

Marek Szydłowski, Adam Krawiec

Złożone zachowanie prostych układów nieliniowych

Tradycyjnie, złożoność układów deterministycznych przypisywana była złożoności samej natury tych układów albo zewnętrznym szumom. W problemie N grawitujących ciał wynikałaby ona np. z faktu, że mamy dużą liczbę ciał. Ostatnie osiągnięcia teorii układów dynamicznych wydają się jednak prowadzić do zgoła odmiennego poglądu. Proste układy deterministyczne mogą wykazywać granicznie złożone (chaotyczne lub turbulентne) zachowanie. Fakt ten spowodował olbrzymi wzrost zainteresowania problemami z dziedziny teorii układów dynamicznych i zaowocował mnogością zastosowań w prawie każdej dziedzinie nauki, od kosmologii po ekologię. Naszym zamiarem jest nie tyle pedantyczne przedstawienie pojęć i twierdzeń matematycznych, co wzbudzenie intuicji i pokazanie możliwych zastosowań. Pokażemy, jak ewoluowało pojęcie złożoności w dynamice. Materiał pracy będzie ilustrowany przykładami z różnych dziedzin fizyki i filozofii nauki. Dla dalszego zapoznania się czytelnika z przedstawioną tematyką rekomendujemy literaturę [1]-[9], wśród których pozycje [1],[6]-[8] mają charakter popularnonaukowy.

Będziemy się interesować jedynie złożonością w czasowej ewolucji układów fizycznych. Problem złożoności przestrzennej układu jest o wiele trudniejszy i nie został jeszcze do końca dopracowany, dlatego nie będziemy go omawiać.

Obserwując dynamikę zjawisk fizycznych w różnych skalach czasowych i przestrzennych nieustannie stykamy się z zachowaniem, które zwykliśmy określać mianem zachowania nieregularnego, turbulентnego lub chaotycznego. Uświadamiając sobie rolę, jaką odgrywają procesy turbulентne w powstaniu obserwowalnych nieregularności we wszechświecie (takimi procesami są np. procesy przypadkowych mutacji w ewolucji biologicznej czy też turbulентnego transportu ciepła w układzie klimatycznym), możemy postawić pytanie, czy bez złożoności dynamicznej rozwinięłoby się życie w obserwowalnej formie.

Aby zrozumieć treść pojęcia złożoności we współczesnym paradygmacie dynamicznym, musimy się zapoznać z pewnymi pojęciami i faktami użytecznymi dla dalszych rozważań.

Modelem dynamicznym ciągłego procesu deterministycznego jest – ogólnie rzecz biorąc – układ dynamiczny, który może być z ciągłym bądź dyskretnym stanem. Czasami bardziej naturalny od ciągłego opisu dynamiki jest jej opis dyskretny, tj. zadany przez dyskretne odwzorowanie (mapę) typu: $x_{n+1} = f(x_n)$. W ogólnym wypadku x jest wektorem $x = (x^1, \dots, x^m)$, reprezentującym stan układu. Powyższa zależność określa, jak wartość zmiennej x w chwili $n+1$ zależy od jej wartości w chwili poprzedniej. Krokiem może być tu jakaś naturalna jednostka czasu: rok, miesiąc. Pomiędzy ciągłym a dyskretnym opisem dynamiki można ustalić odpowiedniość poprzez tzw. odwzorowanie Poincarégo. Wyobraźmy sobie trajektorię w przestrzeni stanów układu (przestrzeni fazowej), która przecina wielokrotnie pewną wybraną powierzchnię nachyloną do trajektorii (o wymiarze mniejszym o jeden). Odwzorowanie Poincarégo polega na przyporządkowaniu punktowi przecięcia trajektorii z tą płaszczyzną następnego punktu przecięcia. Odwzorowanie to jest więc naturalnym sposobem dyskretyzacji ciągłego problemu dynamicznego. Trajektorie w przestrzeni fazowej pozostawiają ślady na pewnej transwersalnej powierzchni, którą nazywamy przekrojem Poincarégo (rys. 1).

Alternatywą dla dyskretnego opisu dynamiki procesów jest opis ciągły. Polega on na znalezieniu odpowiedniego układu dynamicznego, przez który będziemy rozumieć układ równań różniczkowych o postaci:

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i = F^i(x^i) \quad (1)$$

gdzie $F^i(x^i)$ są funkcjami gładkimi swojego argumentu.

W różnych zastosowaniach zmienne x^i mogą reprezentować dowolne wielkości fizyczne, np. zmienną pozycyjną w opisie problemu ruchu, koncentrację i -tego składnika w reakcji chemicznej, czy licznosc i -tej populacji jakiegoś gatunku. Wielkości dx^i/dt reprezentują wtedy chwilowe szybkości zmian tych zmiennych w czasie. Czas reprezentujemy tu zmienną t . W definicji (1) żądamy, aby funkcje F^i nie zależały *explicite* od czasu. O takim układzie będziemy mówić, że jest autonomicznym układem dynamicznym.

Użytecznym sposobem wizualizacji rozwiązań układu (1) $x^i(t, x_0)$ jest tzw. przestrzeń fazowa, będąca n -wymiarową przestrzenią, której punkty reprezentują stan układu w ustalonej chwili czasu. Rozwiązanie $x^i(t, x_0)$ układu (1) tworzy w tej przestrzeni pewną krzywą, którą nazywamy *krzywą fazową układu* albo *trajektorią fazową układu*. Odwzorowanie $t \rightarrow x^i(t, x_0) \equiv x^i_i(x_0)$ definiuje pewien ruch wzdłuż tej krzywej. Na rozwiązanie układu (1) przy ustalonym punkcie początkowym x_0 możemy zatem patrzeć jako na odwzorowanie przyporządkowujące punktowi

początkowemu x_0 jego położenie na krzywej fazowej po upływie czasu t , tj. $x^i(t, x_0)$. Ten ruch nazywa się *potokiem fazowym*. Z fundamentalnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu (1) wynika, że trajektorie fazowe tego układu nie mogą się przecinać.

Rozwiązania układu (1) są zdeterminowane poprzez wybór warunków początkowych. Ponieważ zwykle w eksperymencie warunki początkowe znane są jedynie ze skończoną dokładnością (np., dlatego, że każdy pomiar jest obarczony błędem), pożądana jest znajomość rodziny rozwiązań dla różnych warunków początkowych. Gdy wyznaczmy rozwiązania układu (1) dla wszystkich warunków początkowych w przestrzeni fazowej, uzyskamy pewien zbiór krzywych fazowych tworzących tzw. portret fazowy.

Wśród rozwiązań układu istnieją tzw. osobliwe rozwiązania odpowiadające zerowaniu się prawych stron, tj. $\forall i F^i(x^j) = 0$. Na płaszczyźnie fazowej rozwiązania te są reprezentowane przez tzw. punkty krytyczne (albo punkty osobliwe) układu. Fizycznie punkty te odpowiadają położeniom równowagi układu.

Układ dynamiczny może być również zadany poprzez pole wektorowe zbudowane z prawych stron tego układu, tj. $[F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^n(x^1, \dots, x^n)]$. Podstawowy problem teorii układów dynamicznych polega na wyznaczeniu trajektorii dla uzyskania portretu fazowego – globalnego obrazu dynamiki. O samym układzie dynamicznym możemy myśleć jako o zbiorze krzywych fazowych, albo też jako o polu wektorowym posiadającym tę własność, że jest ono styczne do krzywych fazowych we wszystkich ich punktach. Problem wyznaczenia trajektorii układu z gładkiego pola wektorowego nazywa się *całkowaniem układu*. Od czasów Newtona, Leibniza i Eulera ważne było znajdowanie krzywych całkowych przy rozwiązywaniu różnorodnych problemów dynamicznych w fizyce.

Czasami model przestrzeni fazowej w postaci n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest niewystarczający. Wtedy konieczne jest wprowadzenie jako przestrzeni fazowej pewnej przestrzeni zakrzywionej (w ogólności różniczkowej). Np. ruch układu hamiltonowskiego dla zadanej energii całkowitej E odbywa się na powierzchni zadanej przez więź hamiltonowski $H = E = \text{const}$. Hamiltonian, który jest pewną funkcją pędów i położeń, spełniającą równania Hamiltona, wytycza pewną powierzchnię w przestrzeni fazowej. Powierzchnia ta jest różniczkowo gładką i ponieważ na ogół jest ona zakrzywiona, wektor prędkości nie będzie w niej zawarty. Wektory styczne w każdym jej punkcie rekonstruują tę powierzchnię w taki sposób, że są do niej styczne wzdłuż krzywej całkowej.

Rozważmy ewolucję kropli fazowej elementarnej objętości w przestrzeni stanów. Dla układów hamiltonowskich kropla ta będzie wprawdzie zmieniała swój kształt, jednak jej objętość będzie zachowana. Na trajektorie układu możemy patrzeć jako na pewien przepływ nieściśliwej cieczy. O układach, dla których objętość przestrzeni fazowej jest zachowana, mówimy, że są zachowawcze. Gdy względna prędkość zmian objętości kropli fazowej w pewnym obszarze przestrzeni fazowej jest mniejsza od

zera, odpowiedni układ będziemy nazywać *dyssypatywnym*. W tym wypadku stabilne położenia równowagi tworzą w przestrzeni fazowej zbiory niższego wymiaru. Takie zbiory nazywa się *atraktorami*.

W konstrukcji portretów fazowych ważną rolę odgrywają układy liniowe. Wynika to stąd, że lokalnie zachowanie układów nieliniowych w otoczeniu ich punktów krytycznych jest dobrze aproksymowane przez ich główną część liniową.

Przykład 1. Problem dwóch teorii z oddziaływaniem informacyjnym

Rozważmy dwie konkurencyjne teorie naukowe wyjaśniające te same fakty. Niech $I_1(t)$ będzie zbiorem danych informacyjnych, które przemawiają na korzyść teorii T_1 (zbiór danych empirycznych, liczba uczonych akceptujących tę teorię, liczba prac stworzonych na podstawie tej teorii), zaś $I_2(t)$ zbiorem danych informacyjnych, które przemawiają na korzyść teorii T_2 .

Aby lepiej zrozumieć mechanizmy koegzystencji tych teorii będziemy starali się wyjaśnić przede wszystkim jakościowe (a nie ilościowe) aspekty układu opisującego mechanizm ich oddziaływania.

Gdy mamy do czynienia z tylko jedną teorią T_1 , strumień informacyjny jest opisywany krzywą logistyczną, tj. równaniem $I_1 = I_1(a_1 - b_1 I_1)$, gdzie a_1, b_1 są stałymi zależnymi od kreatywności nowych rezultatów i ich starzenia się, charakterystycznymi dla danej teorii.

Gdy mamy do czynienia z dwoma konkurencyjnymi teoriami musimy uwzględnić oddziaływanie między nimi. Na przykład wyniki świadczące na korzyść jednej, będą falsyfikowały teorię alternatywną i *vice versa*. Najprościej jest założyć, że to oddziaływanie jest proporcjonalne do iloczynu $I_1 I_2$. Wówczas dynamika zmian strumieni informacyjnych opisywana jest przez autonomiczny układ dynamiczny o postaci:

$$\frac{dI_1}{dt} = a_1 I_1 - b_1 I_1^2 - c_1 I_1 I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = a_2 I_2 - b_2 I_2^2 - c_2 I_1 I_2$$

Gdy $b_1 = b_2 = 0$, to otrzymany układ jest układem Lotki-Volterra, znanym także jako układ drapieżca-ofiara. Gdy $b_1 b_2 > c_1 c_2$, to czynniki wewnętrzne b_1 i b_2 dominują nad czynnikami c_1 i c_2 , opisującymi wpływ jednej teorii nad drugą. Układ wówczas jest stabilny, a teorie T_1 i T_2 koegzystują. W przeciwnym wypadku, gdy $b_1 b_2 < c_1 c_2$, główną rolę odgrywa antagonizm między teoriami. Układ staje się niestabilny – «przeżywa» jedna z tych teorii. Która z nich «przeżyje» zależy od warunków początkowych.

Z powyższej analizy widzimy, jakie są dopuszczalne stany finalne w dwóch teoriach z oddziaływaniem informacyjnym. Rozważmy dwie konkurencyjne teorie rozwoju nauki, teorię Kuhna i teorię Poppera. W tej chwili nie potrafimy powiedzieć, która z tych teorii jest prawdziwa, ponieważ analiza przypadków z historii nauki nie dostarcza nam argumentów na rzecz którejś z nich.

Podstawy teorii układów dynamicznych na płaszczyźnie zostały sformułowane w klasycznych pracach Poincarégo i Bendixona jeszcze na początku XX wieku (w związku z zagadnieniami mechaniki nieba). W ich pracach zbudowana została (we współczesnej postaci) jakościowa teoria autonomicznych układów dynamicznych na płaszczyźnie (por. [2]–[5]).

Podstawowy problem tej teorii polega na wyznaczeniu granicznych trajektorii przy $t \rightarrow \pm \infty$ oraz rozbiciu płaszczyzny fazowej na komórki. W każdej z nich zachowanie się trajektorii fazowych jest jakościowo identyczne.

«Najprzyjemniejszą» własnością dla takich układów jest to, że w małym otoczeniu niezdegenerowanego punktu osobliwego (x_0, y_0) , dla którego wartości własne są niezerowe, zachowanie układu jest jakościowo równoważne zachowaniu trajektorii dla jego głównej części liniowej.

Charakter punktu krytycznego (x_0, y_0) jest zdeterminowany przez wartości własne macierzy linearyzacji układu A . Na rys. 2 przedstawiono klasyfikację punktów krytycznych układu w zależności od wartości własnych macierzy linearyzacji – liniowego przybliżenia układu.

Jednym z najważniejszych wyników jakościowej teorii układów na płaszczyźnie (do którego przywiązywano przesadną wagę) było twierdzenie Poincarégo-Bendixona, które można sformułować w następujący sposób: dla autonomicznego układu dynamicznego na płaszczyźnie, jeśli jego rozwiązania pozostają w skończonym obszarze płaszczyzny i nie przybliżają się do żadnych położeń równowagi, to są albo orbitą zamkniętą, albo taką orbitę osiągną. W praktyce twierdzenie to interpretowano jako głośzące, że ciągle, dwuwymiarowe układy dynamiczne posiadają albo położenia równowagi, albo trajektorie okresowe. Na płaszczyźnie nie ma miejsca dla innego (np. złożonego czy nieregularnego) zachowania. Na dalszym rozumieniu pojęcia złożoności w układach dynamicznych zaważył «syndrom płaskości», polegający na myśleniu w kategoriach własności układów na płaszczyźnie.

Przejawem tego stylu myślenia był tzw. scenariusz Landaua-Hopfa powstawania turbulencji w układzie. Tą ostatnią próbowano wyjaśnić jako superpozycję ruchów okresowych o dużej liczbie częstości składowych. Rozważmy ciecz lepką, której ruch jest opisywany przez równania Naviera-Stokesa. Równania te posiadają symetrię skalowania, stąd inżynier w laboratorium może badać model samolotu w tunelu aerodynamicznym i wyciągać wnioski dotyczące rzeczywistego obiektu. Niezmiennikiem tych przekształceń skalowania jest tzw. liczba Reynoldsa. Gdy ciecz przepływa przez rurę o charakterystycznym rozmiarze L z charakterystyczną prędkością v , wówczas liczba Reynoldsa jest proporcjonalna do iloczynu tych wielkości i odwrotnie proporcjonalna do tzw. lepkości kinematycznej.

Rozważmy ciecz lepką opływającą pewne ciało. Gdy zwiększamy liczbę Reynoldsa (pełniącą rolę parametru kontrolnego dla układu), zmienia się również charakter ruchu cieczy od stanu przepływu laminarnego do turbulencji, która przejawia się w postaci wirów. Jaki jest mechanizm powstawania turbulencji? Landau zapropono-

wał następujące wyjaśnienie: turbulencja jest superpozycją nieskończonej liczby ruchów periodycznych. Podstawowy mechanizm pojawiania się tych ruchów został nazwany *bifurkacją Hopfa*. W tym mechanizmie stacjonarny punkt przechodzi w trajektorię okresową i następnie przekształca się w węzeł otoczony cyklem granicznym (rys. 3). Hopf, analizując uproszczoną wersję równań Naviera-Stokesa pokazał, że równania te przewidują istnienie takiego mechanizmu. Wraz z dalszym wzrostem parametru kontrolnego (liczby Reynoldsa) układ przechodzi przez szereg bifurkacji Hopfa, z których każda produkuje nową częstość i ostatecznie tworzy to ruch z olbrzymią liczbą częstości składowych. Dla każdej cząstki cieczy pole jej prędkości przyjmuje po n bifurkacjach ogólną postać: $v(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t)$. Tutaj f jest funkcją okresową o okresie 2π względem każdej z niewspółmiernych (charakterystycznych) częstości składowych ω_j . W scenariuszu Landaua turbulencja jest granicą nieskończonego ciągu niestabilności. Jego rozumowanie opierało się na powszechnym stereotypie: złożoność zachowania może występować jedynie w granicznie złożonym układzie. Turbulencja jest granicą nieskończonego ciągu niestabilności, ponieważ dla ruchu quasi-periodycznego o N częstościach składowych niewspółmiernych funkcja autokorelacji (czyli miara pamięci o początkowym stanie układu), maleje jak $1/\sqrt{N}$. Gdyby N było skończone, układ «pamiętałby» o swoich warunkach początkowych, podczas gdy dla układów chaotycznych czy turbulentnych charakterystyczne jest «zapominanie przeszłości».

Procesy przejścia od ruchu regularnego do turbulentnego możemy zaobserwować podczas ruchu lepkiej nieściśliwej cieczy (np. wody w rurze). Jeśli prędkość cieczy jest dostatecznie mała, obserwujemy jej laminarny ruch i ciecz porusza się regularnie wzdłuż linii prądu. Gdy jednak prędkość będzie odpowiednio duża, obserwujemy niestabilny, turbulentny przepływ, w którym chwilowe prędkości lokalne cieczy i jej ciśnienie zmieniają się w sposób chaotyczny w czasie. Woda wypływająca z kranu będzie wypływała ruchem laminarnym dopóki siły bezwładności nie zniszczą sił napięcia powierzchniowego. Dym z papierosa unosi się do pewnej wysokości w sposób regularny by potem tworzyć silnie nieregularny, turbulentny przepływ.

Ruelle i Takens w 1971 r. oraz Newhouse i inni w 1978 r. [5] sformułowali alternatywny do Landauowskiego scenariusz przejścia do turbulencji, analizując układy dysypatywne (teoria Landaua opierała się na ruchach quasi-periodycznych, naturalnych dla układów zachowawczych). Pokazali oni, że już po dwóch niestabilnościach w trzeciej bifurkacji trajektorie są przyciągane do ograniczonego obszaru przestrzeni fazowej, który nazwali *dziwnym atraktorem*. Wchodząc do niego trajektorie «zapominają» o swoich warunkach początkowych, dlatego atraktor nazywa się *dziwnym*. Takie atraktory mogą być traktowane jako stany stacjonarne, chociaż nie mają charakteru punktowego i są jakby «rozmażane» po całej przestrzeni fazowej. W obszarze atraktora początkowo bliskie trajektorie rozbiegają się eksponencjalnie (są silnie niestabilne). Asymptotycznie w długim okresie czasu ruch staje się chaotyczny i nieprzewidywalny. Tę wewnętrzną własność układu nazywamy *nadwrażliwością na małe zmiany warunków początkowych*.

Sformułowanie nowego paradygmatu złożoności we współczesnej nauce w odniesieniu do badania układów dynamicznych nastąpiło dopiero po uświadomieniu sobie, że krańcowo złożone zachowanie dynamiki – niemożliwe w dwóch wymiarach – jest możliwe już w trzech wymiarach. W teorii układów dynamicznych sformułowano wiele ważnych pojęć pozostających w bliskim związku z fizyką.

Jednym z takich pojęć jest pojęcie strukturalnej stabilności. Zasada powtarzalności eksperymentu głosi, że ten sam eksperyment powtórzony w takich samych warunkach, powinien dawać identyczny wynik. Oczywiście nigdy nie możemy zapewnić identycznych warunków eksperymentu, dlatego praktycznie przez „powtarzalność eksperymentu” rozumie się to, że dostatecznie małe zaburzenia warunków eksperymentu nie powinny w sposób istotny odbić się na wynikach pomiaru. Wynika stąd, że matematyczny opis zjawisk powinien charakteryzować się swego rodzaju nieczułością na wpływ małych zaburzeń warunków eksperymentu. Matematyczne sformułowanie tej zasady prowadzi do pojęcia strukturalnej stabilności, którą nieformalnie możemy określić następująco: układ dynamiczny nazywamy *strukturalnie stabilnym*, jeśli dla dostatecznie małej zmiany wektora prędkości fazowej powstały układ jest równoważny układowi wyjściowemu.

W definicji strukturalnej stabilności występują więc następujące dwa elementy:

- 1) dopuszczalny rodzaj zaburzeń;
- 2) pojęcie równoważności układu.

W teorii układów dynamicznych równoważność przyjmuje formę równoważności topologicznej: żąda się, aby istniał homeomorfizm przestrzeni fazowych, zachowujący orientację krzywych fazowych. Dopuszczalne zaburzenia prawych stron układu są małymi co do wartości tych funkcji i ich pochodnych. Peixoto udowodnił, że w przestrzeni układów dynamicznych na płaszczyźnie układy strukturalnie stabilne są typowe, ponieważ tworzą otwarte i gęste podzbiory. Twierdzenie to, dowodząc typowości układów stabilnych strukturalnie, w istocie jeszcze wzmocniło stary paradygmat myślenia w kategoriach płaszczyzny. Sądzono, że „istnieć” znaczy „być strukturalnie stabilnym”. Wydawało się, że scenariusz Landaua jest poprawny, ponieważ sądzono, iż podobnie jak na płaszczyźnie cykl graniczny jest strukturalnie stabilny, tak też strukturalnie stabilny będzie ruch wielookresowy o n częstościach składowych.

Zwrot nastąpił, gdy Smale w 1964 r. skonstruował pewien geometryczny przykład (równoważny trójwymiarowemu układowi dynamicznemu), który był strukturalnie stabilny i jednocześnie wykazywał krańcowo złożony typ zachowania – «izomorficzny» ze zjawiskiem rzutu monetą. Trajektorie układu leżą wówczas w przestrzeni fazowej na pewnych zbiorach $M \times \{\text{fraktal}\}$ (fraktal jest zbiorem typu zbioru Cantora o własnościach samopodobieństwa) (por. [2]).

Mimo tego fundamentalnego wyniku Smale’a, zwolennicy starego paradygmatu podjęli jeszcze raz próbę wykazania, że układy strukturalnie stabilne są typowe w trzech wymiarach. Gdyby tak było, można by pokusić się o klasyfikację takich układów poprzez podanie charakterystycznych typów zachowań, podobnie jak jest to

możliwe na płaszczyźnie. Smale w r. 1965 udowodnił jednak coś zupełnie przeciwnego, a mianowicie wykazał, że dla wymiaru $n \geq 3$ istnieją układy, w otoczeniu których nie istnieje żaden układ strukturalnie stabilny. Ostatecznie dowodzi to, że pomimo iż można wyróżnić pewne punkty krytyczne w trzech wymiarach, to problem zupełnej klasyfikacji topologicznej układów dynamicznych ($n \geq 3$) jest nierozwiązalny z samej natury. W przestrzeni układów dynamicznych istnieją całe obszary wolne od układów strukturalnie stabilnych, a małe zaburzenie nie musi nas konieczne zaprowadzić w obszar strukturalnie stabilny. Okazuje się, iż niskowymiarowe ($n \geq 3$) a więc proste układy dynamiczne, mogą wykazywać bardzo złożony, nieregularny typ zachowania, co prowadzi do ostatecznego odrzucenia starego paradygmatu.

Zastanówmy się, dlaczego nie było to możliwe w dwóch wymiarach. Mówiąc w pewnym skrócie, dzieje się tak dlatego, że w ograniczonym obszarze na płaszczyźnie takie chaotyczne trajektorie musiałyby się samoprzecinać, co jest wykluczone przez twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań układu (1) (zob. rys. 4). W wyższych wymiarach takie samoprzecięcia nie są konieczne, i istnienie zapętłonych i ograniczonych trajektorii fazowych staje się możliwe. Złożoność rodzi się w układzie deterministycznym (w sensie Laplace'owskim), a więc w układzie, w którym poprzez równania ewolucyjne potrafimy wyznaczyć jego stan w dowolnej chwili (jeśli znamy warunki początkowe). Z definicji tej wynika, że źródło nieprzewidywalnego zachowania w układzie deterministycznym może leżeć albo w nieprecyzyjnym określeniu danych początkowych, albo w niestabilności układu.

Każdy pomiar jest obarczony błędem. Nieoznaczoność w określeniu danych jest więc czymś realnym. Zachowanie się układów fizycznych zależy od wewnętrznej własności dynamiki, w którą może być wmontowany pewien nieliniowy mechanizm, rozsadzający eksponencjalnie błędy początkowe – mechanizm globalnej niestabilności (ta własność odnosi się do wszystkich trajektorii układu). Pociąga to własność nadwrażliwej czułości na zaburzenia warunków początkowych (WNC).

Zanim zilustrujemy to zjawisko na przykładach, zauważmy, że układy z chaosem były obecne w fizyce od dawna. Nie były one jednak proste.

Historia ich odkrycia nie obyła się bez dramatów. Boltzmann postawił sobie za cel wyprowadzenie praw termodynamiki, a w szczególności prawa wzrostu entropii, wyłącznie z praw mechaniki klasycznej. Jako model idealnego gazu przyjął układ kulek ($N \gg 1$), które zderzają się ze sobą sprężysto. Dzisiaj taki model nazywa się *bilardem*. Układ dynamiczny, który opisuje ruch kulek jest opisywany przez $6N$ zmiennych (współrzędne i prędkości wszystkich kulek w przestrzeni trójwymiarowej). Przestrzeń fazowa będzie posiadać również $6N$ wymiarów. Całkowita energia układu jest zachowana i sam układ dynamiczny jest zachowawczy. Zderzenia są doskonale sprężyste, a ośrodkiem jest próżnia. Boltzmann pokazał, że pojęcie entropii można wyprowadzić z modelu mechanicznego i udowodnił jej nieodwracalny wzrost. Jest ona proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa zastania układu w określonym stanie. W swoich rachunkach Boltzmann wykorzystał hipotezę, iż punkty

poruszając się po trajektorii fazowej równomiernie wypełniają dopuszczalny dla ruchu obszar przestrzeni fazowej (hipoteza ergodyczna) [3]. Tę hipotezę nazywa się inaczej *hipotezą chaosu molekularnego*. Wyniki Boltzmanna weszły na stałe do fizyki, mimo to Boltzmann nie był z nich w pełni zadowolony. Jego przyjaciel, matematyk Zermelo, uważał, że Boltzmann musiał gdzieś popełnić błąd. Swoje przypuszczenie opierał na obserwacji, że jeśli wyjściowy układ równań jest odwracalny w czasie, to końcowy wynik (prawo wzrostu entropii) jest ewidentnie nieodwracalne. Musiałaby być więc naruszona symetria odbicia w czasie. Nie mogąc odpowiedzieć na postawiony zarzut, Boltzmann zastrzelił się.

Dalsza historia tego zagadnienia jest związana z nazwiskiem Ehrenfesta. Udało mu się maksymalnie ściśle sformułować Boltzmannowski problem złamania symetrii, ale również nie potrafił go rozwiązać i zastrzelił się. Rozwiązanie tego problemu zostało podane w r. 1948 przez młodego fizyka Kryłowa. Główna jego idea była następująca: symetria w układach dynamicznych może być naruszona i może zaistnieć molekularny chaos, jeśli dynamiczne rozwiązania układu są niestabilne. Kryłow przedwcześnie zmarł, a zagadnienie zostało ponownie podjęte przez matematyczną szkołę Kołmogorowa, Anosowa i Sinaja. Pokazali oni, że w problemie bilardu dowolna trajektoria układu jest niestabilna, tj. przestrzeń fazowa składa się wyłącznie z separatrys i nie posiada stanów stabilnych. Globalna niestabilność prowadzi do chaotycznego zachowania układu i wówczas cała dopuszczalna przestrzeń fazowa jest wypełniona równomiernie przez trajektorie. Takie układy nazywa się od nazwiska Kołmogorowa – *K-systemami*. W tej klasie układów nowego znaczenia nabiera pojęcie entropii jako miary niestabilności. Zjawisko łamania symetrii zwierciadlanego odbicia w czasie i powstawania nieodwracalności jest właśnie konsekwencją globalnej niestabilności.

Dla wystąpienia molekularnego chaosu koniecznym i wystarczającym warunkiem jest natomiast globalna niestabilność. Duża liczba cząstek nie jest natomiast ani koniecznym, ani wystarczającym warunkiem wystąpienia złożonego zachowania.

Dzisiaj Boltzmann mógłby odpowiedzieć Zermelowi i wskazać nie tylko przyczynę molekularnego chaosu, ale zakreślić również obszar stosowalności hipotezy ergodycznej. Wcześniej zakładano, że chaos molekularny jest wygodną formą opisu zjawisk, gdy nie możemy wyliczyć poszczególnych trajektorii. Zakładano przy tym w sposób niejawni, że gdybyśmy potrafili znaleźć takie trajektorie, to moglibyśmy dokładnie przewidywać zachowanie układu. Dzisiaj wiemy, że przy niestabilnym zachowaniu trajektorii przewidywanie jest niemożliwe. Twierdzenie to jest negatywne, jednak ma niezwykle znaczenie dla nauki, większe niż wiele innych pozytywnych twierdzeń. Teoria chaosu posiada zatem również znaczenie metodologiczne.

Rozważmy przykłady układów, których trajektorie posiadają WNC.

Przykład 2. Załóżmy, że stan naszego układu jest opisany przez liczbę z przedziału $(0,1)$. Ustalmy pewną ściśle deterministyczną regułę określającą kolejne stany układu

(tzw. dynamikę dyskretną, bo czas jest teraz dyskretny). Nieformalny opis dynamiki jest następujący: pomnóż przez 2 i zignoruj część całkowitą liczby. Matematycznym modelem dynamiki naszego procesu jest więc następujące równanie różnicowe

$$x_n \rightarrow x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}, \quad x_n \in (0,1).$$

Wyjściową liczbę x_0 wygodnie jest zapisać w systemie dwójkowym, tj. $x_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, gdzie a_i ($i=1,2,\dots$) są zerami albo jedynkami.

Działanie naszej maszyny pracującej według powyższego wzoru polega (w każdym kolejnym kroku) najpierw na przesunięciu ciągu w lewo (jest to wynik mnożenia przez 2), a następnie odrzuceniu jego pierwszego wyrazu (wynik wzięcia $\pmod{1}$). Widzimy więc, że jeden krok pracy maszyny kosztował nas utratę 1 bitu informacji o danej liczbie. Po n krokach tracimy zatem n bitów. Jeśli więc stan początkowy naszego układu został opisany liczbą z dokładnością do n miejsc po przecinku, po n krokach nie będziemy już o niej posiadać żadnej informacji. W szczególności nie będziemy wiedzieć, czy należy ona do przedziału $(0,1/2)$, czy $(1/2,1)$. Aby taką wiedzę zdobyć, musielibyśmy mieć bardziej szczegółowe informacje o stanie początkowym. Załóżmy, że stan układu jest liczbą rzeczywistą. Do komputera możemy jednak wpisać jedynie pewną liczbę wymierną i tym samym popełniamy błąd na samym początku. Jeśli np. porównamy liczbę π z jej przybliżeniem z dokładnością do n -tego miejsca, to po $n+1$ krokach te bliskie liczby będą się różnić znacznie, bo już na pierwszym miejscu. Okazuje się więc, że nawet gdy dynamika jest zdefiniowana poprzez pewną regułę deterministyczną, może się zdarzyć, że nie potrafimy powiedzieć, gdzie znajduje się liczba x_0 po n -iteracjach (gdy $n \rightarrow \infty$), tj. czy $x_n(x_{n-1}(\dots(x_0)))$ należy do lewej, czy do prawej połowy odcinka $(0,1)$. To, gdzie znajdą się kolejne iteracje punktu x_0 , będzie asymptotycznie zjawiskiem losowym – analogicznie do zjawiska rzutu monetą. Aby się o tym przekonać, wystarczy ustalić przyporządkowanie; 0 – orzeł, 1 – reszka. Szczegółową analizą układu, który opisuje Newtonowską dynamikę zakręconej monety spadającej w polu grawitacyjnym przy uwzględnieniu oporu powietrza na powierzchnię porowatej płyty przedstawiono w pracy Szydłowskiego i Śmiałka [9]. Ruch monety jest tam opisywany przez pewien układ dynamiczny. Gdy moneta spada z dostatecznie dużej wysokości, jej stany finalne ruchu – orzeł lub reszka – będą realizowane z prawdopodobieństwem $1/2$. Jest to konsekwencją WNC ze względu na małe zmiany początkowej prędkości kątowej.

Istota WNC leży w nieliniowości układu, co pozwala mu przejawiać złożone zachowanie w ograniczonym obszarze przestrzeni. Zachowanie to jest związane z tzw. własnością hiperboliczności, która jest uogólnieniem pojęcia stałego punktu hiperbolicznego. Jeśli układ posiada tę własność, to jego trajektorie będą rozciągane wzdłuż pewnych kierunków i jednocześnie ściskane wzdłuż innych. To z kolei gwarantuje ograniczoną rozciągłość i ich strukturalną stabilność. Quasi-periodyczny ruch – ze scenariusza Landaua powstawania turbulencji – nie posiada WNC i jest strukturalnie niestabilny.

Modelowym układem realizującym zjawisko WNC jest tzw. solenoid. Geometrycznie działanie tego odwzorowania polega na rozciąganiu jego długości przy jednoczesnym spłaszczeniu jego wymiaru poprzecznego, by następnie obwinąć nim oryginalny torus (rys. 5). Powtarzając taką operację wielokrotnie w granicy otrzymamy nieskończoną liczbę linii nawijających się na oryginalnym torusie, co tłumaczy użycie nazwy *solenoid*. Jest to prosty przykład układu o końcowo złożonym zachowaniu trajektorii. O powyższym odwzorowaniu możemy myśleć, że jest ono odwzorowaniem Poincarégo pełnego ruchu. Dlatego traktujemy odwzorowanie typu solenoidu jako pewien układ dynamiczny. Jego przekrój poprzeczny na płaszczyźnie jest zbiorem Cantora. Orbity na solenoidzie są stabilne i można ustalić ich odpowiedniość z ciągiem losowych zer i jedynek.

Największym odkryciem w ramach nowego paradygmatu dynamicznego było odkrycie prostych (niskowymiarowych) układów dynamicznych o złożonym zachowaniu. Historycznie pierwszym tego typu układem był układ Lorentza. Układ ten pojawił się w kontekście teoretycznego opisu tzw. eksperymentu Bénarda. W eksperymencie tym warstwa cieczy znajdująca się w polu grawitacyjnym jest podgrzewana od dołu. Ogrzana ciecz podnosi się z dołu do góry, a chłodna opada w dół. Ruchowi do góry przeciwdziałają siły lepkości. Przy małych różnicach temperatur między płytami ΔT siły lepkości dominują i ciecz pozostaje w spoczynku, natomiast transport ciepła odbywa się ze stałym przewodnictwem. Ten stan jest niestabilny i przy zwiększeniu liczby Reynoldsa R (proporcjonalnej do ΔT) powstają stacjonarne komórki konwekcyjne. Przy dalszym wzroście R obserwujemy przejście do chaotycznego ruchu. Układ Lorentza jest uproszczonym opisem dynamiki tego zjawiska i ma postać trójwymiarowego układu dynamicznego

Henon i Heiles, badając problem ruchu gwiazdy w zewnętrznym polu grawitacyjnym galaktyki eliptycznej, sprowadzili problem ruchu do badania hamiltonowskiego układu dynamicznego o dwóch stopniach swobody q_1 i q_2 .

Dla pokazania chaosu w tym układzie skonstruowali przekroje Poincarégo na płaszczyźnie wyznaczonej przez pęd i położenie (p_2, q_2) dla różnych wartości energii całkowitej E pełniąc rolę parametru kontrolnego. W miarę jak $E \rightarrow 1/6$, obserwujemy losowy rozkład punktów na płaszczyźnie (p_2, q_2) , co może być świadectwem chaotycznego zachowania (rys. 6).

Chaos może się pojawić w układach ciągłych jeśli wymiar przestrzeni fazowej wynosi co najmniej trzy. W układach dyskretnych ten wymiar minimalny wynosi jeden. Dynamika pola grawitacyjnego w otoczeniu osobliwości początkowej posiada charakter turbulentny, który daje się opisać przez taki jednowymiarowy układ, znany już Gaussowi. Złożone zachowanie może wystąpić już w wypadku jednowymiarowych nieodwracalnych układów dyskretnych. Przykładem takiego układu jest odwzorowanie logistyczne $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$.

Jak już podkreślono, warunkiem wystąpienia WNC jest rozciąganie i ściskanie ograniczonych trajektorii. Może być to zrealizowanie w dwóch wymiarach jedynie

wtedy, gdy zachodzi zagięcie trajektorii. W przeciwnym wypadku, gdybyśmy wystartowali z obszaru kwadratowego, gdyby nie było ściskania ze składaniem przestrzeni, skończylibyśmy na dowolnie długim cienkim pasku, w którym rozwiązania są nieograniczone.

W opisie chaosu można się posługiwać pewnymi wielkościami fenomenologicznymi, takimi jak: widma mocy, funkcje autokorelacji, przekroje Poincarégo. Chociaż wskaźniki te są powszechnie używane, wiadomo, że rozwiązania quasi-okresowe z dużą liczbą częstości mogą produkować efekty podobne do efektów obserwowanych dla chaosu deterministycznego. Bardziej precyzyjnym narzędziem wykrywania chaosu deterministycznego są tzw. wskaźniki Lapunowa. Wielkości te pierwotnie zostały użyte przez ich autora w r. 1890 do badania stabilności periodycznych orbit, ale dzisiaj pełnią inną rolę.

Wskaźniki Lapunowa informują nas – ogólnie rzecz biorąc – o średnim tempie rozbiegania się bliskich trajektorii. W układach zachowawczych z chaosem deterministycznym wystąpiły kierunki, wzdłuż których trajektorie rozbiegają się wykładniczo, tj. stanowią trajektorie, dla których wskaźniki Lapunowa są dodatnie. Ale będą również istniały kierunki, wzdłuż których trajektorie zbliżają się w tempie określonym przez ujemne wykładniki Lapunowa. Kropla fazowa, obrazująca ewolucję bliskich stanów początkowych układu, będzie zmieniała swój kształt, rozszerzając się i kurcząc zgodnie z wartościami dodatnich i ujemnych wskaźników Lapunowa. W trakcie ewolucji informacja o stanie początkowym układu będzie «zapominana». Miarą szybkości utraty tej informacji jest entropia dynamiczna, definiowana jako suma dodatnich wskaźników Lapunowa.

Spróbujmy w sposób bardziej nieformalny przyjrzeć się znaczeniu wskaźników Lapunowa w teorii chaosu. Każdy z nas posiada intuicję pojęcia stabilności lub niestabilności. Niestabilny jest np. stan ołówka stojącego na szpicu albo ruch kulki staczającej się po zboczu góry. Z kolei ruch tej kulki w dolinie będzie stabilny. Dokładniejszy wgląd w stabilność układu uzyskamy, jeśli zanalizujemy zachowanie małych odchyłeń od odpowiedniego rozwiązania (stanu stacjonarnego). W stanach stacjonarnych wartości zmiennych fazowych nie zmieniają się czasie. Jednakże małe odchylenia od stanów stacjonarnych $\delta x \equiv x^i(t) - x^i(t_0)$ będą już się zmieniać w czasie i tempo tych zmian będzie wyznaczone przez układ liniowych równań różniczkowych. Rozwiązania tych równań będą się wyrażać przez eksponenty typu $(\exp \lambda_i t)$, w których wystąpią liczby λ_i , będące wartościami własnymi macierzy linearyzacji. Liczby te są po prostu wskaźnikami Lapunowa. Jeśli wszystkie wskaźniki Lapunowa są ujemne, to stan układu jest stabilny. Jeśli chociażby jedna z wartości wskaźników Lapunowa była dodatnia, to stan układu jest niestabilny. Faktycznie wówczas odchylenia δx_i narastają w czasie. We wspomnianym przykładzie ołówka ustawionego na szpicu istnieje dodatnia wartość λ_i , równa w przybliżeniu 10 s^{-1} . Wobec tego w czasie 10 s początkowe odchylenie wzrośnie $e^{100} \approx 10^{40}$ razy. Znaczy to, że ołówek utrzyma się na szpicu przez 10 s,

jeśli początkowe odchylenie będzie mniejsze od 10^{-40} cm. Liczba ta jest mniejsza niż długość Plancka. Nie jest możliwe zadanie warunków początkowych z taką dokładnością.

W ogólnym wypadku wskaźniki Lapunowa mogą być zespolone. O stabilności stanów układu decydują wówczas części rzeczywiste tych wartości.

Analiza niestabilności ruchu układu opiera się na badaniu ewolucji małych odchyżeń od zadanej trajektorii (a nie punktu stacjonarnego). Wskaźniki Lapunowa nie są już w tym wypadku stałe i zależą od czasu. Trajektorie będą niestabilne, jeśli wśród wskaźników Lapunowa znajdzie się chociaż jeden, którego część rzeczywista jest dodatnia, przy $t \rightarrow \infty$. Podkreślimy ważną własność wskaźników Lapunowa – są one charakterystycznymi (albo własnymi) liczbami układu i nie zależą od warunków początkowych układu. W ten sposób stabilność albo niestabilność wyznaczona przy ich pomocy jest wewnętrzną własnością badanego układu, a nie wynikiem zewnętrznego oddziaływania. To właśnie z tego powodu wskaźniki Lapunowa nadają się do wykrywania chaosu.

Fakt istnienia prostych układów dynamicznych o złożonym zachowaniu każe nam poddać rewizji pewne pojęcia w fizyce, których znaczenie – jak się wydawało – było ustalone raz na zawsze. I tak np. dla niestabilnych układów traci sens pojęcie układu izolowanego. Konieczne jest nowe spojrzenie na pojęcie przyczynowości. Tego rodzaju zmiany są charakterystyczne dla nowego paradygmatu złożoności w dynamice. Chociaż wiemy, że istnienie chaosu deterministycznego w układach jest ich własnością typową, to musimy mieć świadomość, że jego efekty niekoniecznie mogą ujawniać się w interesujących nas skalach czasu. Ważna jest charakterystyczna Lapunowska skala czasowa $\lambda_{\text{Lap}}^{-1}$ i jej relacja do rozważanej skali czasowej. I tak dla przewidywania ruchu komety z dnia na dzień nie ma potrzeby uwzględniania tego typu efektów. Gdy rozważamy układ w skali dużo mniejszej od charakterystycznej skali czasowej, to będzie on przewidywalny, natomiast w skalach czasowych porównywalnych i większych od stałej charakterystycznej układ staje się nieprzewidywalny i prognozowanie długoterminowe staje się niemożliwe. Dlatego właśnie w mechanice nieba efekty chaosu będą ważne, gdy będziemy pytać o ostateczną przyszłość układu słonecznego.

Zastanówmy się na zakończenie nad pojęciem przyczynowości. Zwykle pod pojęciem przyczyny rozumiemy warunki początkowe, które zgodnie z dynamiką układu powadzą do określonego skutku. W tym języku znalezienie związku przyczynowego wymaga zrozumienia dynamiki poszczególnych procesów przejściowych. Cały czas *implicite* zakładamy, że przyczyna i skutek są współmierne (porównywalne). Dla stabilnych (albo tzw. neutralnie stabilnych, dla których części rzeczywiste są równe zeru) procesów przyczyna i skutek są zawsze współmierne. Natomiast dla układów niestabilnych sytuacja jest diametralnie różna. Bardzo mała przyczyna może prowadzić do skutku, którego skala jest nieporównywalna z przyczyną. Zwykle w takich sytuacjach najczęściej mówimy, że przyczyną niewspółmierności jest

niestabilność, a nie małe zaburzenie początkowe. Mamy tu do czynienia z istotnym przesunięciem pojęć: przyczyną staje się wewnętrzna własność układu, a nie zewnętrzne oddziaływanie. Ilustruje to następujący przykład.

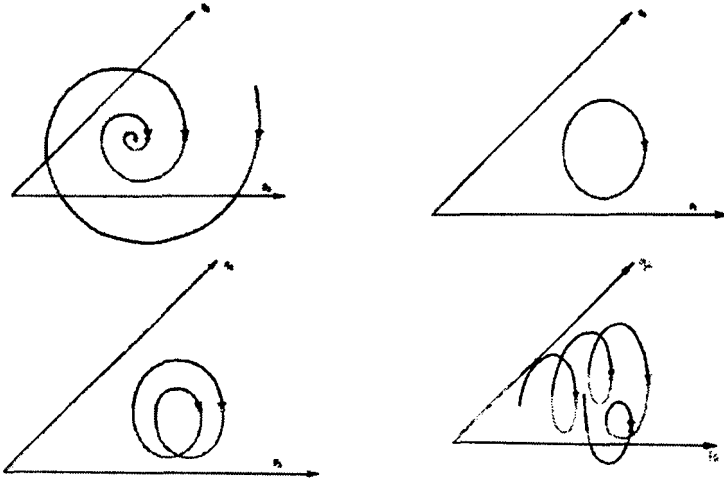
Rozważmy dwie sytuacje. W pierwszej butelka Bordeaux stoi na środku stołu (stan stabilny). Ktoś przechodzi koło stołu, nieostrożnym ruchem strąca ją i butelka się rozbija. Kto jest winien? Oczywiście winien jest człowiek, który strącił butelkę.

Rozważmy drugi wariant: ta sama butelka stoi tym razem na samym brzegu stołu (jej stan jest bliski niestabilnemu). Przelatuje mucha – butelka rozbija się. Kto jest tym razem winien? Nikt o zdrowych zmysłach nie obwini muchy za ten incydent. Powie raczej, że przyczyna zdarzenia leży w niestabilnym położeniu butelki. Winien jest ten, kto ją tam postawił. U podstaw twierdzenia „Zdarzenie zaszło przypadkowo” leży niestabilność układu dynamicznego. W analogiczny sposób własność WNC leży u podstaw złożonego zachowania układu.

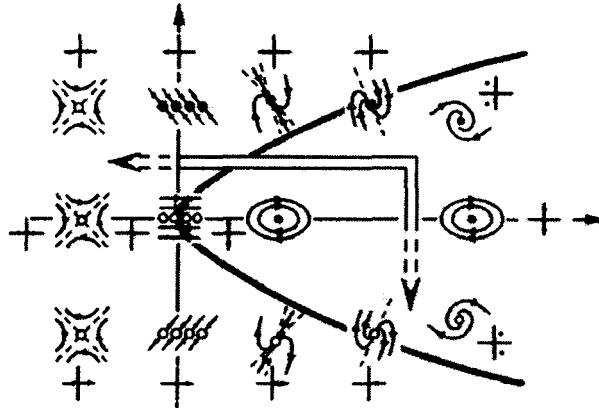
CYTOWANA LITERATURA

- [1] Gleick J., *Chaos: Making a New Chaos*, Viking Press, New York 1987. Tłum. pol.: *Chaos*. Zysk i S-ka, Poznań 1996.
- [2] Wiggins W., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York 1990.
- [3] Arnold V.I. i Avez A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York 1968.
- [4] Arnold V.I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1983.
- [5] Ruelle D., *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [6] Stewart I., *Czy Bóg gra w kości?* PWN, Warszawa 1994.
- [7] Biesiada M., „Chaos czy Kosmos?”, [w:] Z. Golda i M. Heller (red.), *Kosmos i filozofia*. OBI, Kraków 1994, s. 107–126.
- [8] Szydłowski M., „Czy Pan Bóg gra w kości?”, [w:] Z. Golda i M. Heller (red.), *Kosmos i filozofia*. OBI, Kraków 1994, s. 93–106.
- [9] Szydłowski M. i Śmiałek P., „Przypadek i konieczność” [w:] J. Życiński (red.), *Przestrzenie księdza Cogito*, Biblios, 1996, s. 67–87.

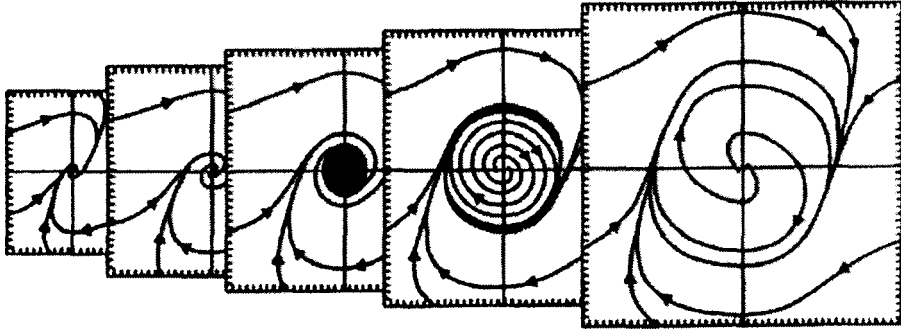
Rysunek 1. Przekroje Poincarégo na płaszczyźnie (p_2, q_2) dla układów charakteryzujących się (a) ruchem do punktu stacjonarnego, (b) ruchem cyklicznym, (c) ruchem okresowym o podwojonym okresie, (d) ruchem złożonym, chaotycznym.



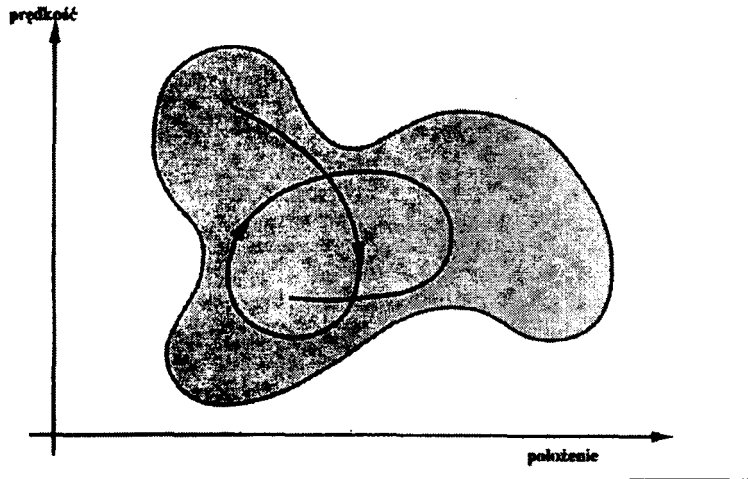
Rysunek 2. Klasyfikacja zachowań w otoczeniu punktów krytycznych dla układów na płaszczyźnie w zależności od śladu i wyznacznika macierzy linearyzacji układu w tym punkcie.



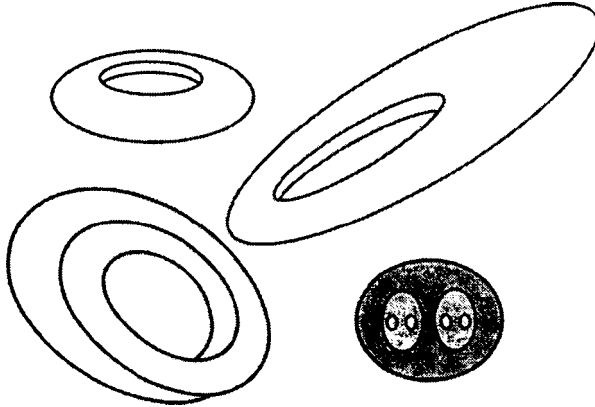
Rysunek 3. Powstawanie cyklu granicznego ze stacjonarnego stanu stabilnego w drodze bifurkacji Hopfa. Parametrem sterującym jest liczba Reynoldsa, wraz z której wzrostem obserwujemy kreację stabilnego cyklu granicznego.



Rysunek 4. Rysunek ilustruje dlaczego złożone zachowanie jest niemożliwe na płaszczyźnie, gdzie zapętlenie trajektorii musi prowadzić do samoprzecięcia.



Rysunek 5. Solenoid definiuje przekrój Poincarégo dla pewnego przepływu w czterowymiarowej przestrzeni. Solenoid jest efektem rozciągnięcia torusa wzdłuż jednego wymiaru i owinięcia go wokół samego siebie. Na przekroju poprzecznym otrzymamy zbiory fraktalne powtarzając konstrukcję *ad infinitum*.



Rysunek 6. Przekroje Poincarégo trajektorii układu Henona-Heilesa powierzchnią: $\Gamma_E = q_1 = 0$, $p_1 = (2E - p_2^2 - q_2^2 + \frac{1}{3}q_2^3)^{1/2}$. Badanie punktów przecięcia z tą powierzchnią może nam dostarczyć ważnych informacji o asymptotycznym zachowaniu układu. Na rysunkach obserwujemy koegzystencję obszarów, w których kolejne punkty przecięcia leżą wzdłuż krzywej (wtedy numerycznie liczone wskaźniki Lapunowa przyjmują wartości bliskie zeru) lub leżą w obszarze chaotycznym, gdzie punkty przecięcia rozkładają się przypadkowo. Gdy $E \rightarrow 0,123$ obserwujemy przejście do chaosu.

