Filozofia Nauki (*The Philosophy of Science*)
ISSN 1230-6894 e-ISSN 2657-5868
2019, vol. 27(3) [107]: 117-129
DOI: 10.14394/filnau.2019.0021

JERZY DADACZYŃSKI*

NAJWCZEŚNIEJSZA POSTAĆ FORMALIZMU HILBERTA

Abstract

THE EARLIEST FORM OF HILBERT'S FORMALISM

The aim of this paper is to describe and analyze the first (1922) of a long series of Hilbert's works in which he presented the mature version of formalism. His formalism in 1922 can be called mature because it is characterized by an explicit introduction of metamathematics. Hilbert distinguishes several levels of mathematics (not just two, as one may think — formalized mathematics and metamathematics): the level of meaningless arithmetical signs, labelled I-Z in this paper, the level of arithmetic with content (*inhaltliche Arithmetik*), II-T, which describes signs from level I-Z, the level of formalized mathematics, II-F (Hilbert postulated a full formalization of mathematics), and the level of metamathematics with content, III-MM, which describes signs from level II-F. Hilbert emphasized that the relation of III-MM to II-F is the same as the relation of II-T to I-Z (description, investigation). In this way, he tried to characterize metamathematics. He expected that in III-MM a consistency proof of II-F could be built, which was the aim of Hilbert's formalism. This paper discusses Hilbert's first proof of an auxiliary metamathematical theorem. It is indicated that, on level III-MM, Hilbert assumed a part of arithmetic from level II-T and the classical logic. Although in 1922 he did not distinguish explicitly between the finite and infinite mathematics and between the real and ideal mathematics, such a division was implicit in his study. This allows us to assume that already in 1922 Hilbert had an idea of a finitistic consistency proof of infinitistic mathematics, announced a few years later. It appears, therefore, that already in 1922 he had a very clear idea of formalism, which was presented in detail in the middle of the decade. Hilbert was also aware in 1922 that Brouwer's objections would eventually force him to explain the issue of logical foundations of classical mathematics.

Keywords: Hilbert, Brouwer, mathematics, formalism, formalization, metamathematics, proof, consistency proof, logical foundations of classical mathematics

Koncepcja metamatematyki (*Metamathematik*, *Beweistheorie*) była nieusuwalnym elementem Hilbertowskiego programu formalizmu, w którym

* Katedra Filozofii Logiki, Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, ul. Kanonicza 9, 31-002 Kraków, jerzy.dadaczynski@upjp2.edu.pl, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8175-9240.

miał być w przyszłości przeprowadzony dowód niesprzeczności matematyki. Pierwszym celem tego artykułu jest przedstawienie najwcześniejszej wersji formalizmu, w którą jest już świadomie wkomponowana metamatematyka[1]. Hilbert przedstawił ją w 1922 r. w artykule *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*. Wersja ta jest mało znana, ponieważ w serii późniejszych artykułów autor znacznie doprecyzował swoją koncepcję. Zazwyczaj, gdy przedstawia się program Hilberta (w wersji filozoficznej), czyni się to na podstawie pracy *Über das Unendliche* z 1926 roku. Przedstawienie głównych idei pierwszego etapu pozwoli porównać je na koniec z niektórymi ideami dojrzalszych wersji formalizmu.

Drugim celem artykułu jest zwrócenie uwagi na wielopoziomowość matematyki wyłaniającą się z pierwszego przedstawienia formalizmu. Tradycyjne ograniczanie się tylko do dwóch poziomów — sformalizowanej matematyki i treściowej metamatematyki — jest zubożeniem koncepcji Hilberta[2]. Hilbert odwoływał się do bardzo istotnych, zapomnianych później analogii w relacjach między niektórymi poziomami matematyki (metamatematyki).

Hilbert stwierdza na początku, że do podjęcia badań skłonił go stan podstaw matematyki powstały w wyniku odkryć antynomii teoriomnogościowych. Jego celem jest danie matematyce solidnych podstaw przez wykazanie niesprzeczności zrekonstruowanej matematyki. Wskazuje, że w matematyce przeprowadzano dotąd dowody względnej niesprzeczności, na przykład dowód niesprzeczności geometrii przez jej „redukcję” do analizy (arytmetyki liczb rzeczywistych). Nie przeprowadzano natomiast dowodów bezwzględnej niesprzeczności — na przykład teorii mnogości, której nie da się redukować do bardziej podstawowej teorii (Hilbert 1922: 157-162).

---

[1] Hilbert już w 1900 r. jako drugi problem matematyki na przełomie wieków wskazywał kwestię dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych. Na początku XX w. pracował nad dowodem niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych i już wtedy antycypował pewne idee późniejszego programu formalizmu (m.in. właśnie pełną formalizację języka matematyki). W tej propozycji nie było jednak mowy o świadomym wydzieleniu poziomu metamatematyki, na którym odbywałyby się badania teorii matematycznych (Hilbert 1905). Dlatego można zasadnie twierdzić, że na początku XX w. Hilbert nie przedstawił jeszcze pełnej wersji formalizmu.

[2] Program Hilberta, którego celem było udowodnienie niesprzeczności matematyki na poziomie metamatematyki, doczekał się w ostatnich czterech dziesięcioleciach wielu wnikliwych opracowań (por. Detlefsen 1986, Giaquinto 1983, Kreisel 1983, Peckhaus 1990, Sieg 2013). Nie dostrzeżono w nich jednak, że pierwotnie program ten zawierał więcej rozróżnień niż tradycyjnie akceptowany podział na matematykę i metamatematykę.

1. POZIOM I-Z[3]

Hilbert zdecydowanie odżegnywał się od koncepcji opierających matematykę na teorii mnogości. Przekonywał, że takie narzędzia jak zakresy pojęć (klasy, zbiory), którymi w budowaniu matematyki (arytmetyki) posługiwali się Frege i Russell — a także, trzeba by dodać, Cantor — prowadzą do antynomii. Dlatego fundament matematyki widział w pozalogicznych dyskretnych przedmiotach, które dane są oglądowo przed wszelkim myśleniem. Różnice między tymi przedmiotami oraz ich następstwo też musi być oglądowo dane. Tymi przedmiotami są według Hilberta znaki liczbowe (*Zahlzeichen*, Hilbert 1922: 162-163).

Trzeba mocno podkreślić, że Hilbert utożsamia w swoim tekście znaki liczbowe z liczbami. Przy czym wprowadza znaki liczbowe (czyli liczby) w następujący sposób:

> Znak 1 jest liczbą.
> Znak, który zaczyna się od 1 i kończy się na 1, taki że między tymi dwoma znakami po 1 zawsze następuje + i po + zawsze następuje 1, jest także liczbą, np. znaki
> 1 + 1,
> 1 + 1 + 1 (Hilbert 1922: 163).

Hilbert dodaje, że znaki liczbowe, które są tożsame z liczbami, same nie mają żadnego znaczenia (*Bedeutung*). Nie odnoszą się do żadnej sfery przedmiotowej, w szczególności nie oznaczają żadnych zbiorów zbiorów czy (zakresów) pojęć pojęć, jak to było w koncepcjach Cantora i Fregego. Same znaki liczbowe konstytuują — można by dopowiedzieć — sferę przedmiotów (pewnej części) matematyki (Hilbert 1922: 163).

2. POZIOM II-T

Znakami liczbowymi (liczbami) jako właściwymi przedmiotami zajmuje się arytmetyka treściowa (*inhaltliche Arithmetik*). Posługuje się ona pewnymi nowymi znakami, tym razem znaczącymi. Ich znaczenia ulokowane są jako przedmioty na poziomie I-Z matematyki albo są na tym poziomie pewnymi stanami rzeczy i relacjami (Hilbert 1922: 163-164). Na przykład znak „2” używany na poziomie II-T oznacza znak „1 + 1” z poziomu I-Z, a znak „3” używany na poziomie II-T oznacza znak „1 + 1 + 1” z poziomu I-Z (Hilbert 1922: 163).

[3] Symboliczne oznaczenia poszczególnych poziomów matematyki (typu „I-Z”) pochodzą od autora. Wprowadza się je przede wszystkim po to, by w zdaniach stwierdzających pewne relacje między poziomami matematyki nie trzeba było odwoływać się do długich słownych charakterystyk poszczególnych poziomów.

Na poziomie II-T formułuje się wypowiedzi na temat znaków-przedmiotów z poziomu I-Z i na temat relacji między nimi. I tak na poziomie II-T można słusznie powiedzieć, że:

(A1) znak „1 + 1 + 1” jest identyczny ze znakiem „1 + 1 + 1”,

(A2) znak „1 + 1” zawiera się w znaku „1 + 1 + 1” (Hilbert 1922: 163-164).

Na oznaczenie tych relacji, które zachodzą między znakami z poziomu I-Z, używa się na poziomie II-T odpowiednio znaków „=”, „<” (Hilbert 1922: 163-164). Można zatem na poziomie II-T, odwołując się do znaków używanych na tym poziomie, powyższe zdania zapisać następująco:

(B1) „1 + 1 + 1” = „1 + 1 + 1”;

(B2) „1 + 1” < „1 + 1 + 1”.

albo:

(C1) $3 = 3$;

(C2) $2 < 3$ (Hilbert 1922: 163-164).

Hilbert mocno podkreśla, że na poziomie arytmetyki treściowej[4] (tu II-T) nie ma miejsca na antynomie. Uzasadnia to tym, że jej wypowiedzi dotyczą konkretnej dziedziny przedmiotowej (znaków liczbowych). Nie ma też na tym poziomie aksjomatów. Nie trzeba z nich korzystać, ponieważ aby stwierdzić stan rzeczy lub relacje zachodzące na poziomie I-Z, wystarczy odwołać się do dostępnej poznawczo sfery przedmiotowej arytmetyki treściowej (Hilbert 1922: 164).

Przy okazji warto zaznaczyć, że Hilbert nie akceptuje tezy, zgodnie z którą wyrażenia typu (C1) i (C2) są formułami. Edward Bernays w przypisie tłumaczy to względami formalnymi. Mamy tu jednak do czynienia z tekstem, w którym pojęcie formuły nie zostało jeszcze precyzyjnie określone, np. za pomocą definicji indukcyjnej, a więc istotniejsze jest stwierdzenie następującego faktu: nawet gdyby uznać (C1) i (C2) za formuły, to nie są one konieczne na poziomie arytmetyki treściowej (II-T). Są one jedynie (bardzo) użytecznymi, ale niekoniecznymi skrótami wyrażeń (A1) i (A2) (Hilbert 1922: 164).

Hilbert zauważa, że arytmetykę treściową można stosunkowo „daleko” rozwijać. Niemniej nie da się zbudować tak całej matematyki. Uzasadnia to

[4] Hilbert pisze o arytmetyce treściowej (*inhaltliche Arithmetik*), rzadziej o matematyce treściowej (*inhaltliche Mathematik*). Ich „treścią” są relacje i stany rzeczy na poziomie I-Z matematyki. Matematyka treściowa jest przeciwstawiona matematyce formalnej (*formale Mathematik*). Ta ostatnia nie ma treści albo (tak przyjmuje Hilbert w późniejszych pismach) traktuje się ją tak, jakby nie miała żadnej treści, abstrahuje się od treści.

następująco: nie sposób, z zasady, wskazać znaków liczbowych dla wszystkich liczb rzeczywistych (ich zbiór jest mocy kontinuum) z poziomu przedmiotowego I-Z czy też wprowadzić dla nich odpowiednich skrótów (takich jak „2", „3") na poziomie arytmetyki treściowej II-T (Hilbert 1922: 164-165).

3. POZIOM II-F

Hilbert podaje jeszcze jeden powód, dla którego nie można całej matematyki zbudować na poziomie II-T, czyli tak jak arytmetyki treściowej. Stwierdza mianowicie, że pewne fragmenty matematyki — chodzi mu dokładnie o analizę matematyczną — są sformalizowane, ich twierdzenia są podane w postaci formuł i nie mogą być zastąpione rozważaniami treściowymi (*inhaltliche*) na poziomie II-T (Hilbert 1922: 165).

Wypada w tym miejscu wyjaśnić, że Hilbertowi chodzi tutaj zapewne o definicje i twierdzenia analizy zbudowanej przez Weierstrassa, w których słowne wyrażenia kwantyfikatorowe zostały zastąpione odpowiednikami formalnymi wprowadzonymi przez Fregego (znacznie uproszczonymi w *Principiach*). W tej postaci definicje i twierdzenia analizy mają rzeczywiście postać formuł. Hilbert stwierdza, że nie mogą one być przedstawione na poziomie II-T właśnie ze względu na ich formalny charakter. Stąd wyciąga wniosek, że całą matematykę należy sformalizować, tzn. aksjomaty, twierdzenia, dowody (nie wspomina o definicjach) należy podać w postaci formuł (Hilbert 1922: 165). W ten sposób stworzony ma zostać poziom matematyki nazywany tutaj II-F.

Jakie są podstawowe relacje między poziomami matematyki II-T i II-F? Najkrócej można powiedzieć, że poziom II-T powinien zostać sformalizowany, tzn. przekształcony w zbiór formuł, który będzie podzbiorem właściwym zbioru formuł matematyki budowanej na poziomie II-F. Niech przekształcona w formuły matematyka treściowa będzie oznaczana przez II-T/F. Formuły tej części matematyki II-F, czyli II-T/F, będą oznaczały dalej przedmioty-znaki i stany rzeczy dotyczące znaków z poziomu I-Z matematyki. Formuły pozostałej części matematyki II-F nie będą miały żadnego znaczenia w żadnej dziedzinie przedmiotowej.

Można zauważyć, że w takim ujęciu widać dwie postacie nominalizmu Hilberta. Formuły z poziomu II-T/F mają znaczenia w pewnej dziedzinie przedmiotowej, ale rozwijając matematykę II-F, należy to znaczenie pomijać, kierując się tylko regułami syntaksy poziomu II-F. Widać tu wyraźnie nominalizm metodologiczny Hilberta. Natomiast formuły matematyki II-F (bez jej części II-T/F), pozbawione znaczenia w jakiejkolwiek dziedzinie przedmiotowej, świadczą o ścisłym nominalizmie Hilberta (widocznym w tekście z 1922 r.). Nominalizm dwupostaciowy Hilberta z 1922 r. jest różny od tego przypisywanego zazwyczaj Hilbertowi w latach realizowania programu formalizmu nominalizmu metodologicznego.

Sformalizowana matematyka poziomu II-F może być przedmiotem badań treściowych (*inhaltliche*). Tych ostatnich nie da się wyeliminować, zdaniem Hilberta, ze sfery badań matematycznych (Hilbert 1922: 165). Określa je mianem „metamatematyki" (*Metamathematik*) albo „teorią dowodu" (*Beweistheorie*, Hilbert 1922: 169, 174). Przykładowe stwierdzenie metamatematyki odnoszące się do poziomu II-F to chociażby: *znak „→" występuje w poszczególnych przesłankach (danego) dowodu nie więcej niż dwa razy* (Hilbert 1922: 171). Poziom (treściowej) metamatematyki będzie w tym artykule oznaczany przez III-MM.

Hilbert postuluje zachodzenie istotnej analogii między relacją łączącą poziom matematyki III-MM z II-F a relacją łączącą poziom matematyki II-T z I-Z. Dla poziomu znaków bez znaczenia, I-Z, budowana jest matematyka treściowa, II-T, która zawiera wypowiedzi o znakach z I-Z. Podobnie dla znaków bez znaczenia[5] (formuł) z poziomu II-F budowana jest treściowa metamatematyka III-MM, która zawiera wypowiedzi o znakach (formułach) z poziomu II-F (Hilbert 1922: 165).

Jaki był według Hilberta cel budowania treściowej metamatematyki? Spodziewał się, że na tym poziomie uda się udowodnić niesprzeczność sformalizowanej matematyki z poziomu II-F (Hilbert 1922: 164). Była to jedna z zasadniczych kwestii dotyczących matematyki, do której Hilbert przywiązywał wielką wagę od czasu, gdy dzięki Cantorowi zapoznał się w 1899 r. z teoriomnogościową antynomią Burali-Fortiego (Hilbert 1900)[6]. W jednej z prac z początku XX w. Hilbert próbował „szkicować" dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych (Hilbert 1905: 174-185), ale dopiero w analizowanym tutaj tekście z 1922 r. jasno wyodrębnił poziom metamatematyki, na którym chciał przeprowadzić dowód niesprzeczności matematyki.

[5] Abstrahuje się tutaj, zgodnie ze wskazówką nominalizmu metodologicznego, od znaczeń znaków i formuł z poziomu II-T/F, który jest częścią poziomu II-F.

[6] W tej pracy, złożonej do druku w 1899 r., Hilbert po podaniu pierwszej aksjomatyki arytmetyki liczb rzeczywistych stawia problem jej niesprzeczności. Wyraźnie przy tym odwołuje się do Cantorowskiej terminologii wypracowanej przez twórcę teorii mnogości wtedy, gdy starał się on przeciwdziałać sytuacji problemowej wynikającej z odkrycia antynomii największej liczby porządkowej (Cantor 1932). Wynika stąd, że Hilbert znał już w 1899 r. dzięki Cantorowi antynomię Burali-Fortiego. Potwierdza to Philip Jourdain (1904: 70), twierdząc, że Hilbert znał treść listów Cantora do Dedekinda (Cantor 1932). Por. także Dadaczyński 2018.

Wracając do relacji między parami poszczególnych poziomów matematyki, trzeba zwrócić uwagę na pewną różnicę między tymi relacjami. Poziom I-Z jest poziomem przedmiotowym. Zdania na temat znaków z poziomu I-Z i ich relacji formułowano dopiero na poziomie II-T. Matematyka na poziomie II-T była, jak podkreślał Hilbert, niesprzeczna, ponieważ zajmowała się — najogólniej — opisem pewnej dziedziny przedmiotowej. Poziom II-F, tak jak poziom I-Z, to poziom znaków. Pewne sekwencje tych znaków (pewne formuły) są jednak zdaniami. Jeśli przyjmie się, że np. A jest formułą-zdaniem z poziomu II-F, to — dotąd — nie było gwarancji, że na poziomie tym nie wystąpi formuła $\sim A$. To oznaczałoby sprzeczność w sformalizowanej matematyce. Rozważania treściowe dotyczące znaków (formuł) z poziomu II-F prowadzone na poziomie metamatematycznym III-MM miały właśnie taką możliwość wykluczyć. Na poziomie MM-III miał zostać przeprowadzony dowód niesprzeczności sformalizowanej matematyki II-F. Ze względu na nominalizm — według Hilberta przyjęty z konieczności — nie można było uzasadniać tej niesprzeczności odniesieniem matematyki z poziomu II-F do jakiejś dziedziny przedmiotowej.

Następnie Hilbert przechodzi do pokazania, jak technicznie powinna przebiegać formalizacja matematyki, by sprowadzić ją do poziomu II-F (Hilbert 1922: 165-167). Czyni to w sposób skomplikowany, nie wprowadzając definicji formuły. Z tych powodów pomijam przedstawienie tego zagadnienia, technicznie zostało ono lepiej rozwiązane w następnych pracach Hilberta. Autor stwierdza ogólnie, że trzeba formalizować aksjomaty i dowody, zapominając o oczywistej w tym kontekście konieczności formalizowania również twierdzeń i definicji (Hilbert 1922: 167).

Trzeba natomiast zwrócić uwagę na to, jak w 1922 r. pojmował Hilbert dowód (sformalizowany). Otóż dowód jest figurą (zespołem znaków?), która jako taka musi być dana oglądowo (Hilbert 1922: 169). Dowód składa się z wnioskowań opartych na schemacie:

$$\begin{array}{l} S \\ \underline{S \to T} \\ T \end{array}$$

gdzie każda przesłanka jest albo aksjomatem (sformalizowanym), powstaje z aksjomatu przez podstawienie, jest formułą konkluzji wnioskowania (opartego na tym samym schemacie) zawartego wcześniej w dowodzie albo powstaje przez podstawienie do takiej formuły-konkluzji (Hilbert 1922: 169)[7].

[7] Mocno należy podkreślić, że w swym tekście Hilbert nie uwzględnia możliwości, by przesłanka była już udowodnionym twierdzeniem lub podstawieniem dokonanym w takim twierdzeniu.

Według Hilberta formuła jest dowodliwa (*beweisbar*), jeśli jest aksjomatem, powstaje z aksjomatu przez podstawienie, jest formułą końcową dowodu albo powstaje przez podstawienie do formuły końcowej dowodu (Hilbert 1922: 169). Można stwierdzić zatem, że Hilbert przyjmuje w sformalizowanej matematyce dwie reguły wnioskowania: regułę odrywania opartą na *modus ponens* oraz regułę podstawiania — choć tej ostatniej nie charakteryzuje precyzyjnie.

Zwrócić jeszcze należy uwagę na stwierdzenie Hilberta, że dowód jest daną oglądowo figurą. Wydaje się, że trzeba to interpretować w ten sposób, iż dowód jest po prostu formułą zbudowaną z formuł, jest znakiem-całością zbudowanym ze znaków prostych. Tak też trzeba będzie postrzegać dowody z płaszczyzny III-MM, czyli z poziomu metamatematyki.

4. POZIOM III-MM

Pewne uwagi Hilberta dotyczące metamatematyki zostały, z konieczności, wspomniane wyżej. W tym miejscu, przed przejściem do dalszych analiz, warto je podsumować. Otóż metamatematyka (III-MM) nie jest formalna. Jej istotą są treściowe analizy dotyczące znaków (formuł) z poziomu II-F. Głównym celem metamatematyki jest dowód niesprzeczności matematyki sformalizowanej (Hilbert 1922: 174).

Należy przy tym od razu zaznaczyć, że w 1922 r. Hilbert nie przewidywał udowodnienia „przy pierwszym podejściu" niesprzeczności całej matematyki z poziomu II-F. Proponował inną strategię. Najpierw należało zaksjomatyzować i sformalizować niewielki fragment matematyki (który byłby „pierwszą częścią" II-F). Ta aksjomatyzacja obejmowałaby tylko tę część logiki, która jest wymagana dla owej części II-F. Następnie na poziomie III-MM miałby nastąpić dowód niesprzeczności wybranego fragmentu II-F. Dalej należałoby dodawać na przemian do pierwszej aksjomatyki pewne aksjomaty logiczne i matematyczne oraz dowody niesprzeczności „powiększanych" fragmentów II-F. W końcu — Hilbert nie określił po ilu takich krokach — miał powstać dowód niesprzeczności całej matematyki z II-F (Hilbert 1922: 173).

Należy postawić pytanie: jakie były przyczyny ustalenia takiej strategii dowodzenia niesprzeczności? Niełatwo je ustalić, ale dwie przesłanki wydają się tutaj relewantne. Pierwszym względem jest pewna heurystyka. Chodziło o stwierdzenie najpierw odnośnie do bardziej elementarnych fragmentów matematyki, że dowód ich niesprzeczności jest możliwy. Po drugie, Hilbert był zdeklarowanym przeciwnikiem logicyzmu. Twierdził, że taki sposób fundowania matematyki musiał prowadzić — i rzeczywiście doprowadził — do zbudowania antynomijnej matematyki (Hilbert 1922: 162). Dlatego, można przypuszczać, był przeciwny zadaniu matematyce od razu całej potrzebnej logiki i wolał dodawać aksjomaty logiczne stopniowo.

Hilbert przeprowadza w swym tekście dowód niesprzeczności pewnego słabego fragmentu arytmetyki liczb naturalnych. Dowód ten jest mocno rozbudowany i trudno byłoby go tutaj prześledzić. Hilbert posługuje się jednak w dowodzie lematem metamatematycznym, który wcześniej udowodnił. Przedstawię tu dowód tego lematu, by pokazać, jak funkcjonowała Hilbertowska treściowa metamatematyka.

Hilbert (1922: 170) chce wykazać niesprzeczność teorii opartej na następujących aksjomatach:

1. $a = a$
2. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
3. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
4. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
5. $a + 1 \neq a$

Dla dowodu niesprzeczności formułuje następujący lemat metamatematyczny:

(LMM) Formuła dowodliwa może zawierać co najwyżej dwa razy znak „→”.

Dowód lematu jest dowodem nie wprost (Hilbert 1922: 171):

Zakłada się (założenie dowodu nie wprost), że

(1) formuła dowodliwa zawiera więcej niż dwa znaki „→”.

(2) Odnajduje się w jej dowodzie pierwszą w kolejności formułę, która zawiera więcej niż dwa znaki „→” (Hilbert stwierdza, że określenie „pierwsza” oznacza, że żadna wcześniejsza formuła w tym dowodzie nie ma tej własności).

(3) Są dwie możliwości: albo (a) ta formuła powstała przez podstawienie do aksjomatu (jest przesłanką wnioskowania opartego na *modus ponens*)[8], albo (b) jest formułą-konkluzją wnioskowania opartego na *modus ponens*.

[8] W zasadzie istnieje trzecia możliwość: formuła ta jest aksjomatem, który jest przesłanką we wnioskowaniu opartym na *modus ponens*. Wystarczy jednak przejrzeć aksjomaty, by stwierdzić, że żaden z nich nie zawiera więcej niż dwa razy znaku „→”.

(4) Możliwość (a) jest wykluczona przez zasady syntaktyki matematyki sformalizowanej na poziomie II-F[9].

(5) Pozostaje możliwość (b). Ale w takim wypadku druga przesłanka wnioskowania opartego na *modus ponens* musi też zawierać więcej niż dwa znaki „→”. (c) Formuła-konkluzja tego wnioskowania nie jest pierwszym w dowodzie wystąpieniem formuły z więcej niż dwoma znakami „→”.

(6) Sprzeczność (2) (5c).

(7) Nieprawda, że (1).

Wypada postawić teraz pytanie, jakie wnioski na temat metamatematyki Hilberta wynikają z tego przedstawionego jako pierwszy dowodu metamatematycznego. Po pierwsze, Hilbert *implicite* zakłada na poziomie III-MM jakąś teorię porządku. Wynika to stąd, że przyjmuje *de facto*, że zbiór formuł dowodu jest dobrze uporządkowany — można w zbiorze formuł (w dowodzie) wskazać pierwszą formułę o określonej własności, czyli pierwszą formułę dowolnego podzbioru formuł danego dowodu.

Po drugie, Hilbert, również *implicite*, zakłada na poziomie metamatematyki arytmetykę liczb naturalnych, a przynajmniej jej fragment. W dowodzie mowa jest o „dwóch” i „więcej niż dwóch” znakach. Przypomnieć należy, że analizy poziomu III-MM mają charakter treściowy, a nie formalny. Hilbert umieścił arytmetykę treściową na poziomie II-T. W istocie przynajmniej pewne jej fragmenty potrzebne są również na treściowym poziomie III-MM.

Po trzecie, na poziomie III-MM Hilbert zakłada *implicite* pewną logikę. Wystarczy w tym kontekście wskazać na konstrukcję dowodu lematu metamatematycznego. Jest to dowód nie wprost oparty na prawie logiki klasycznej $(\sim p \to q \wedge \sim q) \to p$. Rzeczywiście, dalszy rozwój idei metamatematyki w kolejnych pracach Hilberta pokazał, że w prowadzonych analizach treściowych na poziomie metamatematyki kierował się logiką klasyczną (*inhaltliche*).

Podkreślić należy, że Hilbert, w pierwszym tekście, w którym mówi *expressis verbis* o metamatematyce, nie ujawnił *explicite* koniecznego „wyposażenia” arytmetyczno-logicznego zbudowanej przez siebie metamatematyki. Niemniej, z przedstawionych przez niego dowodów prowadzonych na tym poziomie można wyciągnąć pewne wnioski dotyczące owego „wyposażenia”.

---

[9] Za znaki *a*, *b*, *c* w aksjomatach mogą być wstawione tylko te formuły, które Hilbert nazywa funkcjonałami, a te nie zawierają znaku „→”. Formuły, które powstaną z aksjomatów przez podstawienie nie będą zawierały zatem więcej niż dwóch znaków „→”.

5. PORÓWNANIE Z PÓŹNIEJSZĄ WERSJĄ FORMALIZMU

Trzeba zaznaczyć, że w późniejszych tekstach, przede wszystkim w sztandarowym dla metamatematyki artykule *Über das Unendliche* z 1926 r., Hilbert w zasadniczo inny sposób uzasadniał podstawową kwestię braku odniesienia przedmiotowego matematyki z poziomu II-F (bez II-T/F). Stwierdzał przede wszystkim, że w świecie materialnym nie ma przedmiotów nieskończonych — ani nieskończenie wielkich, ani małych (Hilbert 1926: 161-165). Dodać należy, że nie był platonikiem, a więc nie poszukiwał przedmiotów nieskończonych w jakiejś obiektywnej rzeczywistości poza czasem i przestrzenią. Nie zgadzał się też z konstruktywizmem Brouwera, a więc nie doszukiwał się w konstruktach podmiotów matematycznych obiektów potencjalnie nieskończonych. Twierdził, że nieskończoność została dołączona do matematyki jako element idealny — przeciwstawiany temu co realne — i stała się jej (matematyki z poziomu II-F) istotą. Przykładem obiektu idealnego w matematyce może być — wprowadzony przez geometrię rzutową — punkt przecięcia w nieskończoności dwóch prostych równoległych.

Podział na matematykę finitystyczną i infinitystyczną — obok podziału na matematykę realną i idealną — stał się od 1926 r. podstawowym narzędziem, którym posługiwał się Hilbert w swojej filozofii i teorii podstaw matematyki (Hilbert 1926: 166-170). Pierwszego rozróżnienia można się dopatrywać już w analizowanym wyżej artykule z 1922 r. Hilbertowska matematyka finistyczna z 1926 r. to w istocie to, co w 1922 r. Hilbert określa jako „arytmetykę treściową” (*inhaltliche Arithmetik*), a co wyżej oznaczone było symbolem II-T. Warto dodać, że w tradycji interpretacji filozofii Hilberta matematyka finitystyczna została „zidentyfikowana” jako sformalizowana (w latach czterdziestych XX w.) arytmetyka Skolema[10]. Natomiast późniejsza matematyka infinitystyczna to ten poziom matematyki w artykule z 1922 r., który tutaj został oznaczony symbolem II-F.

Podział na matematykę finitystyczną i infinitystyczną, który w tekście z 1922 r. został przez Hilberta ledwie zasygnalizowany, był później przez niego w istotny sposób wykorzystywany. Od 1925 r. twierdził, że celem budowanej przez niego metamatematyki jest finitystyczny dowód niesprzeczności matematyki infinitystycznej. Wydaje się, że i ta idea zawarta jest, przynajmniej *implicite*, w artykule, w którym Hilbert w 1922 r. szkicuje po raz pierwszy za-

[10] Nie jest to oczywiście „identyfikacja” jednoznaczna. Większość interpretatorów przychyla się jednak do sądu, że idee, które Hilbert wiązał z matematyką finitystyczną, najlepiej „ucieleśnia” *Primitive Recursive Arithmetic* (znana w literaturze jako PRA) — sformalizowana teoria arytmetyki, której pomysł wywodzi się od Skolema.

sadnicze zręby formalizmu. Matematyka infinitystyczna została utożsamiona wyżej z poziomem matematyki II-F (z 1922 r.). Dowód jej niesprzeczności miał być podany w metamatematyce (poziom III-MM). Matematyka na poziomie III-MM zawierała przynajmniej fragmenty arytmetyki treściowej z poziomu II-T i nie wydaje się, by zawierała „więcej" matematyki. Skoro zaś arytmetykę treściową II-T można słusznie kojarzyć z późniejszą matematyką finitystyczną Hilberta, to planowany w 1922 r. dowód — na poziomie III-MM — niesprzeczności matematyki z poziomu II-F faktycznie można określić mianem finitystycznego dowodu niesprzeczności matematyki infinitystycznej.

Wypada zaznaczyć, że późniejszego istotnego rozróżnienia Hilberta (matematyka realna kontra matematyka idealna), które zresztą pełni ważną funkcję w pohilbertowskim ograniczonym (relatywnym) programie Hilberta, też można dopatrzeć się w tekście *Neubegründung der Mathematik* z 1922 roku. Matematyka II-T to matematyka realna, jej semantykę stanowią realne obiekty — znaki z poziomu I-Z. Matematyka z poziomu II-F (bez II-T/F) to zaś w istocie późniejsza Hilbertowska matematyka idealna, nietraktująca o obiektach realnych (ani żadnych innych obiektach).

A zatem Hilbert przynajmniej „zarysował" w artykule z 1922 r. wiele idei swojej przyszłej filozofii i teorii podstaw matematyki. Trzeba zaznaczyć, że ponadto *explicite* wskazywał w tym tekście problemy, które musiała jeszcze rozwiązać formalistyczna filozofia matematyki. Najistotniejszy z nich wynikał z Brouwerowskich intuicjonistycznych badań podstaw matematyki. Wiązał się genetycznie z konstruktywistyczną krytyką dowodów twierdzeń egzystencjalnych prowadzonych metodą nie wprost. Problem, przed którym stanął Hilbert, to stosowanie kwantyfikatorów o nieskończonym zakresie zmienności. Niektóre przynajmniej zdania matematyki infinitystycznej (II-F) z konieczności wymagały takiej kwantyfikacji (Hilbert 1922: 176-177). W takiej sytuacji zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora ogólnego jest w istocie nieskończoną koniunkcją zdań, a zdanie rozpoczynające się od kwantyfikatora egzystencjalnego jest nieskończoną alternatywą zdań. Aby rozstrzygnąć prawdziwość (fałszywość) zdań opatrzonych kwantyfikatorami, trzeba — być może — „przejrzeć" nieskończenie wiele członów nieskończonej koniunkcji (alternatywy), a to — nie tylko z konstruktywistycznego punktu widzenia — jest niewykonalne dla podmiotu matematycznego. Hilbert nie mógł przejść obojętnie obok tego problemu, skoro postulował formalizację matematyki infinitystycznej (II-F). W tekście z 1922 r. jasno zapowiedział, że w najbliższym czasie postara się przedstawić jego rozwiązanie (Hilbert 1922: 176-177)[11].

---

[11] Hilbert podjął się wspomnianego zadania w kolejnej swej pracy, wprowadzając funkcję τ (Hilbert 1923).

PODSUMOWANIE

W artykule porównano niektóre idee najwcześniejszej postaci Hilbertowskiego formalizmu z wybranymi ideami dojrzalszych wariantów tego kierunku filozofii i teorii podstaw matematyki. Pokazano przy tym, że zasadnicze zręby tej koncepcji naszkicowane zostały już w 1922 r. w pracy *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*. Wskazano też, że Hilbertowska koncepcja „wielopoziomowości" matematyki była bardziej rozbudowana, niż to się zazwyczaj przyjmuje — nie ograniczała się jedynie do sformalizowanej (*formale*) matematyki i treściowej (*inhaltliche*) metamatematyki. W zakresie ontologii matematyki zwrócono uwagę na dwa współwystępujące w 1922 r. warianty Hilbertowskiego nominalizmu: metodologiczny i ścisły.

BIBLIOGRAFIA

Cantor G. (1932), *Briefe an Richard Dedekind* 28.07.1899, 28.08.1899, 31.08.1899 [w:] *Gesammelte Abhandlungen*, E. Zermelo (Hrsg.), Berlin: Springer, 443-450.

Dadaczyński J. (2018), *O niektórych inspiracjach Hilbertowskiego programu formalizmu*, „Filozofia Nauki" 26(3) [103], 99-112. https://doi.org/10.14394/filnau.2018.0019

Detlefsen M. (1986), *Hilbert's Program*, Dordrecht: Reidel. https://doi.org/10.1007/978-94-015-7731-1

Giaquinto M. (1983), *Hilbert's Philosophy of Mathematics*, „British Journal for Philosophy of Science" 34(2), 119-132. https://doi.org/10.1093/bjps/34.2.119

Hilbert D. (1900), *Über den Zahlbegriff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 8, 180-184.

Hilbert D. (1905), *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* [w:] *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, A. Krazer (Hrsg.), Leipzig: Teubner, 174-185.

Hilbert D. (1922), *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität" 1(1), 157-177. https://doi.org/10.1007/BF02940589

Hilbert D. (1923), *Die logischen Grundlagen der Arithmetik*, „Mathematische Annalen" 88, 151-165.

Hilbert D. (1926), *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 95, 161-190. https://doi.org/10.1007/BF01206605

Jourdain Ph. (1904), *On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-Ordered Aggregates*, „Philosophical Magazine" 7, 61-75. https://doi.org/ 10.1080/14786440409463088

Kreisel G. (1983), *Hilbert's Programme* [w]: *Philosophy of Mathematics*, P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 207-238.

Peckhaus V. (1990), *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Sieg W. (2013), *Hilbert's Programs and Beyond*, New York: Oxford University Press.