*Filozofia Nauki*
*Rok XII, 2004, Nr 1(45)*

Michał Heller

# Nieprzemienna unifikacja dynamiki i prawdopodobieństwa

## 1. WPROWADZENIE

Wiele symptomów zdaje się wskazywać na to, że jesteśmy świadkami daleko idących przemian zachodzących we współczesnej matematyce. Być może nawet nie są to tylko przemiany związane ze zwykłym, choćby nawet znacznie przyspieszonym, postępem w tej dziedzinie wiedzy, lecz takie, które mogą sięgać do samych podstaw matematyki. Mam na myśli powstanie i szybki rozwój geometrii nieprzemiennej (szeroko rozumianej, razem z teorią grup kwantowych). O aż takim znaczeniu tego nowego działu matematyki zdaje się świadczyć szerokie wykorzystywanie w nim metod teorii kategorii już nie tylko jako eleganckiego ujęcia, lecz także — jak można wnosić — jako pojęciowego narzędzia, bez którego nie można się obejść. Istnieje także inny sygnał, że nowa teoria zdaje się wykraczać poza ogólnie przyjmowany paradygmat teoriomnogościowy w matematyce. Jak pisze Alain Connes, matematyk, który jak nikt inny przyczynił się do rozwoju geometrii nieprzemiennej, „nieprzemienne zbiory charakteryzują się efektywną nierozróżnialnością ich elementów".[1] Czy można je jeszcze nazywać zbiorami (w każdym razie w tradycyjnym tego słowa znaczeniu)?

Rozwojowi geometrii nieprzemiennej towarzyszą, a nawet stymulują go, zastosowania do fizyki teoretycznej, a zwłaszcza do poszukiwań tzw. teorii fundamentalnej. O tyle nic w tym dziwnego, że idea nieprzemienności po raz pierwszy wyraźnie dała znać o sobie w mechanice kwantowej; co więcej, właściwie wszystkie zaskakujące własności tego działu fizyki (na czele z zasadą nieoznaczoności Heisenberga) są

---

[1] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York–Boston–London, 1994, s. 74. W związku z tym zagadnieniem warto przeczytać dodatek C do rozdziału I tej książki (s. 74-77).

konsekwencją nieprzemiennego mnożenia operatorów. Inwazja metod nieprzemiennych do dzisiejszej fizyki to tylko następstwo tamtej pierwszej rewolucji.

Celem niniejszej pracy nie jest ukazanie panoramy osiągnięć geometrii nieprzemiennej i jej zastosowań do fizyki, lecz przeanalizowanie związków pomiędzy dwoma podstawowymi dla fizyki pojęciami, jakimi są dynamika i prawdopodobieństwo. Z dynamiką, w oczywisty sposób, wiąże się zagadnienie czasu i ono znajdzie swoje miejsce w poniższych analizach. Dostrzeżenie związków między tymi pojęciami stało się możliwe dzięki zastosowaniu metod nieprzemiennych. A związki, o których mowa, są — z naszej makroskopowej perspektywy — dosyć nieoczekiwane. Okazuje się bowiem, że w „matematyce nieprzemiennej" dynamika i prawdopodobieństwo są tak bardzo ze sobą związane, iż można utrzymywać, iż są one dwoma aspektami tej samej struktury matematycznej. Co więcej, dokładniejsza analiza pozwala wyjaśnić, dlaczego w tradycyjnym podejściu te dwa pojęcia mogą uchodzić za niezależne. Jak wiadomo, w mechanice kwantowej mamy do czynienia z ewolucją (dynamiką) układów fizycznych, która prowadzi do przewidywań empirycznych o charakterze istotnie probabilistycznym. Zgodnie z zaproponowaną tu koncepcją jest to ślad bardziej podstawowej, nieprzemiennej dynamiki zunifikowanej z nieprzemienną probabilistyką.

Mówię tu o „zaproponowanej koncepcji", gdyż to, co przedstawię, nie jest modelem teoretycznym w ogólnie przyjętym rozumieniu tego wyrażenia. Nie znaczy to, że moja propozycja opiera się na czysto intuicyjnych podstawach. Zapewne dałoby się ją nawet przedstawić w postaci układu lematów i twierdzeń zaopatrzonych w dowody i odpowiednią interpretację, ale byłby to układ na tyle ogólny, że mógłby znaleźć zastosowanie w więcej niż jednym fizycznym modelu.

Koncepcja przedstawiona w niniejszym artykule wyrosła z cyklu prac — moich wraz ze współpracownikami — nad modelem unifikującym ogólną teorię względności z mechaniką kwantową przy wykorzystaniu metod geometrii nieprzemiennej.[2] W jednej z tych prac[3] badaliśmy nieprzemienną dynamikę i zagadnienie stopniowego „wyłaniania się" czasu z bezczasowego reżimu nieprzemiennego aż do uczasowionego świata fizyki klasycznej; w innej[4] okazało się, że nasz model ma pewne zaskakujące własności probabilistyczne (w naturalny sposób pojawiła się w nim algebra operatorów losowych). Ale dopiero w niniejszym artykule, udało się pełniej wyświetlić związek między dynamiką a prawdopodobieństwem.[5]

---

[2] Podstawowe idee tego modelu zawarte są w pracach: M. Heller, W. Sasin, D. Lambert, *Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity*, „Journal of Mathematical Physics", 38, 1987, s. 5840-5853; M. Heller, W. Sasin, *Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics*, „International Journal of Theoretical Physics", 38, 1999, s. 1619-1642.

[3] M. Heller, W. Sasin, *Emergence of Time*, Physics Letters A250, 1998, s. 48-54.

[4] M. Heller, W. Sasin, Z. Odrzygóźdź, *State Vector Reduction as a Shadow of a Noncommutative Dynamics*, „Journal of Mathematical Physics", 41, 2000, s. 5168-5179.

[5] Wiele zawdzięczam ciekawej pracy: A. Connes, C. Rovelli, *Von Neumann Algebra Automorphisms and Time-Thermodynamics Relation in Generally Covariant Quantum Theories*, „Classical and Quantum Gravity", 11, 1994, s. 2899-2917.

Układ niniejszej pracy jest następujący. W rozdziale 2. przedstawiam podstawowe pojęcia matematyczne niezbędne do zrozumienia całości. Muszę przy tym zakładać u Czytelnika znaczny stopień wiedzy matematycznej (ale niewykraczający poza podstawowe wiadomości z algebry i teorii miary; znajomość rachunku operatorów na poziomie podstawowego kursu mechaniki kwantowej powinna w zasadzie wystarczyć). W przypisach podaję definicje pojęć zastosowanych, lecz niewyjaśnionych w tekście. Gdybym jednak chciał wprowadzać wszystkie pojęcia „od początku", artykuł rozrósłby się do niedopuszczalnych rozmiarów (a i tak byłby prawdopodobnie niestrawny dla Czytelników niemających bliższego kontaktu z matematyką). W rozdziale 3. przedstawiam podstawowe idee nieprzemiennego rachunku prawdopodobieństwa, a w rozdziale 4. omawiam jego związek z nieprzemienną dynamiką. Przedmiotem rozdziału 5. jest pokazanie, jak nieprzemienna probabilistyczna dynamika prowadzi do ewolucji unitarnej znanej z mechaniki kwantowej. Wszystkie rozważania z rozdziałów 2-5 mają charakter czysto matematyczny, ale dla filozofa mogą być interesujące z tego względu, że w nowym świetle ukazują związki miedzy ważnymi pojęciami. W rozdziale 6. podaję możliwą interpretację fizyczną uzyskanych wyników. Mówiąc najogólniej, polega ona na założeniu, iż na poziomie fundamentalnym panuje „reżim nieprzemienny", który w przejściu do świata makroskopowego prowadzi do zwykłych przemiennych modeli. Mechanizm tego przejścia również został zarysowany. Uzupełnieniem całości jest rozdział 7., zawierający uwagi filozoficzne, jakie nasuwają się niejako na marginesie uzyskanych wyników.

## 2. POJĘCIA PODSTAWOWE

Co najmniej od słynnej pracy J. L. Koszula[6] wiadomo, że geometrię różniczkową można równoważnie uprawiać na dwa różne sposoby: albo wykorzystując układy współrzędnych na rozmaitości, albo posługując się wyłącznie algebrą funkcji gładkich na rozmaitości (niejako zapominając o samej rozmaitości). Podobny „dualizm" istnieje również w wielu innych działach matematyki. Na przykład, topologię można zdefiniować (i potem uprawiać) albo przy pomocy rodziny zbiorów otwartych na danej przestrzeni, albo — równoważnie — przy pomocy algebry funkcji ciągłych na danej przestrzeni. Podobnie teorię miary można budować, albo posługując się σ-ciałem podzbiorów danej przestrzeni, albo — równoważnie — algebrą funkcji mierzalnych na niej. Oczywiście, algebry funkcji gładkich, ciągłych i mierzalnych są algebrami przemiennymi (jako algebry funkcyjne). Przejście do „matematyki nieprzemiennej" polega na zastąpieniu algebr przemiennych odpowiednimi algebrami nieprzemiennymi.[7]

[6] *Fibre Bundles and Differential Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960.

[7] Algebry te, jako nieprzemienne, albo nie są algebrami funkcyjnymi (najczęściej są to algebry operatorowe), albo są algebrami funkcyjnymi, ale ze zmienionym — w stosunku do standardowego — mnożeniem funkcji (często rolę mnożenia spełnia konwolucja).

Otrzymujemy w ten sposób: nieprzemienną geometrię, nieprzemienną topologię, nieprzemienną teorię miary. W dalszym ciągu interesować nas będzie ta ostatnia, gdyż jej szczególnym przypadkiem jest nieprzemienny rachunek prawdopodobieństwa. Rozpatrzmy zatem nieco dokładniej wspomniany „dualizm" w przypadku teorii miary.

A więc w standardowej teorii miary *miarą* $m$ na przestrzeni $X$ nazywamy (addatywnie przeliczalną) funkcję określoną na rodzinie $\Sigma$ podzbiorów[8] przestrzeni $X$ (zakładamy, że $\Sigma$ zawiera także zbiór pusty i że $\Sigma$ jest $\sigma$-polem[9]) z wartościami w przestrzeni dodatnich liczb rzeczywistych rozszerzonych o element, który oznaczamy przez $+\infty$; czyli

$$m : \Sigma \to \{\mathbf{R}^+ \cup +\infty\}$$

Przestrzeń $X$ wyposażoną w miarę $m$ nazywamy *przestrzenią miary*, a elementy rodziny $\Sigma$ *podzbiorami mierzalnymi*. Przestrzeń miary często oznacza się jako parę $(X, m)$. Jeżeli dodatkowo miara całej przestrzeni równa się jedności, czyli $m(X) = 1$ (mówimy, że przestrzeń $X$ jest *unormowana do jedności*), to $X$ nazywamy *przestrzenią prawdopodobieństwa*, elementy rodziny $\Sigma$ — *zdarzeniami*, $m$ — *miarą prawdopodobieństwa*, a miarę danego zdarzenia $U \in \Sigma$, czyli $m(U)$ — *prawdopodobieństwem* zdarzenia $U$.

We współczesnej matematyce ważne jest „oddziaływanie struktur". W rozważanym przez nas przypadku szczególnie interesujące jest wzajemne „oddziaływanie" teorii miary i topologii.

Niech $X$ będzie teraz zwartą przestrzenią topologiczną, a $C_0(X)$ algebrą wszystkich ciągłych funkcji na $X$. Algebra $C_0(X)$ z normą $\|f\| = \sup|f(x)|$, dla $f \in C_0(X)$, jest algebrą Banacha. Okazuje się, że istnieje ścisła odpowiedniość między skończonymi miarami Borela na $X$ a liniowymi formami na algebrze Banacha.[10] Zamiast więc rozważać przestrzeń miary $(X, m)$, gdzie $m$ jest skończoną miarą Borela, możemy, równoważnie, rozważać algebrę Banacha $C_0(X)$ z wyróżnioną na niej formą liniową $\varphi$, czyli parę $(C_0(X), \varphi)$. Jeżeli ponadto na $\varphi$ nałożymy odpowiednio sformułowany warunek unormowania do jedności, to para $(C_0(X), \varphi)$ będzie funkcyjnym odpowiednikiem przestrzeni prawdopodobieństwa. Stwierdzenie to stanowi punkt wyjścia uogólnienia, które prowadzi do pojęcia nieprzemiennego rachunku prawdopodobieństwa.

---

[8] Od rodziny $\Sigma$ wymagamy spełnienia następujących warunków: $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$ oraz $A \cup B \in \Sigma$. Rodzinę $\Sigma$ w takim przypadku nazywa się *pierścieniem podzbiorów*.

[9] Pierścień podzbiorów nazywa się $\sigma$-*polem*, jeżeli jest domknięty ze względu na przeliczalne sumy podzbiorów.

[10] Zbiór liniowych funkcjonałów na algebrze $A$ ma naturalna strukturę przestrzeni liniowej; jej elementy nazywają się *formami liniowymi*.

## 3. NIEPRZEMIENNY RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zamiast algebry $C_0(X)$ rozważmy jakąkolwiek algebrę $A$ z jednością, niekoniecznie przemienną. Dla ogólności przyjmijmy, iż jest to algebra zespolona. Niech dalej $\varphi$ będzie formą liniową na $A$ (o wartościach zespolonych) taką, że $\varphi(1) = 1$. Parę $(A, \varphi)$ będziemy nazywać *nieprzemienną przestrzenią prawdopodobieństwa* lub krótko *nieprzemiennym prawdopodobieństwem*. Nadużywając nieco analogii z przypadkiem standardowym, o elementach algebry $A$ możemy myśleć jako o zmiennych losowych, a o $\varphi(a)$, $a \in A$ jako o wartości oczekiwanej dla $a$. Zauważmy, że $(A, \varphi)$ jest strukturą czysto algebraiczną, tzn. nie ma w niej odpowiednika ciągłości lub gładkości (w odpowiedniki takie można wyposażyć tę przestrzeń, nakładając na nią odpowiednie warunki).

Nieprzemienność wprowadza istotnie nowe (i niekiedy nieoczekiwane) własności do tak uogólnionego prawdopodobieństwa. Ażeby uchwycić stopień tego uogólnienia, warto uświadomić sobie, że przestrzeń nieprzemienna, w ogólnym przypadku, jest pozbawiona pojęć lokalnych, takich jak pojęcie punktu i jego otoczenia, podczas gdy standardowe pojęcie prawdopodobieństwa odnosi się do „mas statystycznych", czyli zbiorów przedmiotów indywidualnych. Jak rozumieć prawdopodobieństwo, gdy nie ma indywiduów (pojęć lokalnych)? Właśnie z tą trudnością radzi sobie nieprzemienny rachunek prawdopodobieństwa. Stąd płyną jego specyficzne własności, niemające swoich odpowiedników w zwykłym rachunku prawdopodobieństwa. Jedną z takich własności wyraża istnienie tzw. podalgebr swobodnych.

Niech $(A, \varphi)$ będzie nieprzemiennym rachunkiem prawdopodobieństwa. Podalgebry $B_i$, $i \in I$ ($I$ jest zbiorem indeksów) algebry $A$, zawierające jedność, nazywamy *swobodnymi*, jeżeli $\varphi(a_j) = 0$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, n$ oraz $a_j \in B_{i_j}$ dla pewnych wskaźników $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$, pociąga za sobą $\varphi(a_1 a_2 \ldots a_n) = 0$.

To abstrakcyjne pojęcie odgrywa w nieprzemiennym rachunku prawdopodobieństwa podobną rolę do pojęcia niezależności zmiennych losowych w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa, ale nie jest z nim identyczne. Widać to na następującym przykładzie. Niech $B$ i $C$ będą dwiema swobodnymi podalgebrami algebry $A$; niech ponadto $b \in B$ i $c \in C$. Wówczas można pokazać, że $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c)$, jak dla zmiennych niezależnych w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa. Ale już gdy $b_1, b_2 \in B$ i $c_1, c_2 \in C$, to $\varphi(b_1c_1b_2c_2)$ wyraża się wzorem, który nie ma swojego odpowiednika w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa.[11] Własność swobody jest tak charakterystyczna dla nieprzemiennego rachunku prawdopodobieństwa, że często nazywa się go *swobodnym rachunkiem prawdopodobieństwa*.[12]

W ten sposób sformułowany nieprzemienny rachunek prawdopodobieństwa jest jednak za ogólny dla wielu konkretnych celów. Na algebrę $A$ należy zatem nałożyć

---

[11] Por. Ph. Biane, *Free Probability for Probabilists*, preprint: math. PR/9809193.

[12] Obszerniej na ten temat por.: D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica, *Free Random Variables* (CRM Monograph Series, vol. 1), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1992.

jakieś dodatkowe warunki. I tym razem możemy kierować się analogią z przypadkiem przemiennym. Niech $H$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta[13], a $T$ ograniczonym, samosprzężonym operatorem na $H$. Wówczas istnieje jedyna (z dokładnością do równoważności) miara $m$ na odcinku $I = [-||T||, ||T||]$ taka, że

$$f(T) = 0 \Leftrightarrow \int |f| dm = 0.$$

Ponadto algebra $A$ operatorów postaci $f(T)$ na $H$, gdzie $f$ jest ograniczoną funkcją borelowską[14], tworzy algebrę von Neumanna (generowaną przez $T$).[15]

Przypomnijmy, że *algebrą von Neumanna* nazywamy algebrę niezdegenerowanych, samosprzężonych operatorów na przestrzeni Hilberta $H$, domkniętą w sensie słabej zbieżności na $H$, tzn. zbieżności określonej przez iloczyn skalarny na $H$.[16] Przytoczone powyżej rozumowanie sugeruje, by przez *nieprzemienną przestrzeń prawdopodobieństwa* rozumieć teraz parę $(N, \varphi)$, gdzie $N$ jest algebrą von Neumanna, a $\varphi$ dodatnią, znormalizowaną do jedności, liniową formą na $N$ (ciągłą w sensie słabej zbieżności). Liniowa forma $\varphi$ na $N$ nazywa się *dodatnią*, jeżeli $\varphi(x^*x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in N$. Spełnienia tego rachunku wymagamy przez analogię z dodatniością miary probabilistycznej.

Ażeby zobaczyć, jak działa w ten sposób rozumiany rachunek prawdopodobieństwa, rozpatrzmy pouczający przykład.[17] Dane są dwie hermitowskie macierze $A_N$ i $B_N$ o wymiarach $N \times N$ i znane są ich spektra. Chcemy znaleźć spektrum ich sumy $A_N + B_N$. Zadanie to, ważne w matematyce i mające zastosowanie do fizyki, można rozwiązać, ale rozwiązanie jest trudne, a odpowiedź skomplikowana. Gdy jednak $N$ staje się odpowiednio duże, pojawia się zupełnie nieoczekiwane zjawisko: dla *prawie wszystkich* możliwych macierzy $A_N$ i $B_N$ z danym spektrum, wynik jest taki sam i może być wyliczony bez dokładnej znajomości struktury spektrów macierzy $A_N$ i $B_N$. Ten niezrozumiały w świetle klasycznego rachunku prawdopodobieństwa rezultat daje się wyprowadzić z nieprzemiennego rachunku prawdopodobieństwa; przy czym odpowiednia algebra musi być algebrą von Neumanna, a w samym wyprowadzeniu istotną rolę odgrywa pojęcie swobodnych podalgebr.

---

[13] Przestrzeń topologiczną nazywamy *ośrodkową*, jeżeli istnieje w niej przeliczalny zbiór gęsty.

[14] $\sigma$-pole podzbiorów przestrzeni $X$ nazywamy *borelowskim*, jeżeli jest generowane przez podzbiory otwarte przestrzeni $X$. Elementy borelowskiego $\sigma$-pola nazywamy *podzbiorami borelowskimi*. Funkcja jest *borelowska*, jeżeli przeciwobraz każdego podzbioru borelowskiego jest podzbiorem borelowskim.

[15] Por. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, s. 48.

[16] Wszystkie informacje na temat algebr von Neumanna, potrzebne do zrozumienia niniejszego artykułu, można znaleźć w książce: V. S. Sunder, *An Invitation to von Neumann Algebras*, Springer, New York–Berlin–Heidelberg 1987.

[17] Por. Ph. Biane, *dz. cyt.*

## 4. PRAWDOPODOBIEŃSTWO I DYNAMIKA

Jedną z bardzo interesujących własności geometrii nieprzemiennej jest to, że bardzo często w jednej strukturze łączy ona struktury, które w tradycyjnej matematyce pozostawały (lub wydawały się) od siebie całkowicie niezależne. Dotyczy to również prawdopodobieństwa i dynamiki.

Najpierw przyjrzyjmy się temu, w jakim sensie para $(N, \varphi)$, gdzie $N$ jest algebrą von Neumanna na pewnej przestrzeni Hilberta $H$, a $\varphi$ pewną formą liniową na $N$, jest „obiektem dynamicznym". Wynika to ze znanego twierdzenia Tomity-Takesaki.[18] Niech $\xi \in H$ będzie takim elementem przestrzeni Hilberta $H$, że $N\xi$ i $N'\xi$, gdzie $N'$ jest komutantem[19] algebry $N$, są zbiorami gęstymi w $H$. Wówczas na $H$ istnieje (niekoniecznie ograniczony) operator $S$ taki, że

$$Sx\xi = x^*\xi$$

dla każdego $x \in N$; gwiazdka oznacza operację inwolucji w $N$. Na mocy twierdzenia Tomity-Takesaki z każdym stanem[20] $\varphi$ na $N$ jest stowarzyszona jednoparametrowa grupa $\sigma^{\varphi}{}_t$ przekształceń (automorfizmów) algebry $N$ następującej postaci:

$$(1) \qquad \sigma^{\varphi}{}_t(x) = \nabla^{it}\, x\, \nabla^{-it}$$

gdzie $t \in \mathbf{R}$ jest parametrem a $\nabla := |S|^2 = S^*S$. Grupa ta nazywa się modularną grupą automorfizmów lub krótko grupą modularną.

Jeżeli heurystycznie przyjmiemy, że $x \in N$ jest operatorem reprezentującym pewną wielkość fizyczną (jak to ma miejsce w mechanice kwantowej), a parametr $t$ odgrywa rolę czasu, to staje się jasnym, że równanie (1) przedstawia ewolucję w czasie pewnej wielkości fizycznej, czyli jest równaniem dynamicznym. Zauważmy, że jest to ewolucja zależna od stanu $\varphi$. W tym sensie para $(N, \varphi)$ stanowi obiekt dynamiczny.

Ale w przypadku gdy $\varphi$ jest formą liniową dodatnią i unormowaną do jedności, to para $(N, \varphi)$ jest również nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną. A więc w tym przypadku dynamika utożsamia się z probabilistyką. Każda taka dynamika jest procesem probabilistycznym i każda taka przestrzeń probabilistyczna ma aspekt dynamiczny. Dwie struktury, które w tradycyjnej matematyce były odrębne, teraz się jednoczą. Ale jest to złączone z pewną „anomalią" (anomalią — z naszego punktu widzenia). To zunifikowane „dynamiczne prawdopodobieństwo" jest zależne od stanu $\varphi$: jeżeli

---

[18] V. S. Sunders, *dz. cyt.*, rozdział 2. Por. także: A. Connes, *Noncommutative Geometry*, s. 43-44.

[19] Przypomnijmy, że *komutantem* $S'$ podzbioru $S$ algebry $L(H)$ wszystkich operatorów liniowych na przestrzeni Hilberta $H$ jest: $S' = \{x' \in L(H): x'x = xx'$ dla wszystkich $x \in S\}$. Każda algebra von Neumanna $N$ spełnia związek $N = N''$, czyli jest komutantem swojego komutanta. Własność tę można uznać za własność definiującą algebry von Neumanna.

[20] Dodatni liniowy funkcjonał $\varphi$ na algebrze $A$ o normie jednostkowej nazywa się *stanem*. Jeżeli $A$ jest algebrą z jednością, to dla każdego stanu $\varphi$ zachodzi: $\varphi(1)=1$. Typowy stan na algebrze von Neumanna $N$ jest dany przez formę liniową $\varphi$ na $N$ postaci: $\varphi(N) = \langle x\eta, \eta\rangle$, gdzie $\eta$ jest wektorem jednostkowym w przestrzeni Hilberta.

parę $(N, \varphi)$ zamienimy na parę $(N, \psi)$, otrzymamy inną przestrzeń probabilistyczną i inną grupę jednoparametrową $\sigma^{\psi}_{t}$, określającą inną dynamikę. Nasza intuicja nie zawsze nadąża za postępami matematyki.

## 5. EWOLUCJA UNITARNA

Rodzi się pytanie, czy nieprzemiennej matematyki nie da się zmusić, by przybliżyła się do naszych intuicji — by prawdopodobieństwo i dynamikę uniezależnić od stanu. Okazuje się, że można to zrobić, ale w tym celu na elementy grupy modularnej, czyli automorfizmy $\sigma^{\varphi}_{t}$, trzeba nałożyć dodatkowe warunki. Aby je wyrazić, musimy wprowadzić następujące pojęcia.

Elementy $u$ algebry $A$ spełniające warunek $uu^{*} = u^{*}u = \mathbf{I}$ nazywa się elementami *unitarnymi*; tworzą one grupę, tzw. *grupę unitarną* algebry $A$. Niech teraz $A = N$ będzie algebrą von Neumanna. Automorfizm $\alpha: N \to N$ nazywa się *automorfizmem wewnętrznym*, jeżeli istnieje taki nietrywialny (tzn. różny od $\mathbf{I}$) element $u$ grupy unitarnej algebry $N$, że

$$\alpha(A) = u^{*}au$$

dla każdego $a \in N$. Zbiór wszystkich automorfizmów wewnętrznych algebry $N$ oznaczamy symbolem Inn$N$, natomiast przez Aut$N$ oznaczamy grupę wszystkich automorfizmów algebry $N$. Utwórzmy teraz grupę ilorazową Out$N$=Aut$N$/Inn$N$. Na mocy udowodnionego przez Connesa uogólnionego twierdzenia Radona-Nikodyma[21] wszystkie stany na algebrze von Neumanna $N$ definiują tę samą grupę modularną w Out$N$; grupę tę możemy więc oznaczać przez $\sigma_t$, $t \in \boldsymbol{R}$. Otrzymujemy zatem dla wszystkich stanów tę samą przestrzeń probabilistyczną i tę samą dynamikę. Co więcej, dynamika ta jest związana z grupą unitarną algebry $N$, dokładnie jak to ma miejsce w mechanice kwantowej. Jak wiadomo, unitarna ewolucja operatorów w mechanice kwantowej jest z natury swej probabilistyczna. W świetle powyższych wyników można to interpretować jako ślad po głębszym poziomie, którym rządzą prawa matematyki nieprzemiennej.

Zaskoczenie tym, że nieprzemienna teoria miary łączy się z nieprzemienną dynamiką daje się słyszeć w wypowiedzi Connesa: „Teoria nieabelowych [tzn. nieprzemiennych] algebr von Neumanna jest istotnie daleko idącym rozszerzeniem teorii miary; największą jej niespodzianką jest fakt, że algebra $M$ [von Neumanna] dziedziczy po swojej nieprzemienności podarowaną przez Boga *(god given)* ewolucję czasową."[22]

---

[21] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. Ecole Normale Superieure 6, 1973, s. 133-252. Por. również A. Connes, *dz. cyt.*, s. 44.

[22] Tenże, *A Short Survey of Noncommutative Geometry*, preprint: hep-th/0003006, 2000.

## 6. INTERPRETACJA

Ostatnie zdanie sugeruje interpretację powyższych wyników. Jak wiadomo, fizyka poszukuje dziś tzw. teorii ostatecznej (zwanej niekiedy „na wyrost" teorią wszystkiego). W swojej maksymalistycznej wersji teoria taka miałaby spełniać równocześnie dwie funkcje: łączyć ogólną teorię względności z mechaniką kwantową oraz łączyć w jedno wszystkie oddziaływania fizyczne (zrealizowanie tylko jednego z tych dwu ambitnych celów też uznano by za sukces). Istnieją poważne racje, by sądzić, że w ten sposób zunifikowana fizyka „obowiązuje" na poziomie fundamentalnym, tzn. poniżej progu Plancka (który charakteryzuje długość planckowska $10^{-33}$ cm i czas planckowski $10^{-44}$ s). Wiadomo dziś także, ponad wszelką wątpliwość, że aby te cele urzeczywistnić, należy posłużyć się metodami wykraczającymi poza standardowe narzędzia fizyki teoretycznej. Największe nadzieje wiąże się dziś z teorią superstrun lub jej znacznie uogólnioną wersją, znaną pod nazwą M-teorii, być może w połączeniu z metodą pętli Ashtekara. We wszystkich tych podejściach (i szeregu innych) metody geometrii nieprzemiennej zajmują coraz bardziej znaczące miejsce. Nie wydaje się więc nierozsądnym założenie, że na poziomie „podplanckowskim" obowiązuje geometria nieprzemienna (rozumiana odpowiednio szeroko, wraz z nieprzemiennym rachunkiem prawdopodobieństwa i nieprzemienną dynamiką). Uczyńmy takie założenie czysto roboczą hipotezą. Nie chcemy przez to przesądzać kształtu przyszłej teorii ostatecznej. Przyjmujemy tylko (roboczo), że wyniki zreferowane w niniejszej pracy w teorii takiej zachowają swoją ważność. Zauważmy, że wyniki te opierają się na bardzo ogólnych założeniach (najistotniejszym z nich jest to, że elementy przyszłej teorii tworzą algebrę von Neumanna), które mogą być spełnione w bardzo szerokim spektrum różnych teorii.

Z naszego założenia wynikają bardzo interesujące wnioski. Ponieważ geometria nieprzemienna jest w zasadzie geometrią bezpunktową, na poziomie fundamentalnym zwykłe pojęcia przestrzeni i czasu (jako składającego się z punktowych chwil) tracą sens. Nie znaczy to jednak, że na poziomie tym panuje bezruch i statyka, możliwa jest bowiem uogólniona dynamika, która ze swej istoty jest probabilistyczna (również w uogólnionym sensie). Rolę czasu w tej dynamice odgrywają jednoparametrowe grupy modularne. Odmienność tych pojęć od ich zwykłych odpowiedników polega m.in. na tym, że uogólniona dynamika, wraz z odpowiadającym jej „czasem" (grupą modularną) i probabilistycznym aspektem, zależy od stanu, w jakim znajduje się układ fizyczny.

Dokonajmy pewnego uśrednienia tego obrazu, popatrzmy nań niejako bardziej „z lotu ptaka". Pewne elementy grup modularnych zaczną nam się sklejać (przestaniemy je odróżniać od siebie). Matematycznie znaczy to, że przechodzimy do pewnej relacji równoważności. Jeżeli relacja ta prowadzi do grupy ilorazowej $\mathrm{Out}N=\mathrm{Aut}N/\mathrm{Inn}N$ (a jest to w tym kontekście postulat bardzo naturalny), znaczy to, że z tej perspektywy dynamika, prawdopodobieństwo i czas przestają zależeć od stanu, nabierają charakteru uniwersalnego. Dynamika staje się dynamiką unitarną. Jesteśmy więc w obszarze znanej nam dobrze mechaniki kwantowej.

Ale jeszcze nie w świecie makroskopowym. Jak zatem dokonuje się przejście do skali makroskopowej? Istnieje tu kilka możliwości. Najprostszą wydaje się następująca. Ważnym elementem strukturalnym algebry nieprzemiennej jest jej centrum. *Centrum* algebry $A$ jest, z definicji, zbiorem tych jej elementów, które mnożą się przemiennie z wszystkimi innymi elementami algebry $A$. Im mniejsze centrum, tym algebra „bardziej" nieprzemienna (w szczególności centrum może być puste). Jeżeli centrum pokrywa się z całą algebrą, to mamy do czynienia z algebrą przemienną. Jeżeli przyjmujemy, że algebra rządząca „światem nieprzemiennym" (w naszych rozważaniach algebra $N$) ma niepuste centrum, to naturalnym wydaje się przypuszczenie, że przejście od poziomu Plancka do świata makroskopowego polega na zacieśnieniu algebry do jej centrum. Proces ten matematycznie można realizować na różne sposoby. Jego szczegóły musiałyby zostać opracowane przez bardziej konkretne modele.

## 7. UWAGI FILOZOFICZNE

Niezależnie od tego, czy przedstawione w niniejszym artykule matematyczne prawidłowości znajdą zastosowanie w pracach nad stworzeniem ostatecznej teorii fizycznej czy nie, prowadzą one do pewnych wniosków, które zdają się mieć pewne znaczenie z punktu widzenia filozofii nauki. I tak ukazują one ciekawe mechanizmy ewolucji pojęć matematycznych i możliwości ich zastosowań do badania świata. Przy przejściu od zwykłej geometrii do geometrii nieprzemiennej uderza nie tylko ogromny stopień uogólnienia, lecz także daleko idąca unifikacja pojęć od siebie dotychczas niezależnych. Wiąże się z tym coraz większy stopień abstrakcji i odejście od poglądowości. Całkiem jeszcze niedawno pomysł przestrzeni bez pojęcia punktu wydawałby się nam wręcz sprzeczny i niewykluczone, że przy tradycyjnym rozumieniu pojęć takim byłby istotnie; dziś pojęcia uległy ewolucji do tego stopnia, że bezpunktowe przestrzenie stają się już coraz bardziej powszechnym narzędziem matematycznym.

Stosowanie coraz mniej intuicyjnych pojęć do teorii fizycznych nie jest czymś nowym. Istotny przełom pod tym względem zawdzięczamy mechanice kwantowej. To ona, w stopniu dotychczas niespotykanym, wymusiła na nas odejście od pojęć i metod tak dobrze zadomowionych w fizyce klasycznej, że braliśmy je za naturalne kategorie rzeczywistości. Warto w tym miejscu przypomnieć sobie wysiłki Kanta, który powołał do bytu cały misterny system filozoficzny, aby uzasadnić, że poza „klasycznymi kategoriami poznawczymi" nie może być żadnych innych. Proces odchodzenia od intuicyjności we współczesnej fizyce postępuje nadal. Coraz większa penetracja metod nieprzemiennych do różnych działów fizyki, zwłaszcza do poszukiwań teorii fundamentalnej, jest tylko jego dalszym ciągiem.

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga o charakterze ogólnopoznawczym. Skuteczność coraz mniej intuicyjnych pojęć w badaniu świata mówi coś o samym świecie. Jego struktura nie jest przystosowana do naszego bezpośredniego poznania. Ludzkie kategorie poznawcze wytworzyły się w ewolucyjnym kontakcie ze światem makroskopowym i wcale nie muszą być przystosowane do poznawania świata w jego obszarach mikroskopowych i kosmicznych. Raczej godnym filozoficznego zdziwienia powinien nam się wydawać fakt, iż potrafiliśmy stworzyć narzędzia poznawcze, którym ulega struktura świata wykraczająca poza granice naszego makroskopowego środowiska.

*Pasierbiec, 7 stycznia 2003*