Filozofia Nauki (*The Philosophy of Science*)
ISSN 1230-6894 e-ISSN 2657-5868
2021, vol. 29(1) [113]: 43-61
DOI: 10.14394/filnau.2021.0005

Maciej Głowacki*

CZY MATEMATYKA JEST SKŁADNIĄ JĘZYKA?
KURTA GÖDLA ARGUMENT PRZECIWKO FORMALIZMOWI**

Abstract

Is Mathematics Syntax of Language? Kurt Gödel's Argument against Formalism

In this paper, I critically examine Kurt Gödel's argument against the syntactic interpretation of mathematics. While the main aim is to analyze the argument, I also wish to underscore the relevance of the original elements of Gödel's philosophical thought. The paper consists of four parts. In the first part, I introduce the reader to Gödel's philosophy. In the second part, I reconstruct the formalist stance in the philosophy of mathematics, which is the object of Gödel's criticism. In the third part, I sketch his argument against the syntactic interpretation of mathematics. Finally, I discuss some controversies regarding the argument.

Keywords: Kurt Gödel, formalism, syntactic interpretation of mathematics, Rudolf Carnap, platonism

Celem artykułu jest krytyczna analiza argumentu Kurta Gödla przeciwko Syntaktycznej Interpretacji Matematyki (SIM). Poza głównym zadaniem, którym jest analiza konkretnego argumentu, artykuł ma pokazać aktualność oryginalnych elementów myśli filozoficznej Gödla, słabo znanej szerszemu gronu czytelników. Tekst składa się z czterech części. W pierwszej z nich przybliżam postać Gödla jako filozofa. W drugiej rekonstruuję stanowisko formalistyczne, które jest przedmiotem jego krytyki, a w trzeciej przedstawiam argument, który wysuwa przeciwko SIM. W ostatniej części omawiam zarzuty wysuwane wobec argumentacji Gödla. Rozważam także, czy któryś z przedstawicieli formalizmu w filozofii matematyki rzeczywiście przyjmował atakowaną przez niego teorię.

* Wydział Filozofii, Uniwersytet Warszawski, ul. Krakowskie Przedmieście 3, 00-927 Warszawa, e-mail: m.glowacki6@uw.edu.pl, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6678-7107.

** Dziękuję Marcinowi Porębie, Michałowi Pawłowskiemu oraz anonimowym recenzentkom lub recenzentom „Filozofii Nauki” za cenne uwagi do wcześniejszych wersji tekstu.

Swoją analizę opieram przede wszystkim na dwóch opublikowanych pośmiertnie tekstach Gödla: zapisie jego wykładu im. Gibbsa z 1951 roku pt. *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących* (1951/2018) oraz tekście *Is Mathematics Syntax of Language?* (1953/1995), przygotowywanym do tomu poświęconego filozofii Carnapa (Schlipp 1963)[1].

1. POGLĄDY FILOZOFICZNE KURTA GÖDLA

Kurt Gödel był bez wątpienia jednym z najwybitniejszych logików w historii. Do jego najbardziej znanych osiągnięć należą dowody twierdzenia o pełności (Gödel 1929/1986), dwóch twierdzeń o niezupełności arytmetyki (Gödel 1931/1986) oraz twierdzenia o względnej niesprzeczności hipotezy continuum z teorią mnogości Zermela–Fraenkla (Gödel 1939/1990)[2]. Sławę zarówno wśród logików, jak i filozofów przyniosło mu zwłaszcza drugie z wymienionych osiągnięć — pokazanie, że każda niesprzeczna, rekurencyjnie aksjomatyzowalna teoria matematyczna, wystarczająco silna, by wyrazić elementarną arytmetykę, zawiera zdania od niej niezależne. Wynik Gödla zawiera dwa powiązane ze sobą twierdzenia. Pierwsze z nich głosi, że w każdej teorii, która jest w stanie sformalizować podstawowe pojęcia syntaktyczne, takie jak ciąg symboli, zdanie, formuła czy dowód[3], istnieje zdanie, które nie jest ani dowodliwe, ani możliwe do obalenia w ramach tej teorii. Co więcej, dowód tego twierdzenia polega na konstrukcji takiego zdania dla danej teorii. Drugie twierdzenie mówi, że teoria taka nie może udowodnić własnej niesprzeczności[4]. Niesprzeczność teorii, czyli niemożliwość wywiedzenia żadnego zdania sprzecznego z jej aksjomatów, jest pojęciem syntaktycznym. Jako takie jest możliwe do wyrażenia przez pewne konkretne zdanie teorii, która jest w stanie sformalizować swoją własną składnię.

---

[1] Gödel napisał co najmniej sześć wersji tego artykułu, ale nie wysłał go nigdy do publikacji (Goldfarb 1995: 324). Powodem niechęci Gödla do opublikowania artykułu miało być to, że w jego przekonaniu praca „dowodzi, że matematyka *nie* jest składnią języka. Nie udało się dowieść pozytywnego twierdzenia, czym matematyka jest" (Wang 1996: 174).

[2] Twierdzenie to zostało uzupełnione przez wynik Paula Cohena z 1963 r., który udowodnił, że również negacja hipotezy continuum jest niesprzeczna z teorią mnogości ZF. W połączeniu twierdzenia te składają się na tezę o niezależności hipotezy continuum od tej teorii.

[3] Przykładami takich teorii są np. skończona teoria mnogości, arytmetyka Peana, arytmetyka Robinsona, a także każda teoria zdolna je zinterpretować.

[4] Gwoli ścisłości należy zauważyć, że II Twierdzenie Gödla zostało przez niego jedynie zaanonsowane w (Gödel 1931/1986: 191-195). Sam Gödel nie przedstawił tam jego pełnego dowodu. Dziękuję za zwrócenie mi uwagi na ten fakt w recenzji.

Dzięki technikom kodowania składni w języku matematycznym odpowiednio silna teoria formalna może dowodzić twierdzeń o sobie samej. Wykorzystując je, Gödel pokazał niedowodliwość zdania stwierdzającego niesprzeczność teorii.

Mimo że Gödel jest najbardziej znany ze swoich osiągnięć matematycznych, które stały się podstawą współczesnej logiki matematycznej, sam przez większość życia uważał filozofię za najważniejszą dziedzinę swoich badań (Wang 1996: 25). Napisał wiele tekstów o charakterze filozoficznym, z których jednak ostatecznie zdecydował się opublikować tylko nieliczne. Przesądził o tym przede wszystkim charakter Gödla i jego wysokie wymagania dotyczące klarowności i ścisłości wywodu. Z większości swoich tekstów filozoficznych był niezadowolony, ponieważ nie były w stanie sprostać wymogom ścisłości podobnym do tych, które stawiał pracom z zakresu matematyki (Wang 1996: 64-65). Dlatego wiele tekstów Gödla doczekało się wydania dopiero po jego śmierci, pod koniec XX wieku. Prace te są napisane trudnym w odbiorze stylem i zawierają liczne odwołania do wyników formalnych. Nie stanowią więc przedmiotu łatwej filozoficznej interpretacji. Trudność w odbiorze tekstów Gödla oraz stosunkowo niedawna data ich publikacji odpowiadają zapewne za fakt, że przedstawiane przez niego idee filozoficzne rzadko pojawiają się we współczesnych debatach[5].

Wspomniana niechęć Gödla do publikacji własnych osiągnięć filozoficznych brała się z przekonania, że filozofia może oraz powinna osiągnąć ścisłość i klarowność wywodu właściwą naukom matematycznym. Hao Wang w książce *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* przytacza następującą opinię Gödla:

> Filozofia jako nauka ścisła powinna przyczynić się do rozwoju fizyki w takim stopniu jak dzieło Newtona. Sądzę, że jest możliwe, iż taka teoria filozoficzna zostanie stworzona w ciągu najbliższych 100 lat lub wcześniej (Wang 1996: 233, cyt. za Skowron, Wójtowicz 2020: 226).

Pośmiertnie wydane dzieła Gödla (1986, 1990, 1995) dają nieocenioną możliwość wejrzenia w poglądy filozoficzne tego nietuzinkowego umysłu.

Twierdzenia Gödla o niezupełności niemal natychmiast stały się przedmiotem licznych interpretacji filozoficznych. Wiele z rzekomych konsekwencji filozoficznych tych twierdzeń opiera się na nieporozumieniach związanych z ich faktyczną treścią[6]. Niemniej są one niezwykle interesujące z punktu widzenia filozofii. W istocie liczne badania filozoficzne byłyby nie do pomyślenia

---

[5] Pewną dodatkową trudnością we wcześniejszym odbiorze niepublikowanych tekstów Gödla mogło również być to, że większość odręcznych notatek była przez niego sporządzona w notacji stenograficznej Gabelsbergera (Wang 1996: 28).

[6] Znakomite opracowania filozoficznych interpretacji twierdzenia o niezupełności stanowią Krajewski 2003, Franzén 2005.

bez podstawy, jaką stanowią dla nich wyniki metamatematyczne Gödla. Przykładem takich dociekań może być zapoczątkowany przez Alfreda Tarskiego (1933) program formalnej analizy pojęcia prawdy, kontynuowany przez filozofów i logików do dziś (por. np. Halbach 2011, Cieśliński 2017). Z filozoficznego potencjału twierdzenia świetnie zdawał sobie sprawę również autor jego dowodu, czemu dał wyraz między innymi w filozoficznej interpretacji zaprezentowanej przy okazji wykładu im. Gibbsa (Gödel 1953/1995).

W filozofii matematyki Gödel zajmował stanowisko silnie realistyczne[7]. Sam określał je mianem platonizmu lub (nawiązując do średniowiecznego sporu o uniwersalia) realizmu pojęciowego. Zdaniem Gödla matematyka ma właściwą sobie dziedzinę, istniejącą niezależnie od poznającego umysłu czy świata fizycznego. Rzeczywistość ta nie jest w żaden sposób przez nas konstruowana. Może być jedynie przedmiotem obserwacji i opisu.

Z poglądu tego wynika, że każde dobrze postawione zagadnienie matematyczne ma ostateczną odpowiedź, nawet jeśli nie jest ono rozstrzygalne za pomocą tej czy innej teorii matematycznej, której używamy. Dobry przykład takiego zagadnienia stanowi hipoteza continuum (Cantor 1878). Hipoteza ta głosi, że nie istnieje zbiór o mocy większej niż zbiór liczb naturalnych a mniejszej niż zbiór liczb rzeczywistych (ten ostatni jest równoliczny ze zbiorem potęgowym zbioru liczb naturalnych). Gödel był przekonany o niezależności tego problemu od powszechnie przyjmowanych aksjomatów teorii mnogości Zermela–Fraenkla (ZF), co nie przeszkadzało mu w tym samym czasie twierdzić, że hipoteza continuum jest fałszywa. Dowodząc względnej niesprzeczności tej hipotezy z teorią mnogości ZF, chciał pokazać, że teoria mnogości potrzebuje lepszej aksjomatyzacji, aby właściwie opisać uniwersum zbiorów (Gödel 1947/1986: 181).

Rzeczywistość matematyczną poznajemy, zdaniem Gödla, za pomocą intuicji. Jest ona swoistą własnością naszego umysłu, dzięki której możemy ujmować prawdę matematyczną. Gödel porównywał tę władzę do percepcji zmysłowej. Analogię tę rozwijał, porównując działalność matematyka postulującego istnienie obiektów matematycznych do działalności fizyka teoretycznego postulującego istnienie fizycznych struktur odpowiadających za wyniki przeprowadzanych doświadczeń (1947/1995). Co więcej, Gödel był zdania, że również metoda, którą posługuje się matematyka, nie musi być wcale tak odmienna od metod nauk empirycznych. Postulował nawet angażowanie metod indukcji niezupełnej w matematyce. W tekście wykładu im. Gibbsa pisał:

[7] Następujący fragment stanowi jedynie szkic filozoficznego stanowiska Gödla i nie ma pretensji do zupełności. Prezentuję tutaj tylko tło istotne dla dalszych rozważań. Obszerniejszą prezentację poglądów filozoficznych Gödla można znaleźć m.in. w Wójtowicz 2002, 2018, Krajewski 2003.

> Jeżeli matematyka opisuje obiektywny świat tak samo jak fizyka, nie ma powodu, dla którego metody indukcyjne nie mogłyby być stosowane w matematyce tak samo jak w fizyce. Faktem jest, że w matematyce wciąż przeważa ta sama postawa, która dawniej obowiązywała w stosunku do całej nauki, a mianowicie próbujemy wyprowadzać wszystko za pomocą konkluzywnych dowodów z definicji (czyli, w terminologii ontologicznej, z istot rzeczy). Przypuszczalnie metoda ta, o ile pretenduje do monopolu, jest równie błędna w matematyce, jak była w fizyce (Gödel 1951/2018: 20-21, tłum. M. Poręba; por. Gödel 1951/1995: 313).

Realizm jest poglądem szeroko rozpowszechnionym wśród praktykujących matematyków. Jest on zgodny z ich doświadczeniem zmagania się z nieustępliwą materią problemów matematycznych. Dobrze obrazuje to cytat z jednego z najwybitniejszych matematyków XX wieku G. H. Hardy'ego:

> Zawsze uważałem matematyka w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe (Hardy 1929: 18, cyt. za Skowron, Wójtowicz 2020: 224).

Niemniej, w odróżnieniu od wielu filozofujących matematyków Gödel był daleki od bezrefleksyjnego przyjmowania realizmu jako postawy filozoficznej. W pracy *The Present Situation in the Foundations of Mathematics* pisał:

> Aksjomaty, jeśli interpretujemy je jako zdania posiadające treść, z konieczności zakładają pewien rodzaj platonizmu, który nie może zadowolić krytycznego umysłu (Gödel 1933/1995: 50).

W tej sytuacji przedsięwzięciem, które stoi przed filozofią matematyki, jest uzasadnienie stanowiska realistycznego.

Szkic takiego uzasadnienia przedstawił Gödel w swoim słynnym wykładzie im. Gibbsa (1951/1995: 312-323). Krytykuje tam pogląd, zgodnie z którym matematyka jest naszym swobodnym wytworem. Gdyby tak było, argumentował Gödel, z konieczności znalibyśmy wszelkie własności obiektów matematycznych. Twórca posiada bowiem pełną władzę nad swoimi wytworami. Ewentualna niewiedza mogłaby wynikać jedynie z niejasności pojęć, którymi posługujemy się w badaniach nad podstawami matematyki. W tej materii osiągnięta została już jednak całkowicie wystarczająca precyzja. Co więcej, naszej niewiedzy dotyczącej pewnych własności obiektów matematycznych nie można wytłumaczyć tak, jak tłumaczy się niewiedzę konstruktora pewnego przedmiotu fizycznego na temat własności jego wytworu. W przypadku stanowiska antyrealistycznego w filozofii matematyki twórca miałby konstruować obiekty nie z jakiejś wcześniej istniejącej materii (to bowiem implikowałoby jakąś formę realizmu), lecz z niczego (Gödel 1951/1995: 312).

Realizm Gödlowski jest niezwykle interesującym poglądem filozoficznym, który zasługuje na dokładne zbadanie. Już z jego szkicowej prezentacji widać wyraźnie, że różni się znacznie od najbardziej rozpowszechnionej we współczesnych dyskusjach filozoficznych formy realizmu, czyli realizmu mnogościowego Willarda Van Ormana Quine'a (1953). Co więcej, choć zarówno Gödel, jak i jego późniejsi komentatorzy używają określenia „platonizm" do nazwania jego poglądów na naturę matematyki, to warto zauważyć, że jego stanowisko różni się istotnie od poglądu tradycyjnie określanego tym mianem. W szczególności należy zaznaczyć, że pojęcia, które w Gödlowskiej wersji platonizmu istnieją w sposób obiektywny i są przedmiotem matematyki, nie mogą być utożsamiane z ideami czy istotami. Przedmioty nie egzemplifikują tak rozumianych pojęć, jak dzieje się to na gruncie tradycyjnego platonizmu[8].

Jak już wspominałem, Gödel nie był zadowolony z argumentów na rzecz pozytywnej części swojego stanowiska. Za konkluzywne uważał jednak argumenty wymierzone w stanowisko antyrealistyczne, zwłaszcza w pozytywizm logiczny w filozofii matematyki. W dalszej części tekstu przedstawię szczegółowo jego argumentację przeciwko stanowisku formalistycznemu w filozofii matematyki. Zanim jednak to zrobię, przyjrzę się bliżej założeniom, które zdaniem Gödla formalizm musi przyjmować.

2. GÖDLA POJĘCIE FORMALIZMU

Przedmiotem krytyki przedstawionej przez Gödla w artykule *Is Mathematics Syntax of Language?* (Gödel 1953/1995) są poglądy pozytywistów logicznych na matematykę. Celem Gödla nie jest jednak argumentacja przeciw któremuś z przedstawicieli tego nurtu[9]. Aby zachować neutralność argumentacji Gödla względem wyboru konkretnego stanowiska pozytywistycznego, tezę, w którą wymierzona jest jego argumentacja, będę nazywał zgodnie z terminologią używaną przez Gödla Syntaktyczną Interpretacją Matematyki

[8] Interesujące i oryginalne omówienie różnic między tradycyjnym a Gödlowskim platonizmem można znaleźć w Poręba 2021: 111-117.

[9] Biorąc pod uwagę, że tekst Gödla był przygotowywany do książki dotyczącej filozofii Carnapa, jak również to, że Gödel często nawiązywał tam do jego pracy *Logiczna składnia języka* (Carnap 1935), można założyć, że argumenty przedstawione w Gödel 1953/1995 odnoszą się przede wszystkim do stanowiska Carnapa. Poza nim jednak odwołuje się też do dzieł Hansa Hahna, Moritza Schlicka czy nawet wczesnego Ludwiga Wittgensteina i Franka P. Ramseya, nie uwzględniając szczególnych różnic między ich stanowiskami. Wydaje mi się, że argumentację Gödla można uważać za wymierzoną przede wszystkim w pewien szeroki nurt wyznaczający sposób myślenia o matematyce, a nie w jakąkolwiek konkretną jego realizację. Kwestii trafności przedstawienia SIM jako stanowiska Carnapa w filozofii matematyki przyjrzę się bliżej w części czwartej.

(SIM). Główną tezę SIM można wyrazić następująco: zdania matematyki nie mają treści, a ich prawomocność da się całkowicie uzasadnić przez odwołanie do reguł syntaktycznych języka. SIM jest więc teorią antyrealistyczną w stosunku do problemu istnienia obiektów matematycznych oraz sprowadzającą prawdziwość zdań matematycznych do zdań wynikających analitycznie z reguł składniowych języka.

Gwoli ścisłości, SIM, tak jak przedstawia ją Gödel, nie jest nihilizmem w kwestii obiektów matematycznych, lecz poglądem głoszącym, że tezy ich dotyczące mogą być zinterpretowane jako tezy o możliwych skończonych kombinacjach symboli danego języka. Są one, przy założeniu reguł składni języka, analityczne. Stanowisko to należy jednak do grupy stanowisk antyrealistycznych, trudno bowiem uważać symbole i ich skończone kombinacje za obiekty matematyczne *sensu stricto*.

Poglądy wyrażone w SIM wynikają z empirystycznego podejścia pozytywistów logicznych do epistemologii. Zgodnie z nim cała nasza wiedza pochodzi wyłącznie z percepcji zmysłowej. Prawdy matematyczne, jako nieodnoszące się do zjawisk obserwowalnych, są pozbawione treści. Są jedynie zdaniami analitycznymi, wynikającymi z reguł języka służącego do opisu zjawisk, granicznymi przypadkami użycia tego języka. Użycia te są zawsze prawdziwe na mocy reguł syntaktycznych. Nie mogą one zatem mówić nic o doświadczeniu zmysłowym, ponieważ nie mają żadnych konsekwencji dla świata zjawisk obserwowalnych. W ramach pozytywistycznego obrazu wiedzy fundamentalne jest rozróżnienie między naukami empirycznymi (*Realwissenschaften*) a formalnymi (*Formalwissenschaften*). Prawdy, do których dochodzą nauki formalne, są prawdziwe na mocy reguł systemu językowego wybranego do opisu zjawisk. Natomiast wybór tego czy innego systemu formalnego motywowany jest wyłącznie względami praktycznymi.

Przykładami reguł składniowych, do których nauki formalne miałyby być sprowadzalne w ramach SIM, mogą być reguły kompozycyjne, np. reguła mówiąca, że koniunkcja zdań jest dowodliwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba człony tej koniunkcji są dowodliwe oraz analogiczne reguły rządzące innymi spójnikami logicznymi, reguły rządzące kwantyfikatorami oraz reguły określające poprawność podstawień (Gödel 1953/1995: 336). Są to reguły czysto syntaktyczne, ponieważ odnoszą się jedynie do zewnętrznej formy wyrażeń, nie do ich treści. Ich stosowanie może być całkowicie mechaniczne i nie zakłada konieczności rozumienia języka.

Głównymi tezami SIM, które wyróżnia Gödel, są:

(1) Matematyka może być zinterpretowana jako składnia języka.

(2) Zdania matematyczne nie mają treści (*content*).

Przedstawia też następujące postulaty znaczeniowe, dotyczące wyrażeń takich jak „matematyka", „język" i „interpretacja", które czyniłyby SIM interesującą tezą filozoficzną (1953/1995: 337-341):

1) Słowo „matematyka" powinno odnosić się przynajmniej do całej tzw. matematyki klasycznej, która jest wykorzystywana przez nauki empiryczne. W przeciwnym razie byłaby ona bezużyteczna dla pozytywistów logicznych. Dowiedliby wtedy jedynie syntaktycznej natury pewnego szczególnego wycinka matematyki, a nie prawd matematycznych w ogóle.

2) Słowo „język" powinno odnosić się do finitystycznej struktury skończonych symboli oraz ich skończonych kombinacji. Wszystkie elementy tej struktury powinny być możliwe do przedstawienia w formie empirycznie dostępnych symboli. Język, który np. zakłada istnienie nieskończenie długich zdań, musi tym samym zakładać istnienie nieskończonych obiektów abstrakcyjnych. Założenie takie przeczyłoby więc programowi SIM, odmawiającemu istnienia obiektom abstrakcyjnym.

3) Z tego samego powodu również reguły składni muszą być finitystyczne. W szczególności nie powinny zawierać odniesień do nieskończonych klas wyrażeń.

4) Reguły syntaktyczne nie mogą implikować żadnych prawd dotyczących rzeczywistości pozajęzykowej. W przeciwnym razie trudno będzie uznać je za pozbawione treści (nawet wąsko rozumianej treści empirycznej).

5) Zwrot „interpretacja matematyki jako składni języka" oznacza, że:
   (a) aksjomaty i reguły dowodu mogą być wywiedzione z reguł języka;
   (b) zdania matematyczne dowodzone w klasycznej matematyce z użyciem intuicji powinny być możliwe do uzasadnienia przez rozważania syntaktyczne.

6) Wymagane jest także, by:
   (a) w dowodach matematycznych były używane wyłącznie pojęcia syntaktyczne[10];
   (b) procedury dowodowe były oczywiste dla każdego, kto wie, jak posługiwać się wprowadzonymi pojęciami.

[10] Wydaje się, że tezę tę można rozumieć trochę słabiej. Wymagane jest, by w dowodach wszelkie odwołania do pojęć pozajęzykowych były możliwe do wyeliminowania. Odpowiadałoby to podejściu pozytywistów logicznych, którzy dopuszczali odwołania do obiektów abstrakcyjnych jako pomoc heurystyczną (por. np. Carnap 1950: 234).

Gödel nie podaje w tekście żadnych przykładów teorii, która spełniałaby podobne postulaty i mogłaby być zinterpretowana jako składnia języka. Jego różne uwagi pozwalają jednak przypuszczać, że za takie teorie można uważać logikę pierwszego rzędu lub pewien skończony fragment teorii arytmetycznej (por. np. Gödel 1953/1995: 345-346). W żadnym razie jednak teorie te nie mogą pretendować do bycia całą matematyką w jakimkolwiek interesującym sensie. Jak zobaczymy, już tzw. słabe systemy arytmetyczne[11] nie mogą być zinterpretowane jako składnia języka w sensie wyjaśnionym wyżej.

3. ARGUMENT PRZECIWKO SYNTAKTYCZNEJ INTERPRETACJI MATEMATYKI

Gödel stawia dwie tezy przeciwstawne do odpowiednich tez SIM:

I. Matematyka mogłaby być zinterpretowana jako składnia języka, tylko gdybyśmy rozumieli „język", „składnię" lub „interpretowanie" w bardzo ogólnym, słabym sensie lub gdybyśmy przez „matematykę" rozumieli tylko bardzo ograniczony jej wycinek.

II. Matematyka nie miałaby treści, tylko gdybyśmy przez „treść" rozumieli wąsko określoną treść empiryczną.

Z punktu widzenia filozofii matematyki szczególnie ciekawa jest argumentacja Gödla na rzecz tezy I, ponieważ odnosi się ona wprost do jego wyników metalogicznych. Znacznie prostsza jej wersja, odnosząca się do I Twierdzenia Gödla o niezupełności, została przedstawiona w (Gödel 1951/1995). Wymierzona jest ona przeciwko bardzo prostej wersji SIM, zgodnie z którą twierdzenia matematyczne sprowadzalne są do prawd definicyjnych, czyli tautologii o postaci „a=a". Gdyby tak było, pisze Gödel, mielibyśmy gotową procedurę pozwalającą rozstrzygnąć, czy dane zdanie jest twierdzeniem arytmetyki. Polegałaby ona na sprawdzeniu, czy jest ono sprowadzalne za pomocą ciągu podstawień do tautologii o postaci „a=a". Procedury takiej mieć jednak nie możemy, co wynika wprost z I Twierdzenia Gödla: gdyby taka procedura istniała, teoria ta byłaby w stanie dla każdego zdania orzec, czy jest ono jej twierdzeniem, czy też jest możliwe do obalenia (1951/1995: 316).

W zarysowanym argumencie atakowana jest możliwie najprostsza forma SIM. Natomiast argument podany w artykule *Is Mathematics Syntax of Lan-*

[11] Czyli na przykład arytmetyka Robinsona Q lub arytmetyka Skolema (tzw. PRA, *primitive recursive arithmetic*).

guage? wymierzony jest w ogólną postać tego stanowiska[12]. Podstawowy zarzut wobec SIM opiera się na postulacie (4). Zgodnie z nim reguły syntaktyczne stanowiące podstawę matematyki nie powinny implikować żadnych zdań empirycznych czy, szerzej, pozajęzykowych. Aby uczynić zadość temu postulatowi i upewnić się, że reguły syntaktyczne wybranej teorii formalnej mają konsekwencje wyłącznie dotyczące syntaktycznych reguł posługiwania się językiem, musimy najpierw uzasadnić niesprzeczność tego systemu formalnego. Bez uzasadnienia niesprzeczności nie będziemy wiedzieć, czy jego reguły są czysto syntaktyczne, tj. czy nie implikują żadnych zdań o faktach empirycznych. Jak bowiem głosi tzw. zasada Dunsa Szkota, ze sprzeczności wynika cokolwiek, a w szczególności dowolne zdanie empiryczne.

Na mocy II Twierdzenia Gödla nie da się jednak udowodnić niesprzeczności danego systemu formalnego, który opisywałby znaczną część matematyki, przy użyciu jedynie zasobów tego systemu. Mówiąc dokładniej, II Twierdzenie Gödla głosi, że w żadnej teorii Th, w której można wyrazić własności syntaktyczne, takie jak dowodliwość, bycie zdaniem, bycie formułą, nie może być udowodnione zdanie, które w luźnej naturalnojęzykowej interpretacji stwierdza niesprzeczność teorii Th. Zdanie to można sformułować *explicite* za pomocą wymyślonego przez Gödla sposobu kodowania zdań i formuł matematycznych, takich jak „x jest kodem zdania", „ciąg d jest dowodem zdania z w teorii Th" itp. za pomocą formuł arytmetycznych. Na mocy II Twierdzenia Gödla zdaniem niedowodliwym w teorii Th jest zdanie głoszące „nieprawda, że istnieje dowód zdania '0=1' z aksjomatów teorii Th". Zarówno własność bycia dowodem zdania „0=1"[13], jak i bycie aksjomatem teorii Th czy dowodem są wyrażalne w Th na mocy założeń[14].

Aby udowodnić niesprzeczność danego systemu formalnego, musimy wyjść poza ten system. Dla przykładu, teoria arytmetyki Peana (PA) nie może, na mocy II Twierdzenia Gödla, udowodnić zdania stwierdzającego niesprzeczność PA. Może to jednak osiągnąć teoria mocniejsza, np. teoria mnogości ZF. W jej ramach możemy pokazać, że PA ma model, mianowicie zbiór liczb naturalnych wraz ze standardowo określonymi działaniami dodawania i mnożenia. Teoria PA jest więc dowodliwie niesprzeczna w ramach teorii

---

[12] Można zauważyć, że argument ten jest już zasygnalizowany niejako mimochodem w wykładzie im. Gibbsa (Gödel 1951/1995: 315, przyp. 23).

[13] Albo dowolnej innej sprzeczności.

[14] Pomijam tutaj z konieczności pewne szczegóły techniczne nieistotne z punktu widzenia moich dociekań. Ważne dla dowodu II Twierdzenia Gödla jest m.in. to, by arytmetyczny predykat dowodliwości spełniał pewne intuicyjne warunki, zwane warunkami Gödla–Löba. Dobrą prezentację twierdzeń Gödla o niezupełności można znaleźć np. w Krajewski 2003, Smith 2013.

mnogości ZF. Aby udowodnić niesprzeczność teorii ZF, potrzebujemy jeszcze silniejszej teorii i tak *ad infinitum*.

Argumentację Gödla przeciwko tezie SIM o sprowadzalności zdań matematycznych do zdań prawdziwych na mocy reguł syntaktycznych można więc przedstawić następująco (por. Awodey, Carus 2001: 5-6):

i. Aby matematyka była możliwa do zinterpretowania jako składnia języka pozbawiona konsekwencji empirycznych, musi zostać udowodnione, że system tych reguł językowych nie ma żadnych empirycznych konsekwencji. W tym celu musimy uzasadnić niesprzeczność tego systemu.

ii. Już dla bardzo prostych systemów matematycznych, takich jak system aksjomatyczny elementarnej arytmetyki, nie można udowodnić niesprzeczności tego systemu w nim samym. Wynika to z II Twierdzenia Gödla.

iii. Każdy dowód niesprzeczności takiego systemu formalnego zakłada niesprzeczność silniejszego systemu, w którym jest przeprowadzony. Aby udowodnić tę niesprzeczność, musimy odwołać się do teorii silniejszej. Prowadzi to do regresu w nieskończoność.

iv. A zatem: postulat wyrażony w (i) nie może zostać spełniony, a matematyka nie może zostać zinterpretowana jako składnia języka.

Argument (i)-(iv) stanowi, zdaniem Gödla, zadowalające uzasadnienie tezy, że matematyka nie może zostać zinterpretowana jako składnia języka. Istotnie, sprawia on wrażenie argumentu o niezwykle dużej mocy, ponieważ zawiera niewiele więcej założeń ponad twierdzenia udowodnione całkowicie ścisłymi metodami. Nie znaczy to rzecz jasna, że nie da się go podważyć, wszak nawet Gödel zgodziłby się, że w swoim obecnym stadium filozofia nie dostarcza w pełni rozstrzygających argumentów. Konkretnym zarzutom wobec argumentacji Gödla przyjrzę się w następnej części artykułu.

Argument (i)-(iv) uzupełniony jest wywodem wymierzonym w drugą tezę SIM, głoszącą, że matematyka nie ma treści. Gödel przedstawia trzy główne argumenty na rzecz niemożliwości wyeliminowania treści matematycznej[15]. Po pierwsze, zwraca uwagę na możliwość arbitralnego uznania faktów dotyczących pewnego aspektu rzeczywistości za wynikające z konwencji rządzących naszym sposobem użycia języka. Odwołuje się do następującego eksperymentu myślowego. Gdybyśmy posiadali zmysł całkowicie oddzielony od pozostałych zmysłów, który jednak dostarczałby nam postrzeżeń w sposób re-

[15] Artykuł (Gödel 1953/1995) zawiera szereg powiązanych ze sobą pomniejszych argumentów na rzecz tej tezy. Przedstawiam tutaj tylko najważniejsze, moim zdaniem, aspekty jego argumentacji. Korzystam m.in. z Wójtowicz 2002: 50-56.

gularny i wiarygodny, to moglibyśmy zinterpretować stwierdzenia dotyczące faktów postrzeganych przez ten zmysł jako pozbawione treści konwencje. Nie miałyby one bowiem żadnych konsekwencji dla doświadczenia percepcyjnego, którego dostarczają nam pozostałe zmysły. Dokładnie w ten sposób, zdaniem Gödla, pozytywiści logiczni traktują wiedzę uzyskiwaną za pomocą intuicji matematycznej.

Po drugie, Gödel zwraca uwagę na fakt, że możemy całkowicie arbitralnie uznać pewne dane empiryczne za konwencje językowe. Dla przykładu, mimo że o istnieniu przedmiotów fizycznych informuje nas doświadczenie zmysłowe, to możemy przyjąć pewien system formalny, którego konsekwencją będzie uznanie istnienia takich obiektów. Nie czyni to jednak w żaden sposób faktu istnienia przedmiotów fizycznych konieczną prawdą analityczną.

Po trzecie, uzasadnieniem tezy o braku treści zdań matematycznych miała być konstatacja, że nie implikują one żadnych zdań empirycznych, jeśli traktujemy je w oderwaniu od doświadczenia. Konstatacja ta jest bezzasadna, ponieważ, jak pisał Gödel:

> Prawa przyrody bez matematyki czy logiki równie mało mówią o doświadczeniu, co matematyka bez praw przyrody. To, że matematyka, przynajmniej w większości zastosowań, dodaje coś do treści praw natury, jest widoczne najlepiej na przykładach, gdzie mamy do czynienia z bardzo prostymi prawami dotyczącymi pewnych elementów, np. dotyczącymi zachowań układów elektronicznych. Tu matematyka w oczywisty sposób dodaje ogólne prawa dotyczące tego, w jaki sposób będą zachowywać się te układy. To zaś, że prawa matematyki nie zawierają się w prawach przyrody, widać na podstawie następujących faktów: (a) Mogą one zawierać pojęcia niedefiniowalne w terminach pojawiających się w prawach przyrody (np. pojęcie kombinacji dowolnej skończonej liczby elementów). (b) Aby móc zrozumieć prawa natury w ich matematycznym aspekcie, wystarczy znać reguły decydujące o ich aplikowalności w każdym konkretnym przypadku. Takie reguły nie implikują jednak ogólnych praw nimi rządzących. (c) Takie ogólne prawa mogą nawet wymagać nowych empirycznych rozumowań indukcyjnych (Gödel 1953/1995: 360, cyt. za Wójtowicz 2002: 52-53).

Przykładem zdania empirycznego, które jest implikowane przez twierdzenie matematyki, może być przewidywanie dotyczące zachowania pewnej maszyny szukającej rozkładu liczby parzystej na sumę dwóch liczb pierwszych. Jeśli hipoteza Goldbacha (głosząca, że dla każdej liczby parzystej taki rozkład jest możliwy) byłaby prawdziwa, implikowałoby to empiryczne przewidywanie, zgodnie z którym taka maszyna w pewnym momencie się zatrzyma, podając rozwiązanie, niezależnie od liczby, której rozkład przeprowadza (1953/1995: 340).

4. ZARZUTY WOBEC ARGUMENTU GÖDLA

Argumenty Gödla przeciwko SIM opisane w poprzedniej części są oryginalne i w interesujący sposób nawiązują do jego wyników metamatematycznych. Jednakże, jak wszystkie ciekawe argumenty filozoficzne, mogą budzić pewne kontrowersje i wątpliwości. W tym rozdziale przyjrzę się bliżej dwóm takim kontrowersjom. Po pierwsze, przeanalizuję zarzut autorstwa Steve'a Awodeya i A.W. Carusa (2001) odnoszący się do argumentu Gödla przeciwko możliwości syntaktycznej interpretacji matematyki. Po drugie, przedstawię zarzut zarysowany przez Warrena Goldfarba (1995) we wstępie do pośmiertnego wydania *Is Mathematics Syntax of Language?*, odnoszący się do argumentacji Gödla na rzecz niemożliwości wyeliminowania treści matematycznej. Przy okazji postaram się odpowiedzieć na pytanie, czy opisywana przez Gödla teoria SIM może być trafnie przypisana formalistom.

4.1. ZARZUT AWODEYA I CARUSA

Awodey i Carus w artykule *How Carnap Could Have Replied to Gödel* rozważają możliwe odpowiedzi Carnapa na argument Gödla przeciwko SIM. Ich zdaniem argument ten oparty jest na pewnym błędnym założeniu (Awodey, Carus 2001: 7-8). Gödel zdaje się zakładać, że celem pozytywistów logicznych jest udowodnienie trafności SIM. Zgadzają się oni z tym, że skoro SIM ma nie implikować żadnych zdań empirycznych, to system reguł formalnych S, na których interpretacja ta jest oparta, musi być niesprzeczny. Zachodzi więc implikacja od trafności SIM do niesprzeczności S. Argument Gödla opiera się jednak nie na tym, że S jest faktycznie sprzeczny, lecz na stwierdzeniu, że niesprzeczności tego systemu nie da się udowodnić wewnątrz samego S. Jak jednak zauważają autorzy, dla trafności SIM nie jest konieczna dowodliwość niesprzeczności S, lecz jedynie jego niesprzeczność, która jest słabszym założeniem.

Uwagę Awodeya i Carusa uważam za ciekawą. Myślę natomiast, że argument Gödla można obronić przed ich zarzutem. Po pierwsze, zauważmy, że zwolennicy SIM mogą bronić słabszej, hipotetycznej formy tego stanowiska, tzn. poglądu mówiącego, że *jeśli system S jest niesprzeczny*, to SIM jest trafny. Wówczas opieraliby trafność SIM na niesprzeczności systemu S, która jest twierdzeniem matematycznym, niemożliwym do sprowadzenia do reguł S (na mocy II Twierdzenia Gödla). W takim wypadku muszą jednak zakładać pewne twierdzenie, któremu w ramach swojego stanowiska odmawiają treści. Jest to, delikatnie rzecz ujmując, dziwne położenie epistemiczne.

Po drugie, wydaje się, że argument Gödla spełniłby swoje zadanie, nawet gdyby założenie dowodliwości osłabić, zastępując warunkiem uzasadnialności niesprzeczności. Zwolennicy SIM zobowiązani są do uzasadnienia swojego stanowiska, co (zakładając kompozycyjność predykatu uzasadnienia) wymaga uzasadnienia niesprzeczności systemu formalnego, do którego reguł wszystkie twierdzenia matematyczne miałyby być sprowadzalne. Taka modyfikacja argumentu Gödla mogłaby polegać na dołączeniu dodatkowej przesłanki stwierdzającej, że jedynym dopuszczalnym sposobem uzasadnienia niesprzeczności w ramach formalizmu jest jej dowód formalny.

Dla porównania, w ramach stanowiska realistycznego, choć niesprzeczności systemu formalnego nie można udowodnić w nim samym, to można ją uzasadnić na inne sposoby. W zależności od konkretnego podejścia realistycznego, jego przedstawiciele mogą odwoływać się do intuicji matematycznej, indukcji niezupełnej, owocności rozważanego systemu formalnego itp. Realista ma zatem wiele sposobów uzasadnienia niesprzeczności różnych od dowodu tego faktu matematycznego.

Wydaje się natomiast, że zwolennicy syntaktycznej interpretacji matematyki są pozbawieni innych niż dowodliwość sposobów uzasadnienia niesprzeczności systemu formalnego, na którego regułach opierają swoją interpretację. Wszelkie fakty matematyczne, a zatem także niesprzeczność tego systemu, powinny być, w ramach SIM, sprowadzalne do faktów dotyczących reguł syntaktycznych tego systemu. Uzasadnienie SIM samo z siebie nie wymaga udowodnienia niesprzeczności systemu formalnego, ale wymaga uzasadnienia tej niesprzeczności. Zwolennicy SIM natomiast sami pozbawiają się możliwości uzasadnienia tego faktu inaczej niż przez dowód formalny. Alternatywą dla zwolenników SIM pozostaje więc tylko przyjęcie tego stanowiska bez uzasadnienia, co wydaje się mało atrakcyjnym dogmatyzmem.

Pewną strategią, którą mogliby obrać formaliści, aby odpowiedzieć na ten zarzut, jest wskazanie innego niż dowód formalny sposobu uzasadnienia tezy o niesprzeczności systemu formalnego, do którego reguł miałaby być sprowadzalna treść matematyki. Obrońca formalizmu mógłby na przykład wskazać, że akceptując pewien system formalny *S*, jesteśmy epistemicznie upoważnieni do akceptacji jego niesprzeczności. Tezę taką wywodzi się często z uwag samego Gödla (1946/1990: 151) oraz prac Solomona Fefermana (por. np. Feferman 1991: 1). W bardziej ogólnym sformułowaniu przyjmuje ona postać tezy o tzw. niejawnych zobowiązaniach teorii (ang. *implicit commitment thesis*). Głosi ona, że akceptując daną teorię formalną *S*, jesteśmy jednocześnie zobowiązani do uznania pewnych zdań niewynikających logicznie z tej teorii, które jednak są zawarte *implicite* w akceptacji teorii *S*. Przykładem takich zobowiązań może być właśnie zdanie stwierdzające niesprzeczność *S* czy jakiś rodzaj zasady refleksji nad tą teorią[16]. Nie możemy bowiem racjonalnie uznawać teorii *S*, twierdząc jednocześnie, że *S* jest sprzecznym systemem.

Rozwiązanie to, choć może wyglądać obiecująco, wiąże się z kilkoma poważnymi problemami. Po pierwsze, aby strategia ta okazała się skuteczna, formaliści musieliby najpierw podać dobre uzasadnienie tezy o niejawnych zobowiązaniach teorii. Teza ta jest przedmiotem ożywionej debaty wśród logików i filozofów i z całą pewnością nie może być przyjmowana za pewnik[17]. Po drugie, należałoby pokazać, że teza ta jest możliwa do pogodzenia z ogólnym podejściem formalistów do matematyki. Wydaje się bowiem, że teza o niejawnych zobowiązaniach opiera się na założeniu, zgodnie z którym matematyka ma treść. Trudno bowiem uzasadnić, dlaczego, akceptując teorię pozbawioną treści, mielibyśmy być zobowiązani do uznania jej niesprzeczności. Co więcej, sam zwrot „akceptacja teorii" nie ma w ramach formalizmu oczywistego odczytania. Formaliści mogą używać teorii formalnej, ale nie jest jasne, co miałoby znaczyć, że akceptują teorię, której nie przyznają żadnej treści. Twierdzą bowiem, że matematyka jest podobna do gry, w której manipuluje się znakami — czy można powiedzieć, że akceptuje się grę? Eksplikacja pojęcia akceptacji teorii wydaje się kluczowa w tej dyskusji (por. np. Cieśliński 2017: 235-247, Franzén 2004: 213-218). Wreszcie, teza ta wydaje się stać w sprzeczności z Carnapowską zasadą tolerancji, zgodnie z którą mamy pełną swobodę w wyborze systemu formalnego, którego używamy. Nakłada ona bowiem ograniczenia na wybór teorii, co do których jesteśmy przekonani, że są sprzeczne. Bez rozwiązania wyżej wymienionych problemów trudno uznać opisaną strategię obrony formalizmu przed zarzutem Gödla za udaną.

4.2. ZARZUT GOLDFARBA

Drugi z zarzutów został przedstawiony przez Goldfarba (1995) i odnosi się do Gödlowskich argumentów przeciwko możliwości wyeliminowania treści matematycznej. Zdaniem Goldfarba argumentacja Gödla opiera się na niejawnym założeniu, zgodnie z którym w ramach pozytywizmu logicznego podział na zdania empiryczne i analityczne powinien być dany przed przyjęciem konwencji matematycznych. Zgodnie z tym założeniem istnieje świat zjawisk empirycznych, do których dopiero potem dodajemy konwencje matematyczne. Od tych

[16] Przez zasadę refleksji nad teorią Th rozumiem zdanie (lub schemat), które formalizuje jej trafność. Intuicyjnie, zasady refleksji głoszą, że zdania, które są dowodliwe w tej teorii, są również prawdziwe. Zasady refleksji mogą być formułowane na różne sposoby i mieć różną siłę dowodową (por. np. Cieśliński 2017: 207-231).

[17] Dyskusję nad tezą o niejawnych zobowiązaniach można znaleźć m.in. w Dean 2015, Nicolai, Piazza 2019.

konwencji wymagamy zaś, by nie miały konsekwencji dla określonej wcześniej dziedziny prawd empirycznych. Goldfarb wskazuje na alternatywną możliwość odczytania tezy pozytywizmu logicznego. Zgodnie z nią empiryczność lub analityczność zdań zależy od przyjętej wcześniej siatki pojęciowej. Pytanie o analityczność zdania jest więc typowym zagadnieniem „wewnętrznym" w sensie Carnapa. Zadawanie go w izolacji od przyjętego systemu języka nie ma sensu.

Zarzut ten wiąże się z szerszym zagadnieniem: czy adekwatne jest charakteryzowanie stanowiska pozytywistów logicznych jako SIM? Wątpliwości może budzić zwłaszcza zaklasyfikowanie Carnapa jako zwolennika takiego podejścia do matematyki. Dla przykładu można zauważyć, że *explicite* odrzucał on założenie o finitystyczności reguł językowych (Carnap 1935: 114)[18]. Jeszcze poważniejszy problem stanowi zasadniczo antymetafizyczne nastawienie Carnapa w interpretacji teorii naukowych, które przedstawił w artykule *Empiricism, Semantics and Ontology* (Carnap 1950). Carnap wprowadził tam rozróżnienie na „wewnętrzne" (*internal*) i „zewnętrzne" (*external*) pytania o istnienie. Zwrócił uwagę na fakt, że w każdej nauce założona jest pewna rama pojęciowa. W obrębie tej ramy pojęciowej możemy formułować „wewnętrzne" pytania egzystencjalne. Na przykład, w ramach pojęciowych teorii liczb możemy zastanawiać się, czy istnieje liczba, która podniesiona do kwadratu da liczbę 2. Wewnątrz teorii liczb całkowitych możemy dać odpowiedź negatywną na to pytanie. Wewnątrz innych ram pojęciowych odpowiedź może być pozytywna. „Zewnętrzne" pytania o istnienie, czyli pytania o istnienie niezależnie od wybranej ramy pojęciowej są, zdaniem Carnapa, całkowicie pozbawione sensu. Założenie to podważa sensowność całego przedsięwzięcia tradycyjnej metafizyki.

Wydaje się, że uwaga Goldfarba dotycząca właściwej interpretacji stanowiska Carnapa jest słuszna. Czy jednak takie odczytanie ratuje to stanowisko przed argumentem Gödla? Moim zdaniem jest ono wciąż narażone na poważne zarzuty. Pierwszy z nich związany jest z podziałem na prawdy analityczne i empiryczne. Jeśli rozróżnienie to przeprowadzane jest już wewnątrz systemu, a nie jest traktowane jako pewna dana z góry własność zdań, to na jakiej podstawie uznajemy, że treść mają tylko te drugie, podczas gdy zdania analityczne są jej pozbawione? Odpowiedź formalistów z reguły wskazuje na reguły językowe. Jeśli zdanie wynika z reguł językowych, to jest analityczne. Jeśli zaś jest od nich niezależne, to jest empiryczne. Tak przeprowadzonemu rozróżnieniu można jednak postawić zarzut oparty na Gödlowskich wynikach formalnych. Na mocy I Twierdzenia Gödla, w przypadku pewnych systemów formalnych takich jak PA czy ZF istnieją poprawne zdania tej teorii, które są

[17] Sam Gödel zwrócił uwagę na ten fakt (1953/1995: 338, przyp. 14). Ponadto, założenie to jest wysoce kontrowersyjne z punktu widzenia pozytywistycznego programu w filozofii matematyki.

przez nie nierozstrzygalne. Co więcej, niektóre z takich zdań, takie jak zdanie Gödla stwierdzające własną niedowodliwość, są intuicyjnie prawdziwe. Mimo to wydaje się, że nie powinniśmy uznawać ich za prawdy empiryczne.

Bez niekontrowersyjnego kryterium podziału na zdania empiryczne i analityczne formaliści są pozbawieni podstawowego narzędzia pozwalającego na odróżnienie zdań empirycznych od pozbawionych treści analitycznych zdań matematyki. Możliwość przeprowadzenia tego podziału była atakowana przez Quine'a w słynnych *Dwóch dogmatach empiryzmu* z 1951 r., ale uwagi idące w tym kierunku można znaleźć także u Gödla w tekście powstałym w podobnym okresie. W *Is Mathematics Syntax of Language* Gödel zauważa, że w teorii empirycznej nie da się oddzielić znaczenia, jakie dla doświadczenia mają prawa przyrody, od tego wynikającego z aparatury matematycznej, z której korzysta ta teoria (Gödel 1953/1995: 360)[19]. Wszelkie próby przeprowadzenia takiego rozróżnienia zdają się podatne na wcześniej zarysowany kontrargument.

Choć zarzut Goldfarba trudno traktować jako udaną obronę stanowiska formalistycznego (czy nawet samego tylko stanowiska Carnapa) przed argumentem Gödla, to zwraca on uwagę na pewien istotny fakt. Gödel reprezentuje całkowicie odmienne podejście do problemów metafizycznych, zgodnie z którym pytania metafizyczne mają sens i ostateczną odpowiedź niezależnie od tego, czy będziemy w stanie kiedykolwiek do niej dojść. Rozważając podejście do matematyki pozytywistów logicznych, zdaje się zakładać, że stanowisko to, o ile mówi coś sensownego, musi mieć implikacje metafizyczne. Jako tezę metafizyczną traktuje więc także SIM i zwalczając ją, używa argumentów metafizycznych na równi z epistemologicznymi. Zdaje się, że tylko taką wersją SIM Gödel mógł być zainteresowany w swoich filozoficznych dociekaniach. Być może, zarysowane wyżej problemy z podejściem antymetafizycznym, w którym zarówno konwencje językowe, jak i dane empiryczne są zależne od teorii, są możliwe do rozwiązania i że SIM można sensownie zinterpretować jako tezę niemetafizyczną. Jeśli jednak potraktować formalizm jako tezę metafizyczną głoszącą, że fakty matematyczne są sprowadzalne do faktów syntaktycznych, to argument Gödla zdaje się skutecznie odpierać to stanowisko.

Podsumowując, argumentacja Gödla wymierzona w SIM jest bardzo oryginalnym rozumowaniem, opartym na doniosłych wynikach logicznych. Co więcej, po uwzględnieniu pewnych drobnych modyfikacji broni się ona przed zarzutami stawianymi jej przez Awodeya i Carusa oraz Goldfarba. Pewne wątpliwości może budzić przypisywanie tego stanowiska pozytywistom logicznym takim jak Carnap, z uwagi na ich antymetafizyczne nastawienie. Ich podejście wiąże się jednak z poważnymi trudnościami, które starałem się

[19] Zob. fragment cytowany wyżej na końcu części trzeciej.

wskazać. Bez względu na te wątpliwości, argumentacja Gödla wydaje się skutecznie pokazywać, że o ile potraktujemy SIM jako tezę o treści zdań matematycznych, o tym, do czego się odnoszą, to teza ta musi być fałszywa.

BIBLIOGRAFIA

Awodey S., Carus A. W. (2001), *How Carnap Could Have Replied to Gödel* [w:] *Carnap Brought Home*, S. Awodey, C. Klein (eds.), Chicago: Open Court, 179-200.

Cantor G. (1878), *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik" 84, 242-258. https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413

Carnap R. (1935), *Logische Syntax der Sprache*, Berlin–Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-25375-5

Carnap R. (1950/1983), *Empiricism, Semantics and Ontology* [w:] *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 233-248.

Cieśliński C. (2017), *The Epistemic Lightness of Truth: Deflationism and Its Logic*, Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108178600

Dean W. (2015), *Arithmetical Reflection and the Provability of Soundness*, „Philosophia Mathematica" 23(1), 31-64. https://doi.org/10.1093/philmat/nku026

Feferman S. (1991), *Reflections on Incompleteness*, „Journal of Symbolic Logic" 56, 1-49. https://doi.org/10.2307/2274902

Franzén T. (2004), *Inexhaustibility: A Non-Exhaustive Treatment*, Wellesley, MA: Association for Symbolic Logic – A K Peters.

Franzén T. (2005), *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, Wellesley, MA: A K Peters.

Goldfarb W. (1995), *Introductory note to *1953/9* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 324-334.

Gödel K. (1929/1986), *On the Completeness of the Calculus of Logic* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 1, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 60-101.

Gödel K. (1931/1986), *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme, I*, „Monatshefte für Mathematik und Physik" 38: 173-198, [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 1, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 144-195. https://doi.org/10.1007/BF01700692

Gödel K. (1933/1995), *The Present Situation in the Foundations of Mathematics* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 45-53.

Gödel K. (1939/1990), *Consistency Proof for the Generalized Continuum Hypothesis*, „Proceedings of the National Academy of Sciences" 25, 220-224 [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 2, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 28-32. https://doi.org/10.1073/pnas.25.4.220

Gödel K. (1946/1990), *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 2, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 150-153.

Gödel K. (1947/1986), *What is Cantor's Continuum Problem?*, „American Mathemathical Monthly" 54, 515-525 [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 1, S. Feferman et al., New York–Oxford: Oxford University Press, 176-187. https://doi.org/10.1080/00029890.1947.11991877

Gödel K. (1951/1995), *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 304-323.

Gödel K. (1951/2018), *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących*, tłum. M. Poręba, „Studia Semiotyczne" 32(2), 9-32.

Gödel K. (1953/1995), *Is Mathematics Syntax of Language?* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 334-362.

Gödel K. (1964/1995), *What is Cantor's Continuum Problem?* [w:] K. Gödel, *Collected Works*, vol. 2, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press, 254-270.

Gödel K. (1986), *Collected Works*, vol. 1, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1990), *Collected Works*, vol. 2, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1995), *Collected Works*, vol. 2, S. Feferman et al. (eds.), New York–Oxford: Oxford University Press.

Halbach V. (2011), *Aksjomatyczne teorie prawdy*, tłum. C. Cieśliński, J. Golińska-Pilarek, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Hardy G. H. (1929), *Mathematical Proof*, „Mind" 38, 1-25. https://doi.org/10.1093/mind/XXXVIII.149.1

Krajewski S. (2003), *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Nicola C., Piazza M. (2019), *The Implicit Commitment of Arithmetical Theories and Its Semantic Core*, „Erkenntnis" 84, 913-937. https://doi.org/10.1007/s10670-018-9987-6

Poręba M. (2021), *Gödel, Wittgenstein and the Sensibility of Platonism*, „Eidos" 5(1), 108-125. https://doi.org/10.14394/eidos.jpc.2021.0007

Schlipp P. A. (ed.) (1963), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Cambridge: Cambridge University Press.

Skowron B., Wójtowicz K. (2020), *Realizm w filozofii matematyki: Gödel i Ingarden*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria" 29(4) [116], 223-248. https://doi.org/10.24425/pfns.2020.135072

Smith P. (2013), *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge: Cambridge University Press.

Quine W. V. O. (1953), *On What There Is*, „The Review of Metaphysics" 2(5), 21-38.

Tarski A. (1933), *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawa: Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

Wang H. (1996), *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, Mass.: MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/4321.003.0001

Wójtowicz K. (2002), *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Tarnów: OBI.

Wójtowicz K. (2018), *Kategoria wyjaśniania a filozofia matematyki Gödla*, „Studia Semiotyczne" 32(2), 107-130. https://doi.org/10.26333/sts.xxxii2.07