocy κ jest homogenny dla f oznacza, że dla każdej n, f jest stała na n-tkach ze zbioru A. Por. T. Jech, *Set*..., Rozdział 9; A. Kanamori, *The higher*..., s. 81.

[32] Jeżeli κ to graniczna liczba porządkowa, to zbiór $C \subseteq \kappa$ jest *domknięty* w κ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $\alpha < \kappa$ jeżeli $\sup(C \cap \kappa) = \alpha$, to $\alpha \in C$. Zbiór $C \subseteq \kappa$ jest *nieograniczony* w κ jeżeli dla każdej liczby kardynalnej $\alpha < \kappa$ istnieje liczba kardynalna $\beta \in C$ taka, że $\alpha < \beta$. Por. T. Jech, *Set*..., Definicja 8.1.

[33] Por. T. Jech, *Set*..., Twierdzenie 18.1; A. Kanamori, *The higher*..., s. 2-3.

[34] Zwane również elementami nieodróżnialnymi w sensie Silvera.

[35] W teorii mnogości *zasady odzwierciedlania* (ang. *reflection principles*) to grupa aksjomatów stwierdzająca, że pewne fragmenty uniwersum teoriomnogościowego *odzwierciedlają* (*„przypominają”*) całe to uniwersum. Istnieje kilka aksjomatów odzwierciedlania. Słabsze są twierdzeniami ZF, mocniejsze natomiast są niezależne od aksjomatów ZF. Ogólny schemat zasad odzwierciedlania ma postać: i) Niech $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ to formuła. Dla każdego M_0 istnieje zbiór $M \supset M_0$ taki, że $\varphi^M(x_1,\ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots, x_n)$ dla wszystkich $x_1,\ldots, x_n \in M$. Wtedy mówimy, że M odzwierciedla formułę φ, ii) Istnieje liczba porządkowa graniczna α taka, że $M_0 \subset V_\alpha$ oraz V_α odzwierciedla formułę φ. Por. T. Jech, *Set*..., Rozdział 12.

nieje wstępujący ciąg $\langle \gamma_1,\ldots, \gamma_n\rangle$ elementów nieodróżnialnych Silvera oraz formuła φ taka, że

$$L \models a \text{ to jedyny zbiór } x \text{ taki, że } \varphi(x, y_1,\ldots, y_n).$$

Zakładamy, że uniwersum zbiorów konstruowalnych jest kanonicznie dobrze uporządkowane.[36] Chcemy określić na modelu $(L_\lambda, \in)$ definiowalne funkcje Skolema. Przyjmujemy, że dla każdej formuły $\varphi(u, v_1,\ldots, v_n)$ istnieje n-arna funkcja h_φ określona w następujący sposób: $h_\varphi(v_1,\ldots, v_n) = u$ gdzie u to najmniejszy ze względu na relację $<_L$ zbiór u taki, że zachodzi następująca formuła $\varphi(u, v_1,\ldots, v_n)$ lub też $h_\varphi(v_1,\ldots, v_n) = \varnothing$ w pozostałych przypadkach. Zachodzi, że dla każdej formuły $\varphi \in$ *Form*, funkcja h_φ to *kanoniczna funkcja Skolema*. Dla każdej granicznej liczby porządkowej λ, $h_\varphi^{L_\lambda}$ to n-arna funkcja na L_λ będąca L_λ-interpretacją funkcji h_φ oraz będąca definiowalną w modelu $(L_\lambda, \in)$. Dla każdej granicznej liczby porządkowej λ, funkcja $h_\varphi^{L_\lambda}$ (dla $\varphi \in$ *Form*) to funkcja Skolema dla $(L_\lambda, \in)$ i dlatego zbiór $M \subset L_\lambda$ to elementarny podmodel modelu $(L_\lambda, \in)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór M jest domknięty ze względu na funkcję $h_\varphi^{L_\lambda}$. Załóżmy teraz, że λ to graniczna liczba porządkowa oraz że $U = \langle A, E\rangle$ to model elementarnie równoważny względem modelu $(L_\lambda, \in)$.[37] Wtedy zbiór Ord^U wszystkich liczb porządkowych modelu U jest liniowo uporządkowany przez relację E. Można przyjąć, że zbiór $I \subset Ord^U$ to zbiór elementów nieodróżnialnych dla U, jeżeli dla każdej formuły φ zachodzi następujący warunek:

$$U \models \varphi[x_1,\ldots, x_n] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } U \models \varphi[y_1,\ldots, y_n]$$

gdzie $x_1 < \ldots < x_n$ oraz $y_1 < \ldots < y_n$ to elementy zbioru I.[38] Dalej, niech h_φ^U oznacza U-interpretację kanonicznych funkcji Skolema. Mając zbiór $X \subset A^n$ oznaczamy przez $H^U(X)$ domknięcie zbioru X ze względu na wszystkie funkcje h_φ^U gdzie $\varphi \in$ *Form*. Wtedy tak określony zbiór $H^U(X)$ to otoczka Skolema zbioru X i zarazem elementarny podmodel modelu U. Jeżeli I to zbiór elementów nieodróżnialnych dla U to $\Sigma(U, I)$ jest zbiorem wszystkich formuł $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$ prawdziwych w modelu U dla wstępujących ciągów elementów zbioru I. Otrzymujemy wtedy następującą równoważność:

---

[36] Na temat kanonicznego dobrego uporządkowania uniwersum L por. T. Jech, *Set*..., Rozdział 13.

[37] Fakt, że te dwa modele są elementarnie równoważne jest konsekwencją *twierdzenia Mostowskiego o kolapsie*. Mówi ono, że jeżeli E to dobrze ufundowana oraz ekstensjonalna relacja na klasie A, to istnieje przechodnia klasa M oraz izomorfizm π między $\langle A, E\rangle$ a $\langle M, \in\rangle$. Przechodnia klasa M oraz izomorfizm są wyznaczone jednoznacznie. Przechodnia klasa M może być fragmentem uniwersum teoriomnogościowego. (Mówimy, że dany zbiór A — lub dana klasa A — są *przechodnie* gdy $x \in A$ oraz $y \in x$, to $y \in A$ lub równoważnie gdy $x \in A$, to $x \subset A$). T. Jech, *Set*..., Twierdzenie 6.15, A. Kanamori, *The higher*..., Lemat 0.4.

[38] Używamy oznaczeń $x_1 < x_2$ zamiast x_1Ex_2.

$\varphi(v_1,\ldots, v_n) \in \Sigma(U, I) \leftrightarrow U \models \varphi[x_1,\ldots, x_n]$ dla pewnych $x_1,\ldots, x_n \in I$ takich, że $x_1 < \ldots < x_n$.

Tak określony zbiór formuł Σ to EM-zbiór dla zbioru nieodróżnialnych liczb porządkowych w modelu U. Formalna definicja tego EM-zbioru jest następująca: zbiór formuł Σ to EM-zbiór, gdy istnieje model U elementarnie równoważny względem pewnego fragmentu uniwersum konstruowalnego L_λ (gdzie λ to graniczna liczba porządkowa) oraz nieskończony zbiór I elementów nieodróżnialnych dla U taki, że $\Sigma = \Sigma(U, I)$. Można udowodnić następujący lemat:

Lemat 5. Jeżeli Σ to EM-zbiór oraz α to nieskończona liczba porządkowa, to istnieje model U oraz zbiór elementów nieodróżnialnych I dla U taki, że:

1. $\Sigma = \Sigma(U, I)$,
2. typ porządkowy zbioru I to α,
3. $U = H^U(I)$

Ponadto, para (U, I) jest jednoznacznie określona z dokładnością do izomorfizmu.

Warunek 3 powyższego lematu wskazuje, że tak określony model U, elementarnie równoważny względem pewnego fragmentu hierarchii konstruowalnej, jest modelem Ehrenfeuchta–Mostowskiego dla zbioru elementów nieodróżnialnych, które utożsamiamy z nieskończonym zbiorem liczb porządkowych. Dla każdego EM-zbioru oraz każdej liczby porządkowej α istnieje jednoznacznie określona para (U, I) (z lematu 2) będąca EM-modelem. Tak zdefiniowany EM-model oznaczamy jako (Σ, α)-model.

4. RÓWNOWAŻNE SFORMUŁOWANIA AKSJOMATU LEIBNIZA–MYCIELSKIEGO ORAZ RÓŻNE JEGO WARIANTY

Jednym z najbardziej dyskutowanych oraz najczęściej badanych w literaturze przedmiotu aksjomatem teorii mnogości jest aksjomat wyboru (AC). Ma on bardzo wiele równoważnych sformułowań, jak również wiele wersji słabszych i mocniejszych od oryginalnie sformułowanej w 1904 roku przez Ernsta Zermelo.[39] Przyjmijmy, że *funkcja wyboru* (ang. *choice function*) to funkcja matematyczna f o dziedzinie X, gdzie X to kolekcja niepustych zbiorów taka, że dla każdego zbioru $S \in X$ zachodzi, że $f(S)$ to element zbioru S, czyli że $f(S) \in S$. Aksjomat wyboru — w swoim pierwotnym sformułowaniu — to następująca asercja:

Aksjomat wyboru (AC): Dla każdej niepustej rodziny zbiorów A, istnieje funkcja wyboru taka, że dla każdego $x \in A$ zachodzi, że $f(x) \in A$.

[39] Na temat AC istnieje bogata literatura. Por. T. Jech, *The axiom of choice*, Amsterdam 1973, North-Holland; P. Howard oraz J. Rubin, *Consequences of the axiom of choice*, Mathematical Surveys and Monographs 59, Providence 1998, The American Mathematical Society; R. Murawski, *Z filozoficznych…*, s. 173-203.

Jedną z równoważnych form aksjomatu wyboru są tak zwane *zasady selekcji Kinny–Wagnera* (ang. *Kinna–Wagner selection principles*). Podstawowa z tych zasad ma postać następującej asercji:

Zasada selekcji Kinny-Wagnera (KW_1): Dla każdej niepustej rodziny zbiorów A, z których każdy ma moc co najmniej 2, istnieje funkcja f taka, że dla każdego zbioru $x \in A$ zachodzi, że $f(x) \subset x$, czyli że $f(x)$ to niepusty właściwy podzbiór zbioru x. Symbolicznie KW_1 ma postać:

$$\forall x \in A\ (|x| \geq 2 \rightarrow \varnothing \neq f(x) \subsetneq x).$$

Powyżej określona funkcja to *funkcja selekcji Kinny–Wagnera* (ang. *Kinna–Wagner selection function*). Z faktu orzekającego, że we wszystkich tak zwanych permutacyjnych modelach teorii mnogości Fraenkla–Mostowskiego zbiór potęgowy zbioru dobrze uporządkowanego może być dobrze uporządkowany, można udowodnić, że zasada selekcji KW_1 jest równoważna następującemu stwierdzeniu (oznaczonemu tu jako KW_2):[40]

KW_2: Każdy zbiór x może być zanurzony w zbiór potęgowy pewnej liczby porządkowej α. Co oznaczamy jako $x \preccurlyeq \wp(\alpha)$.

Można udowodnić, że na gruncie ZF zachodzi następująca równoważność: ZF $\vdash$ $KW_1 \leftrightarrow KW_2$. Powyżej przedstawione formy zasad selekcji Kinny–Wagnera mogą być określone jako *lokalne* wersje tych zasad w przeciwieństwie do wersji *globalnych*, które właśnie w tym miejscu zostaną sformułowane.

[40] *Modele permutacyjne Fraenkla–Mostowskiego* bada się w tzw. teorii mnogości ZF z *urelementami* (inaczej z *atomami*, symbolicznie ZFU lub ZFA). Atomy to obiekty, które nie są zbiorami. Zachodzi, że jeżeli a to atom to nie istnieje $x \in a$ taki, że x to zbiór. Atomy są pewnymi indywiduami, z których za pomocą operacji teoriomnogościowych możemy tworzyć nowe zbiory. Niech U to zbiór atomów oraz $V(U)$ to uniwersum teorii mnogości z atomami definiowane w następujący sposób: $V(U)_0 = U$, $V(U)_{\alpha+1} = P(V(U)_\alpha)$, $P(U)_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V(U)_\alpha$, gdzie λ to graniczna liczba porządkowa oraz $P(U) = \bigcup_{\alpha \in Ord} P(U)_\alpha$. W teorii ZF uniwersum nie ma nietrywialnych automorfizmów. Ważną własnością modeli ZFA jest fakt, że każda permutacja zbioru atomów indukuje automorfizm uniwersum V. Jeżeli π to jedno-jednoznaczne odwzorowanie z U na U (czyli permutacja zbioru U) to dla każdego zbioru x zachodzi (przez $\in$-indukcję), że $\pi\varnothing = \varnothing$ oraz $\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}$. A więc π to $\in$-automorfizm uniwersum. Reasumując, otrzymujemy, że każdą permutację π zbioru atomów U można rozszerzyć do permutacji uniwersum V. Załóżmy, że G to grupa permutacji zbioru atomów U oraz F to filtr na tej grupie. Wtedy dany zbiór $x \in V(U)$ jest symetryczny, gdy następująca grupa permutacji $sym(x) = \{\pi \in G : \pi(x) = x\}$ należy do filtru F. Zakładamy dalej, że wszystkie atomy są symetryczne tj. $sym(a) \in F$ dla wszystkich $a \in U$. Można określić klasę S wszystkich dziedzicznie symetrycznych obiektów: $S = \{x$: każdy $z \in TC(\{x\})$ jest symetryczny$\}$ (porównaj definicje domknięcia przechodniego TC z przyp. 52). Klasa S to model permutacyjny Fraenkla–Mostowskiego (FM). Por. U. Felgner, *Models of ZF-set theory*, Berlin–Heidelberg–New York 1971, Springer Verlag, s. 46-75; P. Howard oraz J. E. Rubin, *Consequences*..., s. 175-221; T. Jech, *Set*..., Rozdział 15.

Globalna zasada selekcji Kinny–Wagnera (GKW$_1$): Istnieje definiowalne (bez parametrów) odwzorowanie F takie, że:

$$\forall x\ (|x| > 1 \rightarrow (\varnothing \neq F(x) \subsetneq x)).$$

Natomiast globalna wersja zasady KW$_2$ ma postać:

GKW$_2$: Istnieje definiowalne (bez parametrów) odwzorowanie G takie, że:[41]

> „Odwzorowanie G jest włożeniem (*„injection”*) uniwersum V w klasę podzbiorów klasy *Ord*”.

Ali Enayat za pomocą *rozszerzonej zasady odzwierciedlania Myhilla–Scotta* (ang. *Extended Reflection Theorem*) dowiódł następującego twierdzenia dotyczącego równoważności między zasadami selekcji Kinny-Wagnera a aksjomatem LM:[42]

Twierdzenie 6. Załóżmy, że M to model dla ZF. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. M spełnia GKW$_1$,
2. M spełnia GKW$_2$,
3. M spełnia aksjomat LM.

D. Pincus wykazał, że zasady selekcji Kinny–Wagnera są równoważne względem następujących zasad: zasady selektywnego gęstego porządku SDO (ang. *selective dense order principle*) oraz zasady selektywnego nieograniczonego porządku (ang. *selective unbounded order principle*) nad aksjomatyką ZF.[43] Zasady te można sformułować w następujący sposób:

Zasada selektywnego gęstego porządku (SDO): Dla każdej niepustej rodziny zbiorów A istnieje funkcja f taka, że dla każdego nieskończonego zbioru $x \in A$ zachodzi, że $f(x)$ to gęsty liniowy porządek na x.

Symbolicznie zasada ta może być przedstawiona w następujący sposób:

> $\forall A \exists f\ \forall x \in A$ (x jest nieskończony $\rightarrow f(x)$ to gęsty liniowy porządek na x).

Zasada selektywnego nieograniczonego porządku (SUO): Dla każdej niepustej rodziny zbiorów A istnieje funkcja f taka, że dla każdego nieskończonego zbioru $x \in A$ zachodzi, że $f(x)$ to liniowy porządek na x bez pierwszego lub ostatniego elementu.

Symbolicznie:

---

[41] Por. przyp. 44.

[42] A. Enayat, *On the Leibniz–Mycielski…*, Twierdzenie 2.1; J. Myhill oraz D. Scott, *Ordinal definability*, [w:] *Axiomatic set theory*, Part I, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, Providence, R. I. 1970, American Mathematical Society, s. 271-278.

[43] D. Pincus, *The dense linear ordering principle*, „Journal of Symbolic Logic”, 1997 (62), s. 438-456.

$\forall A \exists f\ \forall x \in A$ (x jest nieskończony $\rightarrow f(x)$ to liniowy porządek bez pierwszego lub ostatniego elementu określony na x).

Analogicznie jak w przypadku zasad selekcji Kinny-Wagnera powyżej określone zasady można nazwać wersjami *lokalnymi* w przeciwieństwie do wersji *globalnych*, które mają następującą postać:

GSDO: Dla pewnego definiowalnego (bez parametrów) odwzorowania F zachodzi, że dla każdej nieskończonej klasy x, $F(x)$ to gęsty liniowy porządek na x.[44]

GSUO: Dla pewnego definiowalnego (bez parametrów) odwzorowania F zachodzi, że dla każdej nieskończonej klasy x, $F(x)$ liniowy porządek na x bez pierwszego lub ostatniego elementu.

Zachodzi twierdzenie mówiące, że aksjomat LM jest równoważny względem globalnych wersji zasad SDO oraz SUO.[45] Można również sformułować teorioklasową (CLM) wersję aksjomatu LM mającą następującą symboliczną postać:

CLM: $\exists X \forall x \forall y [x \neq y \rightarrow \exists \alpha > \max\{\rho(x), \rho(y)\}\ Th(V_\alpha, \in, X \cap V_\alpha, x) \neq Th(V_\alpha, \in, X \cap V_\alpha, x)]$

gdzie X to klasa właściwa. Zachodzi, że aksjomat CLM jest równoważny teorioklasowym wersjom zasad selekcji Kinny–Wagnera. Zasady te mają postać:[46]

CKW$_1$: $\exists F \forall x\ (|x| \geq 2 \rightarrow \varnothing \neq F(x) \subsetneq x)$ oraz

CKW$_2$: $\exists G$ (G jest włożeniem *(„injection") V* w klasę podzbiorów liczb porządkowych *Ord*).

Powyżej wspomniana równoważność ma miejsce na gruncie systemu klas NBG. Istnieje również *parametryczna* LM(c) wersja aksjomatu Leibniza–Mycielskiego mająca postać:

LM(c): $\forall x \forall y [x \neq y \rightarrow \exists \alpha > \max\{\rho(x), \rho(y), c\}\ Th(V_\alpha, \in, c, x) \neq Th(V_\alpha, \in, c, y)]$.

Podobnie GKW$_1$(c) oraz GKW$_2$(c) oznaczają *parametryczne* wersje globalnych zasad selekcji Kinny–Wagnera obejmujące parametr c. Można wykazać równoważność

---

[44] Odwzorowania, których dziedziną jest *klasa* oznaczamy dużą literą, np. F. Przypomnijmy, że *klasa właściwa* to klasa niebędąca zbiorem. W zależności od kontekstu metateoretycznego teoria mnogości może dotyczyć klas tylko jako pewnego rodzaju nieformalnych obiektów — metajęzykowych klas równoważności pewnych formuł logicznych. Tak jest na przykład w teorii mnogości Zermelo–Fraenkela (ZF). Natomiast w teorii mnogości von Neumanna–Bernaysa–Gödla (NBG) klasy są właściwym obiektem badań. W tym przypadku zbiór to klasa będąca elementem innej klasy. Bez względu jaką aksjomatykę przyjmiemy, każdy zbiór jest klasą, ale nie każda klasa jest zbiorem, ponieważ formuła $x \in y$ ma sens wtedy i tylko wtedy gdy x jest zbiorem. Por. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel oraz A. Levy, *Foundations…*, s. 119-153.

[45] A. Enayat, *On the Leibniz–Mycielski…*, Uwaga 2.2.a.

[46] Tamże, Uwaga 2.2.d. Por. przyp. 42.

parametrycznej wersji aksjomatu Leibniza–Mycielskiego z $GKW_1(c)$ oraz $GKW_2(c)$. Rozpatrzmy również wzmocnienie aksjomatu LM, czyli jego *mocną* wersję (LM*) mającą postać następującej asercji:

LM*: Istnieje formuła $\varphi(x)$ taka, że dla każdej pary różnych zbiorów a oraz b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a oraz b taka, że $(V_\alpha, \in)$ spełnia $\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$.

Dzięki tak sformułowanej wersji aksjomatu LM można udowodnić następujące twierdzenie mające ważne implikacje ontologiczne:[47]

Twierdzenie (Solovay): Istnieje formuła $\varphi(x)$ w języku teorii mnogości mająca dokładnie wskazane zmienne wolne taka, że na gruncie ZF można udowodnić następującą asercję: jeżeli α to liczba porządkowa oraz $\phi(x)$ to formuła języka teorii mnogości z jedną zmienną wolną x, to istnieje liczba porządkowa $\beta > \alpha$ taka, że dla każdego zbioru $x \in V_\beta$ zachodzi następujący warunek:

$$[V_\beta \models \varphi(x)] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } [x \in V \text{ oraz } V_\alpha \models \phi(x)].$$

Do tej pory pracowaliśmy w środowisku pierwszorzędowych teorii modeli o postaci (V_α, α, a). Fakt ten skłania do podjęcia badań nad aksjomatami o postaci LM_L, gdzie L to rozszerzenie pierwszorzędowej logiki $L_{\omega,\omega}$. Tymi rozszerzeniami mogą być na przykład różne logiki drugiego rzędu, logiki infinitarne, logiki z kwantyfikatorami rozgałęzionymi „*istnieje* κ*-wiele*”. Przeformułowanie aksjomatu LM do postaci LM_L ma postać:[48]

LM_L: Dla każdej pary różnych zbiorów a i b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a i b oraz formuła $\varphi(v)$ w logice L taka, że $(V_\alpha, \in)$ spełnia $\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$.

Przy tak sformułowanym aksjomacie LM_L musimy założyć następujący warunek dotyczący spełnialności odpowiednich L-formuł.

(*) Załóżmy, że $\varphi(x)$ to L-formuła. Wtedy $\{(\alpha, \varphi(x), a) : (V_\alpha, \in, a) \models \varphi(a)\}$ to bezparametrycznie definiowalna klasa w $(V, \in)$.

W rezultacie otrzymujemy następujący wniosek:[49]

Wniosek 7. Załóżmy, że logika będąca rozszerzeniem logiki $L_{\omega,\omega}$ spełnia warunek (*) oraz że jej formuły są porządkowo definiowalne. Wtedy zachodzi następujący warunek: $ZF \vdash LM_L \leftrightarrow LM$.[50]

---

[47] Tamże, Twierdzenie 4.1.1.

[48] Tamże, Paragraf 4.2.

[49] Tamże, Stwierdzenie 4.2.1.

[50] Zbiór jest *porządkowo definiowalny* (ang. *ordinal definable*), gdy istnieje formuła φ taka, że $X = \{u : \varphi(u, \alpha_1,\dots, \alpha_n)\}$ dla pewnych liczb porządkowych $\alpha_1,\dots, \alpha_n$. Nieformalnie mówiąc, zbiór jest porządkowo definiowalny, gdy może być określony przez pierwszorzędową formułę ze skończoną

Reasumując, można stwierdzić, że aksjomaty LM oraz LM_L są równoważne nad ZF dla wielu rozszerzeń logiki $L_{\omega,\omega}$. Zachodzi to na przykład dla logik drugorzędowych, logik n-rzędowych lub nawet dla logiki $(L_{\infty,\omega})^{HOD}$, czyli pełnej logiki infinitarnej w sensie HOD. Ale gdy formuły danej logiki L leżą poza OD, to aksjomat LM_L jest słabszy niż aksjomat Leibniza–Mycielskiego. Innym aksjomatem pokrewnym względem pewnika LM jest tzw. *słaby* aksjomat LM (WLM), gdzie rolę unarnych formuł odgrywają formuły binarne. Aksjomat ten można sformułować następująco:

WLM: Dla każdej pary różnych zbiorów a oraz b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a i b oraz formuła $\varphi(u, v)$ taka, że $(V_\alpha, \in)$ spełnia $\neg(\varphi(a, b) \leftrightarrow \varphi(b, a))$.

Podobnie jak aksjomat LM tak też aksjomat WLM może być sformułowany jako zasada wyboru. Mianowicie zostało udowodnione następujące twierdzenie:[51]

Twierdzenie 8. Załóżmy, że M to model dla ZF. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. dla pewnej definiowalnej (bez parametrów) funkcji F zachodzi, że $M \vDash$ „F to funkcja wyboru na klasie par zbiorów”,
2. $M \vDash$ WLM.

Istnieją również konstruowalne warianty aksjomatów LM oraz WLM, w których uniwersum von Neumanna V_α jest zastąpione przez konstruowalne modele o postaci $L_\alpha[A]$, gdzie A to zbiór przechodni.[52,53] Tymi aksjomatami są:

liczbą parametrów w postaci liczb porządkowych. Formuła $\varphi(x, \alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ jest *porządkowo definiowalna*, gdy $\alpha_1,\ldots, \alpha_n \in Ord$ to parametry oraz istnieje *dokładnie jeden* zbiór u taki, że $\vDash \varphi(u, \alpha_1,\ldots, \alpha_n)$. Por. T. Jech, *Set*..., s. 194.

[51] Por. A. Enayat, *On the Leibniz–Mycielski*..., Twierdzenie 4.3.1.

[52] Tamże, Paragraf 4.4.

[53] Mówimy tu o hierarchii zbiorów konstruowalnych względem danego zbioru A. Istnieją dwa różne sposoby określania hierarchii zbiorów konstruowalnych względem danego zbioru. Pierwszy sposób pochodzi od Lévy'ego i w wyniku tego procesu powstaje wewnętrzny model o postaci $L[A]$. Relatywizujemy hierarchię L_α za pomocą następującej generalizacji: $def_A(M) = \{X \subset M : X$ jest definiowalny nad $(M, \in, A \cap M)\}$, gdzie $A \cap M$ to unarny predykat. Klasa zbiorów konstruowalnych ze zbioru A jest określona przez indukcję: $L_0[A] = \varnothing$, $L_{\alpha+1}[A] = def_A(L_\alpha[A])$, $L_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[A]$ gdy λ to graniczna liczba porządkowa oraz $L[A] = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha[A]$. Jeżeli A to dowolny zbiór, to $L[A]$ jest modelem dla ZFC. $L[A]$ spełnia aksjomat mówiący, że istnieje zbiór X taki, że $V = L[X]$. Jeżeli M to wewnętrzny model dla ZF taki, że $A \cap M \in M$, to $L[A] \subset M$. Druga z metod relatywizacji hierarchii konstruowalnej Gödla pochodzi od Hajnala i ma postać: $L_0(A) = TC(\{A\})$, $L_{\alpha+1}(A) = def(L_\alpha(A))$, $L_\lambda(A) = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha(A)$, gdy λ to graniczna liczba porządkowa oraz $L_\lambda(A) = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha(A)$. Przechodnia klasa $L(A)$ to wewnętrzny model dla ZF, zawiera ona zbiór A oraz jest najmniejszym takim modelem. Por. definicję domknięcia przechodniego z przyp. 54. Na temat konstruowalności patrz: T. Jech, *Set*..., Rozdział 13.

Aksjomat Leibniza–Gödla (LG): Dla każdej pary różnych zbiorów a oraz b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a i b oraz formuła $\varphi(u, v)$ taka, że $(L_\alpha[A], \in)$ spełnia $\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$, gdzie A to przechodnie domknięcie pary $\{a, b\}$.

Słaby aksjomat Leibniza–Gödla (WLG): Dla każdej pary różnych zbiorów a oraz b istnieje liczba porządkowa α większa od rangi zbiorów a i b oraz formuła $\varphi(u, v)$ taka, że $(L_\alpha[A], \in)$ spełnia $\neg(\varphi(a, b) \leftrightarrow \varphi(b, a))$, gdzie A to przechodnie domknięcie pary $\{a, b\}$.[54]

Można udowodnić, że aksjomat $V = L$ pociąga aksjomat LG, ale pewnik LG jest słabszy niż $V = L$. Przypomnijmy, że zgodnie z aksjomatem wyróżniania, jeżeli $\varphi(x)$ to formuła, to dla każdego zbioru X istnieje zbiór $Y = \{u \in X : \varphi(u)\}$.[55] Dla pewnego zbioru formuł (tzw. formuł Δ_0) konstrukcja zbioru Y z X może być opisana przez skończoną liczbę elementarnych operacji.[56] Gödel dowiódł twierdzenia mówiącego, że istnieją operacje $G_1, \ldots, G_{10}$ takie, że jeżeli $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ to Δ_0-formuła, to istnieje złożenie G powyższych operacji takie, że dla wszystkich zbiorów $X_1, \ldots, X_n$ zachodzi następujący warunek:

$$G(X_1, \ldots, X_n) = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1, \ldots, u_n \in X_n \text{ oraz } \varphi(u_1, \ldots, u_n)\}.$$[57]

---

[54] *Domknięcie przechodnie* (ang. *transitive closure*) zbioru X to najmniejszy (ze względu na inkluzję) przechodni zbiór zawierający zbiór X. Dla każdego zbioru X istnieje zbiór przechodni zawierający X. Każdy zbiór przechodni spełnia $\bigcup X \subset X$. Oznaczając domknięcie przechodnie zbioru X przez $TC(X)$, otrzymujemy następującą definicję: $TC(X) = \bigcap\{Z : Z \supset X\}$, gdzie Z to zbiór przechodni. Intuicyjnie — domknięcie przechodnie zbioru X składa się z wszystkich elementów zbioru X, elementów elementów zbioru X, elementów…elementów zbioru X itd.

[55] *Aksjomat wyróżniania* (inaczej *aksjomat podzbiorów*, *aksjomat wycinania*) to jeden z aksjomatów teorii mnogości ZF. W istocie nie jest to jeden aksjomat, ale schemat aksjomatów. Stwierdza on, że dla każdej formuły w języku teorii mnogości zawierającej zmienne wolne $x, w_1, \ldots, w_n, A$ zachodzi następujący warunek: $\forall w_1, \ldots, w_n \forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow [x \in A \wedge \varphi(x, w_1, \ldots, w_n, A)])$, czyli dla każdego zbioru A istnieje podzbiór B taki, że dla każdego zbioru x, zachodzi, że x jest elementem podzbioru B wtedy i tylko wtedy, gdy x spełnia formułę φ (i oczywiście tym samym jest elementem zbioru A). Aksjomat wyróżniania jest wyprowadzalny z aksjomatu zbioru pustego (orzekającego istnienie zbioru pustego) oraz z aksjomatu zastępowania. Por. T. Jech, *Set*..., s. 7; R. Murawski, *Z filozoficznych*..., s. 173-203.

[56] Pojęcia definiowalne mogą być klasyfikowane według następującej hierarchii formuł wprowadzonej przez Lévy'ego. Formuła jest Σ_0 formułą oraz Π_0 formułą, gdy jej jedyne kwantyfikatory są ograniczone. Wtedy jest Δ_0 formułą. Indukcyjnie, formuła jest Σ_{n+1} formułą, gdy ma postać $\exists x \varphi$ gdzie φ to Π_n formuła oraz jest Π_{n+1} formułą , gdy ma postać $\forall x \varphi$, gdzie φ to Σ_n formuła. Mówimy, że dana własność (klasa, relacja) jest typu Σ_n (lub Π_n) własnością (klasą, relacją), gdy może być wyrażona przez Σ_n (lub Π_n) formułę. Funkcja F jest typu Σ_n (lub Π_n), gdy relacja $y = F(x)$ jest Σ_n (lub Π_n). T. Jech, *Set*..., Rozdział 13.

[57] Obecnie twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia Gödla o postaci normalnej* (ang. *Gödel's Normal Form Theorem*). T. Jech, *Set*..., Twierdzenie 13.4.

Operacje $G_1, \ldots, G_{10}$ z powyższego twierdzenia noszą nazwę *operacji Gödlowskich*.[58] Załóżmy, że X to zbiór. Wtedy $cl(X)$ to domknięcie zbioru X ze względu na operacje Gödlowskie. Teraz można określić klasę *OD wszystkich porządkowo definiowalnych zbiorów* w następujący sposób:[59]

$$\mathrm{OD} = \bigcup_{\alpha \in Ord} cl\{V_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Otrzymujemy więc, że klasa *OD* to *domknięcie Gödla* struktur $\{V_\alpha : \alpha \in Ord\}$, czyli porządkowo definiowalne zbiory są konstruowalne z V_α dzięki operacjom Gödlowskim. Elementy klasy *OD* to dokładnie zbiory definiowalne porządkowo. A więc dla każdego zbioru $X \in OD$ istnieje liczba porządkowa $\alpha \in Ord$ taka, że zbiór X ma postać $X = \{u : \varphi(u, \alpha)\}$ gdzie $\varphi(u, \alpha)$ to formuła oraz $u \in F(\alpha)$.[60] Klasa *OD* nie musi być przechodnia oraz nie musi być modelem dla ZFC, ponieważ nie musi spełniać aksjomatu ekstensjonalności. Zbiór nazywamy *dziedzicznie porządkowo definiowalnym* (ang. *hereditarily ordinal definable*), gdy jest on porządkowo definiowalny oraz wszystkie elementy jego przechodniego domknięcia są porządkowo definiowalne. Klasa dziedzicznie definiowalnych zbiorów jest oznaczona przez *HOD*. Jest ona przechodnim modelem dla ZFC z definiowalnym dobrym porządkiem. Jest niesprzeczne z aksjomatami teorii mnogości, że wszystkie zbiory są porządkowo definiowalne, a wiec dziedzicznie porządkowo definiowalne. Te asercje mogą być uznane za dodatkowe aksjomaty teorii mnogości i mają one postać $V = OD$ oraz $V = HOD$.[61] Przy założeniu aksjomatu $V = OD$ uniwersum wszystkich zbiorów V może być globalnie dobrze uporządkowane, a więc istnieje definiowalne włożenie (ang. *injection*) uniwersum w klasę singletonów liczb porządkowych.[62] Dlatego też aksjomatyka teorii mnogości ZF z dodatkowym aksjomatem stwierdzającym, że wszystkie zbiory są porządkowo definiowalne, implikuje aksjomat Leibniza–Mycielskiego. Zachodzi więc, że

---

[58] Operacje te mają postać: $G_1(X, Y) = \{X, Y\}$, $G_2(X, Y) = X \times Y$, $G_3(X, Y) = \varepsilon(X, Y) = \{(u, v) : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$, $G_4(X, Y) = X - Y$, $G_5(X, Y) = X \cap Y$, $G_6(X) = \bigcup X$, $G_7(X) = dom(X)$, $G_8(X,) = \{(u, v) : (u, v) \in X\}$, $G_9(X,) = \{(u, v, w) : (u, w, v) \in X\}$, $G_{10}(X,) = \{(u, v, w) : (v, w, u) \in X\}$. Por. T. Jech, *Set*..., Rozdział 13.

[59] Por. definicję zbiorów porządkowo definiowalnych z przyp. 50.

[60] Pamiętając, że z aksjomatów teorii mnogości można wyprowadzić twierdzenie o postaci $\forall x \exists \alpha [x \in V_\alpha]$ mówiące, że dla każdego zbioru x istnieje liczba porządkowa α taka, że zbiór x należy do fragmentu uniwersum mnogościowego o postaci V_α, zakładamy, że dla modeli o postaci $\langle V_\alpha, \in\rangle$ oznaczamy przez D_α zbiór elementów z V_α, które mogą być określone przez unarne formuły z modelu $\langle V_\alpha, \in\rangle$. Wtedy — intuicyjnie — klasa *OD* jest określona w następujący sposób: $OD = \bigcup_{\alpha \in Ord} D_\alpha$. Por. T. Jech, *Set*..., Rozdział 13.

[61] K. Kunen, *Set theory. An introduction to idependence proofs*, Studies In Logic and the Foundations of Mathematics 102, Amsterdam — New York — Oxford 1980, North-Holland Publishing Company, s. 152-163.

[62] Tamże, s. 152-163.

$$\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = OD \vdash \mathrm{LM}.$$

Można wysnuć przypuszczenie, że powyższa implikacja ma ważne konsekwencje metateoretyczne, epistemologiczne jak również ontologiczne. Ponieważ zakładając, że wszystkie zbiory w uniwersum ZF są porządkowo definiowalne, czyli akceptując aksjomat $V = OD$ jako dodatkowy pewnik teorii mnogości, przyjmujemy zarazem mocne założenia stwierdzające na przykład, że i) istnieje binarna formuła $\varphi(x, y)$, która dobrze porządkuje uniwersum wszystkich zbiorów V, ii) definiowalne elementy każdego modelu M teorii mnogości tworzą elementarny podmodel modelu M oraz iii) obowiązuje aksjomat regularności.[63,64] Dalej, można stwierdzić, że porządkowa definiowalność wszystkich zbiorów w uniwersum matematycznym implikuje fakt orzekający, że nie istnieją dwa nieodróżnialne nieidentyczne zbiory w tym uniwersum. Definiowalność jest pojęciem o charakterze metalogiczno-epistemologicznym ale ma fundamentalne znaczenie w badaniach ontologicznych nad identycznością i nieodróżnialnością obiektów w uniwersum czystej matematyki. Tak jak w części drugiej pracy postawiliśmy hipotezę mówiącą, że skolemizacja języka oraz teoriomodelowe twierdzenie Ehrenfeuchta–Mostowskiego, którego wyprowadzalność ona umożliwia, odgrywają w badaniach ontologicznych porównywalną rolę jak twierdzenia Löwenheima–Skolema oraz Tarskiego o niedefiniowalności prawdy w badaniach epistemologicznych, tak w tym miejscu można zaryzykować stwierdzenie mówiące, że aksjomat orzekający, że każdy zbiór jest porządkowo definiowalny ma podstawowe i dalekosiężne implikacje w dziedzinie badań ontologicznych nad uniwersum teoriomnogościowym. Jak zauważa J. Mycielski — nigdy w matematyce nie potrzebujemy zbiorów, które nie są porządkowo definiowalne, a więc spoza klasy OD (chociaż można założyć istnienie zbioru nienależącego do klasy OD, to jego odkrycie na pewno nie prowadziłoby do żadnej ciekawej matematyki),[65] czyli, że jeżeli istnieje jakiś zbiór to należy on do klasy OD, a więc — co stanowi implikację aksjomatu OD na gruncie ZF — obowiązuje względem niego prawo Leibniza. Każdy zbiór w klasie OD jest odróżnialny od innych. W uniwersum OD nie mogą istnieć dwa zbiory różniące się tylko i wyłącznie numerycznie. Reasumując powyższe rozważania stwierdzamy, że dzięki metalogice oraz epistemologii otrzymujemy dowody na pewne fakty z dziedziny ontologii.

[63] *Aksjomat regularności* to jeden z aksjomatów teorii mnogości, nazywający się również *aksjomatem dobrego ufundowania*, mający postać: $\forall x[x \neq \varnothing \rightarrow \exists y[y \in x \wedge \forall z[z \in y \rightarrow z \notin x]]]$. Został on wprowadzony przez Mirimanoffa (w 1917 roku) oraz przez von Neumanna (w 1925 roku) i orzeka, że każdy zbiór x zawiera element z rozłączny ze zbiorem x. Na podstawie tego aksjomatu można dowieść, że żaden zbiór nie jest swoim własnym elementem oraz że nie istnieje nieskończony ciąg (a_i) taki, że a_{i+1} jest elementem a_i dla wszystkich i. A więc, zakładając aksjomat regularności dowodzimy, że nie istnieją nieskończone zstępujące ciągi. Por. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel oraz A. Levy, *Foundations*..., s. 86-102; R. Murawski, *Z filozoficznych*..., s. 173-203.

[64] J. Mycielski, *A system of axioms of set theory for the rationalists*, „Notices of the American Mathematical Society", 2006 nr 2 (53), s. 206-213.

[65] J. Mycielski, *The axiom*..., s. 208.

5. ZAKOŃCZENIE

Na zakończenie zaznaczmy, że rozważania podjęte w tym artykule stanowią wstęp do badań nad zagadnieniem identyczności i nieodróżnialności w uniwersum matematycznym. Dotychczasowe prace nad tymi zagadnieniami skupiały się głównie na dziedzinie czystej logiki i nie miały one prostego przełożenia na uniwersum teoriomnogościowe lub jego fragmenty (oraz ich modele).[66] W powyższej pracy zarysowaliśmy pewne koncepcje pozwalające na wysnucie wniosków dotyczących stosowalności prawa Leibniza względem uniwersum V (oraz jego fragmentów V_α) lub wewnętrznych modeli tych dziedzin. Nie omawialiśmy kwestii ważności LL w rozszerzeniach forcingowych modeli teorii mnogości. Podane zostały najważniejsze implikacje natury ontologicznej wypływające z aksjomatu Leibniza–Mycielskiego.[67] Postawiliśmy hipotezę mówiącą, że podatność języka teorii mnogości na skolemizację oraz obowiązywalność teoriomodelowego prawa Ehrenfeuchta–Mostowskiego względem modeli teorii mnogości, będąca rezultatem tej podatności, mają swoje ontologiczne implikacje, mianowicie pozwalają na konstruowanie modeli z dowolnie dużymi zbiorami elementów nieodróżnialnych. Natomiast przyjęcie dodatkowego aksjomatu stwierdzającego, że wszystkie zbiory są porządkowo definiowalne (V = OD) pozwala na aksjomatyczne określenie identyczności w postaci aksjomatu Leibniza–Mycielskiego. Pozostaje kwestią otwartą stosunek tak określonej identyczności do definiowalnej relacji tożsamości w dziedzinie logik pierwszego rzędu. Również zaznaczmy tutaj, że trwają badania nad teoriomodelową charakteryzacją aksjomatu LM jak też jego stosowalnością w teorii modeli. W tym miejscu zaznaczmy tylko, że istnieją systemy aksjomatyczne teorii mnogości z negacją prawa Leibniza. Są to *systemy anty-Leibnizjańskie*.[68] Wszystkie one charakteryzują się tym, że za jedno ze swoich twierdzeń przyjmują zdanie „*istnieje właściwa klasa elementów nieodróżnialnych*". Oznaczmy przez ZFC(I) teorię w języku $\{\in, I(x)\}$, gdzie $I(x)$ to unarny predykat oznaczający elementy nieodróżnialne, której aksjomatami są poniższe twierdzenia:

1. ZFC plus wszystkie podstawienia aksjomatu zastępowania w języku $\{\in, I(x)\}$,
2. I to kofinalna podklasa klasy *Ord*: $(I \subseteq Ord) \wedge \forall x \in \mathrm{Ord}\, \exists y \in Ord(x \in y \in I)$,
3. dla każdej n-arnej formuły $\varphi(v_1,\ldots, v_n)$ w języku $\{\in\}$ zachodzi następujący warunek: $\forall x_1,\ldots, x_n\, \forall y_1,\ldots, y_n$ z I $\varphi(x_1,\ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(y_1,\ldots, y_n)$.

[66] J. Zygmunt oraz J. Hawranek, *O identyczności logicznej*, [w:] *Skłonność metafizyczna*, red. M. Omyła, Warszawa 1997, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, s. 193-203.

[67] Por. P. Wilczek, *Large cardinals, models of set theory and Leibniz Law*, [w:] *Volume of Abstracts*, 6th European Congress of Analytic Philosophy, red. V. Kukushkina oraz K. Kijania-Placek, Kraków 2008.

[68] A. Enayat, *Set theory and indiscernibles*, IPM Logic Conference 2007, adres internetowy: http://academic2.american.edu/~enayat/Slides%20of%20Talks/Indiscernibles.pdf

Iterując operację dodawania elementów nieodróżnialnych poprzez wprowadzenie skończenie wielu lub przeliczalnie wielu nowych unarnych predykatów nieodróżnialności otrzymujemy odpowiednio systemy aksjomatyczne oznaczane jako $\mathrm{ZFC}(\mathrm{I}^{<\omega})$ oraz $\mathrm{ZFC}(\mathrm{I}^{\omega})$. Są to teorie w języku $\{\in\} \cup \{I_n(x) : n \in \omega\}$, gdzie I_n to unarne nowe predykaty, rozszerzające aksjomatykę ZFC(I), której twierdzenia podstawowe mają postać następujących warunków:

1. ZFC plus wszystkie podstawienia aksjomatu zastępowania w języku $\{\in\} \cup \{I_n(x) : n \in \omega\}$,
2. I_n to kofinalna podklasa klasy *Ord*,
3. I_0 to klasa elementów nieodróżnialnych dla $\langle V, \in \rangle$ oraz dla $n \geq 0$, I_{n+1} to klasa elementów nieodróżnialnych dla struktury $\langle V, \in, I_0, \ldots, I_n \rangle$.

Metateoria systemów anty-Leibnizjańskich jest mało znana i dlatego wymaga gruntownych badań.