Filozofia Nauki
Rok XVI, 2008, Nr 2(62)

Elżbieta Kałuszyńska

Język a rzeczywistość matematyczna
Performatywna funkcja języka

1. Na czym polega performatywna funkcja języka? „Nazwa ta [performatyw] pochodzi […] od angielskiego '*perform*' — wyjaśnia Austin[1] — czasownika, który występuje zazwyczaj z rzeczownikiem oznaczającym czynność — wskazuje ona, że *wygłoszenie wypowiedzi jest wykonaniem jakiejś czynności, jest czymś, o czym nie myśli się normalnie jako tylko o powiedzeniu czegoś.*" Swobodnie mówiąc, chodzi tu o sprawczą funkcję języka, o tkwiące w nim moce przyczynowe, o możliwość działania za pomocą słów. A możliwości te są różnorodne. Teoria chaosu deterministycznego dopuszcza możliwość, iż gwałtowny huragan może być skutkiem trzepotania skrzydeł motyla w miejscu odległym o tysiące mil. Wolno więc przypuszczać, że podobny efekt może wywołać fala dźwiękowa cichego wyznania *I love you*, a wykrzyczane *I hate you* będzie skutkować niszczycielskim tornado. Fizycznych aspektów wypowiadanych (czy napisanych) słów nie będę tu jednak rozważać. Nie podejmę również bardzo ważnej kwestii *ustawiania neuronów za pomocą słów*. Tym prześmiewczym zwrotem — polemizując z filozofami języka i filozofami umysłu — określa Tadeusz Skalski[2] sytuację, gdy okrzyk *pali się* powoduje („ustawia" neurony w mózgach w ten sposób), że ludzie znajdujący się w zasięgu jego „rażenia" rzucają się już do ucieczki, już to do gaszenia ognia. Będą mnie tu interesować takie wypowiedzi, które *powołują do istnienia*, tworzą (stwarzają) rzeczywistość.

Jeśli wierzyć poecie (i nie tylko poecie), pierwsze użycie języka miało właśnie charakter performatywny. Świat powstał, kiedy: *Bóg wyrzekł słowo* ***stań się***. Taką też funkcję będą pełnić słowa ostatnie, gdy: *Bóg i* ***zgiń*** *wyrzecze*. Tutaj jednak rzecz bę-

[1] *Jak działać słowami*, [w:] John L. Austin, *Mówienie i poznawanie*, przeł. B. Chwedeńczuk, Warszawa 1993, PWN.

[2] Tadeusz Skalski, *Sprawcza funkcja języka*, Łódź 2002, Wydawnictwo UŁ.

dzie o kreatywności ludzkiego, a nie boskiego języka. Można spojrzeć z tego punktu widzenia na różne typy rzeczywistości — matematyczną, przyrodniczą, społeczną, rzeczywistość dzieła literackiego i inne. W tym artykule ograniczę się do rzeczywistości matematycznej.

Rzeczywistość matematyczna zdaje się zawdzięczać swe istnienie wyłącznie (s)twórczemu **NIECH … BĘDZIE** matematyków. W otwartej na chybił trafił pracy z zakresu matematyki znajdziemy sformułowania typu: *Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach będących liczbami wymiernymi spełniających warunek zbieżności Cauchy'ego*.[3] Każda taka wypowiedź, jeśli nie jest sprzeczna, powołuje do istnienia jakiś obiekt matematyczny. One to, wraz z całą siecią wzajemnych powiązań — już odkrytych bądź czekających na odkrycie — tworzą matematyczną rzeczywistość. Jest to rzeczywistość przebogata, zwarta dzięki współzależności różnego typu bytów matematycznych, niewyczerpalna, ciągle zaskakująca matematyków nowymi własnościami, możliwościami uogólnień i powiązań, otwierających nowe pola badawcze. Jest to przy tym rzeczywistość sztywna. Nie ma tu przygodności; i fakty, i prawa (twierdzenia) mają walor konieczności. To tutaj można posługiwać się precyzyjnym pojęciem prawdy[4] i dopiero ostatnio, w dobie komputerowych dowodów twierdzeń powstaje pytanie, czy twierdzenia matematyki mogą być prawdziwe nie w absolutnym, lecz tylko w przybliżonym sensie.

2. Naturalnie, platonicy będą protestowali przeciwko tezie, iż świat matematyki jest tworzony słowami matematyków. Sądzą oni, że rzeczywistość matematyczna istnieje obiektywnie, choć sposób jej istnienia pozostaje niejasny. W każdym razie, rzeczywistość ta ma istnieć niezależnie od matematyków, którzy ją jedynie odkrywają. To pogląd np. Rogera Penrose'a, który wskazując zbiór Mandelbrota, stwierdza:

> nikt, nawet sam Benoit Mandelbrot, gdy pierwszy raz dostrzegł niewiarygodną złożoność detali tego zbioru, nie przeczuwał, jakie bogactwo w sobie zawiera. Z całą pewnością zbiór Mandelbrota nie został wymyślony przez człowieka. Zbiór ten należy w sposób obiektywny do samej matematyki. Jeśli w ogóle ma sens mówienie o istnieniu zbioru Mandelbrota, to nie jest on jakąś formą istnienia w naszych umysłach, ponieważ nikt nie jest w stanie zdać sobie sprawy z jego nieskończonej różnorodności i nieograniczonej komplikacji. To istnienie nie może też być przypisane zbiorowi wydruków komputerowych, które próbują przedstawić niewyobrażalną wymyślność jego szczegółów […] Jednak jego istnienie nie ulega wątpliwości, ponieważ gdy dokładniej go badamy, odnajdujemy tę samą strukturę we wszystkich jej zauważalnych detalach, tylko z coraz większą precyzją szczegółu, i jest to niezależne od matematyka czy od komputera, za pomocą którego go badamy. Może to być tylko istnienie w platońskim świecie idei matematycznych.[5]

---

[3] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1968, PWN, s. 90.

[4] Zawdzięczamy je Alfredowi Tarskiemu. Por. *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933), [w:] *Alfred Tarski*, Jan Zygmunt [red.], Warszawa 1995, PWN, s. 13-172.

[5] Roger Penrose, *Droga do rzeczywistości*, Warszawa 2007, Prószyński i S-ka, s. 15-16.

Jak widać, platonizm Penrose'a wspiera się na dwóch argumentach: (i) konstrukcje matematyczne są tak bogate, że nie mogą w żaden sposób istnieć w naszych umysłach, (ii) mogą być one obiektywnie badane i ujawniać bogatą, nieprzeczuwalną wcześniej strukturę. Nie są to argumenty zniewalające. Zauważmy bowiem, że zbiór Mandelbrota, choć tak skomplikowany, zadany jest za pomocą bardzo prostej transformacji punktu na płaszczyźnie zespolonej Wessela:

$$z \mapsto z^2 + c,$$

gdzie c jest pewną wybraną, ustaloną liczbą zespoloną. Po ustaleniu c możemy śledzić drogę pewnego punktu z (np. z=0) wyznaczoną tą transformacją. W zależności od c albo punkt ten oddala się od środka układu (sekwencja nieograniczona), albo pozostaje stale wewnątrz koła o środku w początku układu współrzędnych (sekwencja ograniczona). Zbiór Mandelbrota tworzą te punkty c, które prowadzą do sekwencji ograniczonych.[6]

Nikt oczywiście nie ma „w umyśle" zbioru Mandelbrota, choć z łatwością „pomieści" regułę wyznaczającą transformację. Podobnie, jak nikt nie ma „w umyśle" wszystkich partii czy problemów szachowych, choć reguły gry w szachy są proste. Tak samo jest z wielu innymi grami, badanymi skrupulatnie przez teoretyków (często matematyków), którym udaje się odkrywać obiektywne fakty i prawidłowości w przebiegu tych gier. Nikt jednak nie upiera się przy twierdzeniu o istnieniu „platońskiego świata gier". Ich konwencjonalny charakter nie budzi raczej wątpliwości. Tak więc obiektywne badanie wykreowanej rzeczywistości, dokonywanie zaskakujących odkryć nie tylko jest możliwe, ale jest faktem. Michał Heller żartobliwie zauważa, że: „równania są mądrzejsze od tych, którzy je napisali". Oba więc argumenty Penrose'a wydają się bezzasadne; na ich postawie nie sposób oprzeć kryterium oddzielającego świat wykreowany („przy użyciu słów") od świata istniejącego obiektywnie w platońskim sensie.

3. Można jednak próbować odwołać się do pojęcia prawdy. Jeśli rzeczywistość matematyczna jest obiektywna w platońskim, ontycznym sensie, a więc w swym istnieniu i „uposażeniu" jest niezależna od badających ją matematyków, to wolno podejrzewać, że przynajmniej niektóre (jeśli nie wszystkie) ich konstrukcje są fałszywe: na przykład „o nieistniejącym mówią, że jest" albo „o połączonym, że jest rozdzielone"[7], lub odwrotnie. Trop wydaje się dobry, w matematyce bowiem odróżnia się zdania prawdziwe od zdań udowodnionych (twierdzeń). Na pojęciu prawdy

---

[6] Zob. tamże, s. 81-82.

[7] Nawiązuję do Arystotelesowskiego nauczania z *Metafizyki*: „Powiedzieć o tym, co jest, że nie jest, albo o tym, co nie jest, że jest, jest fałszem; natomiast powiedzieć o tym, co jest, że jest, a o tym, co nie jest, że nie jest, jest prawdą". Albo inaczej: „Kto więc myśli o rozdzielonym, że jest rozdzielone, a o połączonym, że jest połączone, mówi prawdę, natomiast głosi się fałsz, jeżeli się myśli przeciwnie o tym stanie rzeczy".

ugruntowane jest pojęcie wynikania logicznego[8], zaś dowodzenie określa pojęcie konsekwencji.[9] Wspominaliśmy też, że matematycy posługują się precyzyjnym pojęciem prawdy wprowadzonym przez Tarskiego, sprawdźmy więc, czy może się ono przydać w sporze realistów z konstruktywistami.

Koncepcja prawdy Tarskiego nawiązuje do klasycznej definicji, żądającej od zdania prawdziwego zgodności z rzeczywistością. Tarski sformułował konieczne warunki, jakie muszą być spełnione, aby dla pewnego języka można było zdefiniować pojęcie prawdy. Język taki (**L**) musi być sformalizowany, a nadto istnieć musi metajęzyk (**ML**), w którym będzie można nazwać każde zdanie wyjściowego języka oraz podać jego przekład w metajęzyku. Konwencja **T** stwierdza, że:

zdanie α języka **L** jest prawdziwe ztw, gdy *p*,

gdzie α jest nazwą zdania *Z* języka **L**, *p* zaś jego przekładem w **ML**.

„Ostateczne rozstrzygnięcie, czy to zdanie jest prawdziwe, czy nie — pisze Tadeusz Batóg[10] — zależy od siły założeń przyjętych w metalogice: jeśli prawa strona […] będzie twierdzeniem metalogiki, to również i lewa strona będzie twierdzeniem metalogiki. Jest zatem widoczne, że definicja Tarskiego […] nie daje żadnego kryterium prawdy […]. Można nawet wykazać […] że dla bogatszych języków kryterium takie istnieć nie może”. Przekład zdania *Z* (*p*) wymaga zinterpretowania języka **L** w pewnej dziedzinie, co znaczy, że metalogika, o której mówi Batóg, obejmuje teorię mnogości. Teoria mnogości traktowana jest więc jako ontologia matematyki, od „siły [jej] założeń” zależy w ostatecznym rachunku prawdziwość matematycznych twierdzeń. To ona decyduje o tym „co jest”, a „co nie jest” w matematyce. Jak mówił Quine: „[l]ogika szuka prawdy na drzewie języka”, odsyła nas do teorii mnogości. A przecież są różne ujęcia teorii mnogości[11], a nadto nie sposób udowodnić niesprzeczności żadnego z tych ujęć. Dzieli ona tu los innych teorii matematycznych. „Wiara w niesprzeczność podstawowych teorii matematycznych — czytamy u Andrzeja Grzegorczyka — opiera się więc na dedukcyjnym doświadczeniu wielu pokoleń matematyków, którzy na sprzeczność się nie natknęli, oraz na pewnej intuicyjnej przejrzystości podstawowych matematycznych pojęć”.[12] Odwołanie się do pojęcia prawdy nie przyniosło więc rozstrzygnięcia sporu: realiści mogą wierzyć, że prawdziwie opisują rzeczywistość matematyczną, konstruktywiści, że ich konstrukcje są udane — kreowana przez nich rzeczywistość wolna jest od sprzeczności.

---

[8] Zdanie α wynika logicznie ze zbioru zdań **X**, zawsze i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe wszędzie tam, gdzie prawdziwe są wszystkie zdania należące do **X**.

[9] Zdanie α jest konsekwencją zbioru zdań **X** zawsze i tylko wtedy, gdy posiada dowód w oparciu o zdania **X** i reguły inferencji przyjęte w danym systemie formalnym (teorii).

[10] *Podstawy logiki*, Poznań 1986, UAM, s. 183.

[11] Zermelo–Fraenkla–Skolema, Quine'a, von Neumanna–Bernaysa–Gődla.

[12] Andrzej Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1969, PWN, s. 253.

4. Pozostała jeszcze jedna płaszczyzna rozważań. Wyznacza ją ta „niedorzeczna skuteczność matematyki”[13] w opisywaniu rzeczywistości przyrodniczej zarówno na poziomie budowania modeli wyjaśniających, jak i na poziomie inżynieryjnym, technologicznym. Tej skuteczności nie wyjaśnia zadowalająco żadna z przeciwstawnych koncepcji. Trudno przecież uwierzyć, że „przystawanie” naszych swobodnych konstrukcji pojęciowych do materialnej rzeczywistości jest dziełem przypadku. A jest faktem.

> […] rozwój pojęć matematycznych ma swoją własną dynamikę i nowe koncepcje rodzą się same w jej własnych ramach. […] Czasem do przyjęcia tych nowych koncepcji jesteśmy po prostu zmuszeni, w innych przypadkach pojawiają się one jako wynik poszukiwań sformułowania bardziej eleganckiego, prostszego czy wygodniejszego. Z tych powodów wydaje się czasem, że droga postępu matematycznego zmierza w innym kierunku niż ten, który był początkowo zamierzony, czyli do właściwego przedstawienia świata fizyki. Jednakże w wielu przypadkach owo pragnienie matematycznej spójności i elegancji prowadzi nas do odkrycia pojęć i struktur matematycznych, które, jak się okazuje, ujmują zagadnienia świata fizyki w sposób głębszy i bardziej rozległy, niż tego początkowo oczekiwaliśmy. Czasem sprawia to wrażenie, jakby sama Natura kierowała się wymogami elegancji i spójności, podobnymi do tych, które sterują matematycznym rozumowaniem.[14]

Autora tych słów, Penrose’a, fakt ten skłania do platonizmu. Jak wskazywałam wyżej, optuje on za istnieniem *platońskiego świata idei matematycznych*, który jest przez matematyków jedynie „odkrywany”, nie tworzony. Rzecz w tym, że i sposób istnienia *świata idei*, i jego stosunek do *świata materii* od czasów Platona pozostaje niejasny, zwłaszcza że ma być to swego rodzaju stosunek sprawczy. Idee „odciskają się” w jakiś niepojęty sposób w materii. Ograniczenie świata idei do bytów matematycznych niczego tu nie zmienia.

Przy czym dodać trzeba, że platonizm Penrose’a nie jest najczystszej wody. „Natura” nie jest bierna, to — w przeciwieństwie do platońskiej materii — aktywny aktor w „dzianiu się” Wszechświata. Widać to już w przytoczonym fragmencie, gdy autor mówi o kierowaniu się przez Naturę względami elegancji i spójności, ale podobne uwagi rozproszone są w całym monumentalnym dziele. Na stronie 995 stwierdza to dobitnie:

> Stale powracającym motywem tej pracy było przypominanie, że mamy do czynienia nie tylko ze szczególną magią ukrytą w matematyce […] liczb [zespolonych], ale że sama Natura wykorzystała tę magię w procesie funkcjonowania Wszechświata na jego najgłębszych poziomach.

5. Wydaje się, że bardziej obiecujące jest spojrzenie z innego punktu widzenia na problem „przystawania” matematyki do świata, na jej zdumiewającą skuteczność. Zamiast poszukiwać sposobu, w jaki Natura „nagina się” do naszych konceptów czy odzwierciedla idealne matematyczne byty, warto rozważyć sytuację odwrotną, w której to nasze umysły kształtowane są przez „Naturę” w ten sposób, że zdolne są

---

[13] Znane powiedzenie Eugene Wignera.
[14] Roger Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op.cit.*, s. 59.

w rozmaitości zjawisk dostrzec strukturę zorganizowanej materii będącej podłożem tych zjawisk, strukturę tworzywa Wszechświata. Rozwijanie matematyki nie polegałoby na tworzeniu dowolnych konstrukcji czy penetracji platońskiego świata idei, ale na poszukiwaniu arystotelesowej *formy* w rzeczach, wzorców, realizowanych w rzeczywistości na tysięczne sposoby. Uniwersalność matematyki brałaby się stąd, iż „te same ogólne pojęcia matematyczne mogą stosować się do wielu różnych poziomów i do wielu różnych rzeczy”.[15]

Byłoby to więc trzecie — obok ***konstruktywizmu*** i ***platonizmu*** stanowisko w sporze o status matematyki. Można je chyba nazwać ***arystotelizmem***. Ma ono wielu zwolenników wśród matematyków i przyrodników. Einstein, który wielokrotnie rozważał poznawczą rolę matematyki, w szczególności geometrii, pomijał stanowisko platonizmu i wyróżniał dwie postawy: „Albo przyjmuje się, iż ‘ciało’ geometrii urzeczywistniane jest w zasadzie przez ciała stałe występujące w przyrodzie […] [a]lbo też zasadniczo zaprzecza się istnieniu przedmiotów odpowiadających podstawowym pojęciom geometrii”.[16] Pierwsza to postawa Helmholza, druga — Poincarego. Einsteinowi bliższe było stanowisko Helmholza. Pisał:

> Nasze dotychchzasowe doświadczenie pozwala nam mianowicie ufać, iż przyroda jest realizacją tego, co jest najprostsze do pomyślenia pod względem matematycznym. Drogą czysto matematycznej konstrukcji, według mego przekonania, potrafimy znaleźć te właśnie pojęcia i te związki między nimi w postaci praw, które dają nam klucz do rozumienia zjawisk przyrody. […] Doświadczenie pozostaje oczywiście jedynym kryterium użyteczności konstrukcji matematycznej dla fizyki. Właściwa zasada twórcza tkwi jednak w matematyce. W pewnym sensie uważam więc też, że prawdą jest, iż czyste myślenie może uchwycić rzeczywistość, tak jak wymarzyli to sobie starożytni.[17]

Bardzo zdecydowanie forsował taki punkt widzenia nieżyjący już, znakomity matematyk Andrzej Lasota. Rozwijając myśl Hugona Steinhausa, iż „przedmiotem matematyki jest rzeczywistość“, twierdził:

> […] wierzę, że matematyka jest po prostu strukturą naszego świata. Nie opisem tej struktury, ale samą strukturą. Bez wątpienia matematyk może tworzyć bardzo dziwne obiekty i może mu się wydawać, że daleko odbiegł od rzeczywistości. To tylko pozór. Jeśli jest to dobra matematyka, to okaże się wcześniej czy później, że jest ona fragmentem rzeczywistości. Jeśli zła, to jest tylko zlepkiem złożonym ze strzępów rzeczywistego świata, tak jak sen jest zlepkiem naszych codziennych przeżyć. […] Pytano mnie, czy gdyby świat był inny, to byłaby i inna matematyka. Oczywiście tak. Co więcej, myślę, że gdyby nie było świata, to nie byłoby matematyki — w żadnym sensie.[18]

---

[15] Ian Stewart, *Liczby natury* (prekł. M. Tempczyk), Warszawa 1996, CIS, s. 114-115. Dowolnie wiele konkretnych przykładów dostarcza literatura przedmiotu, również popularnonaukowa.

[16] Albert Einstein, Geometria nieeuklidesowa a fizyka, [w:] *Pisma filozoficzne* (przekład Kazimierz Napiórkowski, opracowanie Stanisław Butryn), Warszawa 1999, Wyd. IFiS PAN, s. 67.

[17] Albert Einstein, O metodyce fizyki teoretycznej, [w:] *Pisma filozoficzne*, *op.cit.*, s. 115, 116.

[18] Andrzej Lasota, Wprowadzenie do dyskusji: Matematyka a filozofia, [w:] *Otwarta nauka i jej zwolennicy*, Michał Heller, Jacek Urbaniec (red.), OBI Kraków i Biblos Tarnów, 1996, s. 51, 52.

Ma więc to stanowisko znakomitych obrońców, ale ma też krytyków. Roman Duda, dyskutując z poglądami Lasoty, wskazuje, iż szereg matematycznych pojęć nie ma odpowiedników w świecie fizycznym. Wskazuje, między innymi, na ideę nieskończoności, która „nie tylko nie jest projekcją tego [fizycznego] świata, ale kiedy próbujemy ją w ten świat projektować, to nastręcza to nam podstawowych trudności".[19] Michał Heller — choć sympatyzuje z poglądami Lasoty — punktuje dalsze trudności:

> Wiele racji zdaje się świadczyć o tym, że matematyka jest bogatsza niż struktura świata […] Na przykład istnieje nieskończenie wiele geometrii, a tylko „niektóre" z nich — choćby to „niektóre" oznaczało także nieskończoną klasę — znajduje zastosowanie w naukach empirycznych.[20]

Heller szkicuje możliwą linię obrony przed takim zarzutem: „Przypuszczam, że Prof. Lasota odpowiedziałby, że te 'niektóre' geometrie odkrywamy w świecie, a pozostałe tworzymy za pomocą czysto formalnych manipulacji".[21] Myślę, że na sprawę można spojrzeć jeszcze inaczej. Wskazówką może być uwaga Lasoty, iż „[m]atematyka najogólniej rzecz biorąc uczy, że pewne możliwości są wykluczone".[22] Można by więc argumentować, że matematyka wyznacza zakres tego wszystkiego, co jest możliwe, co jest formalnie dopuszczalne. Nasz świat natomiast realizuje jedną z takich możliwości, jeden z dopuszczalnych scenariuszy. Uwagi Einsteina wspierają taki tok myślenia:

> Rozważane w ten sposób nasze pytanie o prawomocność lub nieprawomocność geometrii euklidesowej ma jasny sens. Geometria euklidesowa, i w ogóle geometria, zachowuje wprawdzie jak poprzednio charakter nauki matematycznej, dlatego iż w dalszym ciągu wyprowadza się jej twierdzenia z aksjomatów drogą czysto logiczną, staje się jednak jednocześnie nauką przyrodniczą przez to, iż aksjomaty zawierają stwierdzenia o obiektach przyrody, o trafności których (stwierdzeń) rozstrzygnąć może tylko eksperyment. Musimy jednak zawsze być świadomi, że idealizacja polegająca na fikcji sztywnego ciała (mierniczego) jako przedmiotu przyrody może pewnego dnia okazać się niestosowalna lub stosowalna tylko w stosunku do pewnych zjawisk przyrody. Ogólna teoria względności wykazała niestosowalność tego pojęcia dla przestrzeni o takich rozmiarach, które nie są małe w sensie astronomicznym. Teoria elektrycznych kwantów elementarnych mogłaby wskazać na niestosowalność tego pojęcia dla rozmiarów rzędu atomowego. Już Riemann uznał obydwa te przypadki za możliwe.[23]

6. Wróćmy jednak do naszych wstępnych rozważań. Wydaje się oczywiste, że tylko z pozycji konstruktywisty można i trzeba mówić o mocach twórczych języka powołującego do istnienia obiekty matematyczne tworzące matematyczną rzeczywistość. Naturalnie, własności tych obiektów i związki między nimi są przedmiotem

---

[19] Roman Duda, Matematyczna idea nieskończoności a świat fizyczny, [w:] *Otwarta nauka…*, *op. cit.*, s. 62.

[20] Michał Heller, Czy matematyka jest strukturą świata?, [w:] *Otwarta nauka…*, *op. cit.*, s. 64.

[21] Jak wyżej.

[22] Andrzej Lasota, Wprowadzenie do dyskusji…, *op. cit.*, s. 52.

[23] Albert Einstein, Geometria nieeuklidesowa a fizyka, *op. cit.*, s. 68.

badania, a język tu stosowany pełni funkcję opisową. O ile „formalne manipulacje" są prowadzone zgodnie z regułami sztuki, a więc są po Austinowsku *udane* (fortunne), o tyle rzeczywistość matematyczna uzyskuje tę sztywność, a matematyczne twierdzenia konieczność, które zachwalałam w drugim punkcie niniejszego szkicu. Czy można jednak mówić o prawdziwości tych twierdzeń? Oczywiście tak, ale jedynie o *prawdziwości w modelu*, a skoro ten definiowany jest w ramach teorii mnogości, to, w istocie, z epistemologicznego punktu widzenia mamy tu do czynienia z koherencyjnym, a nie klasycznym, pojęciem prawdy.

W przypadku dwóch pozostałych stanowisk odnoszących teorie matematyczne do rzeczywistości pozajęzykowych — świata idei czy struktury świata fizycznego — można pytać o prawdę w sensie klasycznym. Odpowiedź nie jest jednak łatwa. Świat idei matematycznych, jeśli nawet istnieje, nie jest poznawczo bezpośrednio dostępny. Piękno wyłaniających się konstrukcji, niespodziewane związki między pojęciami, harmonia, „magiczne" właściwości — jakie przypisuje Penrose np. liczbom zespolonym — nie wystarczą do uwiarygodnienia przekonania, że docieramy do tego świata. Trudno tu o pewność bez Platońskiego przeświadczenia, że dusze nasze przed uwięzieniem w ciałach obcowały bezpośrednio z ideami i teraz mogą je sobie przypominać. Penrose zresztą znajduje pewnie odbicie świata idei w fizycznej rzeczywistości i stąd jego zachwyty nad Naturą, która ulega magii liczb zespolonych, czy uwagi typu: „Jest naprawdę uderzające, że zgodnie ze stanem współczesnej wiedzy wszystkie addytywne liczby kwantowe można zapisać za pomocą liczb całkowitych".[24] Bliski jest więc chyba stanowisku arystotelików.

Stanowisko arystotelików też jednak narażone jest na kontestację, skoro omal powszechne wśród filozofów jest przekonanie o niedostępności poznawczej rzeczywistości przyrodniczej (fizycznej, empirycznej czy jak ją zechcemy nazywać). Antyrealistyczny i relatywistyczny nurt konstruktywizmu społecznego traktuję tę rzeczywistość po prostu jako konstrukt społeczny. Mniej radykalni wątpią w realne istnienie jakichkolwiek „gatunków naturalnych". W tej sytuacji mówienie o obiektywnej strukturze świata, do której docieramy w poznaniu matematycznym, będzie narażone na ostrą krytykę. Nie zmieni tego fakt, że tylko arystotelizm wyjaśnia tę „niedorzeczna skuteczność matematyki", która — wraz z wieloma innymi ważnymi problemami — pozostaje dla krytyków całkowitą zagadką.

Optymizm poznawczy pozwalający optować na rzecz realizmu[25] fundowany jest na rozpoznaniu oczywistego faktu, iż podmiot poznający jest zarazem podmiotem działającym oraz że trafne rozpoznanie otoczenia jest warunkiem koniecznym skutecznego działania — nie tylko w przypadku ludzi. Wolno więc odwoływać się do prac ewolucjonistów, a ci przekonują, że nacisk ewolucyjny kształtował aparat poznawczy osobników tak, aby ich działania, mające na celu przeżycie i pozostawienia

---

[24] Roger Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op. cit.*, s. 65.

[25] W wersji, którą proponuję np. w pracy „Jak być realistą?", *Przegląd Filozoficzny*, nr 3 (2003), s. 5-16.

potomstwa, były skuteczne. „Z perspektywy rozważań ewolucyjnych — pisze Ditfurth[26] — idea i rzeczywistość, struktura naszego aparatu postrzegania i właściwości środowiska przystają do siebie z tych samych przyczyn, dla których skrzydło ptaka jest dostosowane do właściwości powietrza". Dalej idą jeszcze Ian Stewart i Jack Cohen, którzy stwierdzają:

> Nasze umysły ewoluują wspólnie ze wszystkim, co na nie wpływa. Umysły są wytworami rzeczywistości, procesami zachodzącymi w strukturach zbudowanych ze zwykłej materii, których właściwości rozwinęły się w celu naśladowania, kształtowania i wykorzystywania procesów naturalnych. To tłumaczy, dlaczego są tak 'nierozsądnie skuteczne' w postrzeganiu i reorganizowaniu swego środowiska.[27]

Nawet jeśli słuszne, powyższe uwagi są zbyt ogólnikowe, aby mogły kogoś przekonać, że ewolucja wyposażyła nas w zdolność bezpośredniego uchwytywania struktury materii na wszystkich poziomach jej organizacji, a nie tylko w obrębie zjawisk dostępnych w potocznym doświadczeniu. Nikt nie przeczy, że genetycznie matematyka wyrasta z tego doświadczenia, ale dalej rozwija się głównie dzięki wspomnianym „manipulacjom formalnym", których wyniki oceniane są przecież nie na podstawie ich zgodności czy niezgodności ze strukturą rzeczywistości, ale ze względu na wartości epistemiczne, o których już była mowa, takie jak ogólność, spójność, prostota, wreszcie piękno tworzonych konstrukcji. Stymulatorami rozwoju są czasami potrzeby nauk empirycznych, ale zwykle „manipulacje" wymuszane są wewnętrznymi problemami matematyki. Początki teorii liczb zespolonych sięgają połowy XVI wieku. Ich własności były owocnie badane przez 350 lat zanim okazało się, że „Przyroda […] oddała w ich władanie precyzyjne operacje swego świata w najbardziej mikroskopijnej skali".[28] Autor tych słów, Penrose, mówi o liczbach zespolonych, że „istnieją w zadziwiającej symbiozie z otaczającą nas rzeczywistością", ale nie wyjaśnia, jak to jest możliwe.

Oryginalną próbę argumentacji na rzecz realizmu w duchu naturalistycznym podjął Grzegorz Białkowski w szkicu *Uwarunkowania podmiotowe procesu poznawczego w fizyce*. Sugeruje on, że wartości epistemiczne i związane z nimi dyrektywy metodologiczne, decydujące o kierunku poszukiwań w fizyce[29], a zatem także kryteria akceptacji i wyboru teorii czy hipotez warunkowane są przekazywanymi genetycznie cechami biopsychicznymi właściwymi „całemu w zasadzie gatunkowi ludzkiemu".[30] Wymienia szereg czynników kształtujących owe cechy biopsychiczne

---

[26] H. von Ditfurth, *Duch nie spadł z nieba*, Warszawa 1989, PIW, s. 426.

[27] Ian Stewart i Jack Cohen, *Wytwory rzeczywistości* (przekł. Wanda Stępień-Rudzka), Warszawa 2003, Prószyński i S-ka, s. 9.

[28] Roger Penrose, *Droga do rzeczywistości*, *op. cit.*, s. 71.

[29] Nie trzeba chyba przypominać, że Grzegorz Białkowski był znakomitym fizykiem i doskonałym popularyzatorem fizyki.

[30] Grzegorz Białkowski, Uwarunkowania podmiotowe procesu poznawczego w fizyce, *Zagadnienia Naukoznawstwa,* 1-2, 1981, s. 13.

od jedności materialnej, strukturalnej i funkcjonalnej z otoczeniem i świadomości tej jedności, przez specyficzną postać naszego aparatu zmysłowego i motorycznego oraz strukturę władz psychicznych, aż po charakter więzi społecznych. Uwzględnia nawet „[u]kierunkowanie naszych potrzeb biologicznych i psychologicznych, częściowo zmiennych historycznie”.[31] Stara się szkicować sposób, w jaki te czynniki moderują nasze zdolności poznawcze i stosowane przez nas kryteria oceny wyników poznania. Analizuje kryteria mniej (np. sprawdzalność empiryczna, predyktywność) lub bardziej uwarunkowanych podmiotowo, a wśród tych ostatnich szczególną uwagę zwraca na kryterium ***piękna***.

> Jednym z dominujących elementów, które charakteryzują „piękne” teorie jest zawarty w nich element symetrii, harmonii, podobieństwa, analogii. Nie to jest może najbardziej dziwne, że teorie takie podobają się tym, którzy są w stanie je zrozumieć, ale to, że odzwierciedlają one porządek ukryty w samej przyrodzie.[32]

Odwołując się do jedności człowieka z jego otoczeniem w sensie przestrzennym i czasowym Białkowski przekonuje, że „poczucie to odzwierciedla jakąś cechę rzeczywistości”[33] i dlatego tak często prowadzi do poprawnych rozstrzygnięć.

Wiele kryteriów omawianych przez Białkowskiego stosuje się również na terenie matematyki; tu także ocenia się teorie, między innymi, ze względu na ich prostotę, ogólność, a także piękno. Można więc dzielić z Białkowskim również optymizm poznawczy i wierzyć, że teorie matematyczne docierają do struktury rzeczywistości. Naturalnie to tylko hipoteza, którą uzasadnia jednak ***wnioskowanie do najlepszego wyjaśnienia*** (*inference to the best explanation*). Nie sposób bowiem zaprzeczyć, że na jej konto można zapisać wyjaśnienie owej „niedorzecznej skuteczności matematyki”, która pozostaje zagadką dla konstruktywistów i platoników. Jest i korzyść dodatkowa. Przy tym ujęciu sukcesy przyrodników w trafnym opisywaniu świata, potwierdzane dokonaniami inżynierów, których projekty bazują na tych opisach, stanowią dodatkowy argument na rzecz niesprzeczności podstawowych teorii matematycznych, wzmacniający „dedukcyjne doświadczenie wielu pokoleń matematyków”, o którym pisał Grzegorczyk.

---

[31] Tamże, s. 21.

[32] Tamże, s. 25.

[33] Jak wyżej. „Oczywiście — dodaje Białkowski — relacja między naszym odczuciem piękna a tym, co w przyrodzie jest owym czynnikiem odczucie to wyzwalającym, może być taka, jak między naszym wrażeniem barwy niebieskiej a długością fali odpowiedniego promieniowania elektromagnetycznego”.